

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
- [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
- [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению
$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
- [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задачами, что $361 = 19^2$ 19 - простое
 $n! + (n+1)! + (n+2)! = n!(1 + n + 1 + (n+2)(n+1)) =$
 $= n!(n^2 + 3n + 2 + n + 2) = n!(n^2 + 4n + 4) =$
 $= n!(n+2)^2$, тогда при $n=17$
 $17! \cdot (19)^2$: 361, т.к. а при мень-
ших n $n! \not\vdash 19$ и $n+2 \not\vdash 19$, т.к. ни одно
из чисел от 1 до $n+2$ при $n < 17$ не
делится на 19, т.к. все они < 19 ,
а 19 простое, то и $n!(n+2)^2 \not\vdash 19$,
т.к. 19 - простое.

Ответ: $n = 17$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть наименьшее из таких a для

$$a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 = 10 =$$
$$= 5a^2 + 20a + 20 = 5(4 + 4a + a^2) =$$
$$= 5(a+2)(a+2), \text{ т.к. } N^3 > 6^3 \Rightarrow a \geq 3 \text{ и}$$
$$(a+2)^2 = 5^2 \cdot x^3 \Rightarrow a+2 = 5 \cdot x \text{ при } x \geq 1,$$
$$\text{т.к. } x^3 \geq 8, \text{ т.к. } x \geq 1 \Rightarrow a+2 =$$
$$= 8 \cdot 5 = 40, a = 38, a \Rightarrow N^3 = 5 \cdot 40^2 =$$
$$= 2^6 \cdot 5^3 = 20^3 = N = 20$$

Ответ: $N = 20$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 16}{2} = 9 \text{ и } -4 \Rightarrow$$

(проверь ответы сверху)

$$\Rightarrow x < 9 \text{ не подходит}$$

левая часть неравенства $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6$ и без модуля всегда > 0 , а правая
часть при $x < -4$ раскрывается

$$\text{так: } -\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 2x + 1 \quad (\text{т.к. } |2x| >$$

$$> |\sqrt{x^2 - 2x - 3}|) + 4 - 2x =$$

$$= -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 4x + 8 \leq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -4x + 2$$

$$m.k \sqrt{x^2 - 2x - 3} \cdot 2 \geq 0 \quad \text{возьмём в 2}$$

$$2x^2 - 4x - 3 \geq 16x^2 - 8x + 4$$

$$-14x^2 + 4x + 4 \geq 0, \text{ но при } x < 0 \text{ это}$$

не верно \Rightarrow мы раскроем модуль
при $x \geq 9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $x \geq 9$ она раскрывается так.

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 - 7 + 2x$$

$$14 \geq 4x$$

$$7 \geq 2x$$

$$3,5 \geq x$$

$$\text{т.к. } x \geq 9$$

11

решений нет

Ответ: решений нет



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

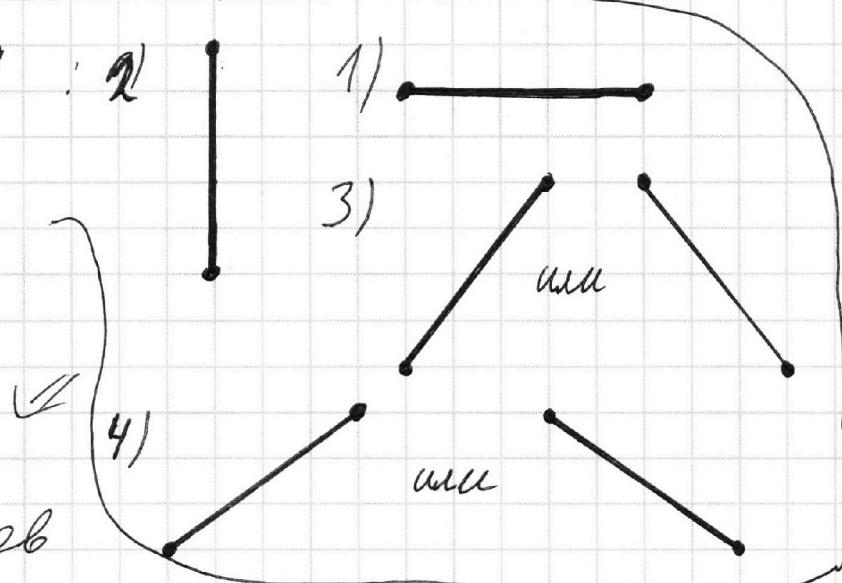
Чтобы координаты точек должны удовлетворять отрезку вдоль него 5 должно выполняться: $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 5$, эти разности должны быть целыми и равняться всего только 6 или 4 вариантов:

$$\begin{array}{lll} 1) |x_A - x_B| = 5 & 2) |x_A - x_B| = 0 & 3) |x_A - x_B| = 3 \\ |y_A - y_B| = 0 & |y_A - y_B| = 5 & |y_A - y_B| = 4 \end{array}$$

$$4) |x_A - x_B| = 3 : 2$$

$$|y_A - y_B| = 4$$

у нас
6 вариантов



сторон для решения и как-то видов.
подсчет $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

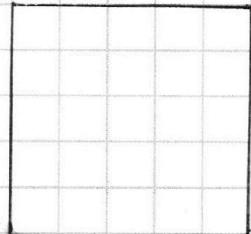
6

7

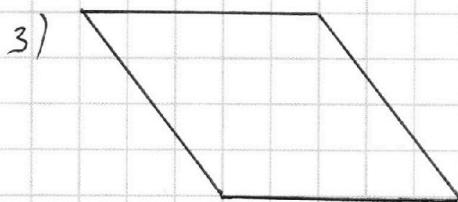
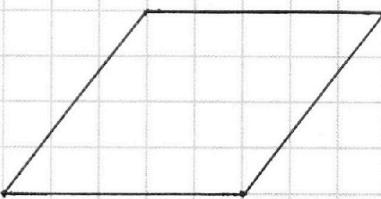
СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

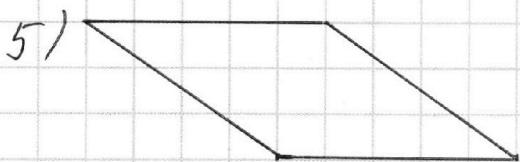
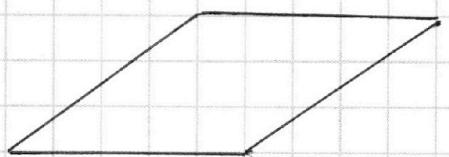
Варианты: 1)



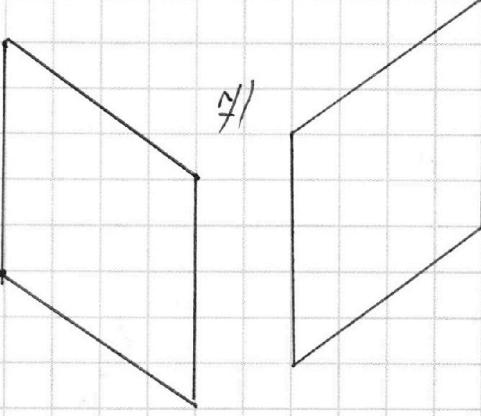
2)



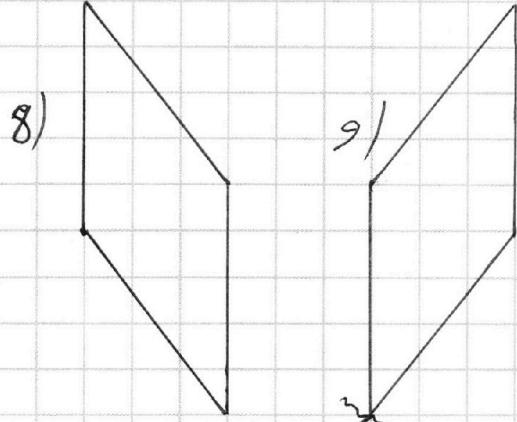
4)



6)

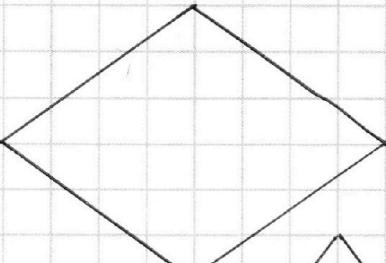


7)



9)

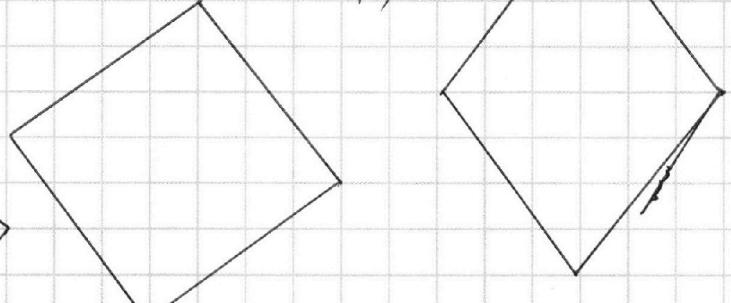
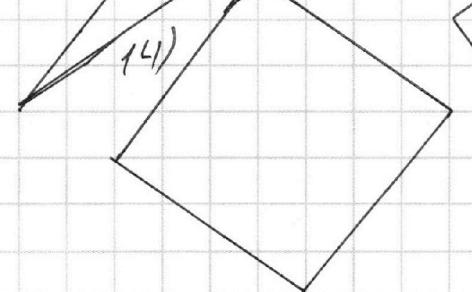
10)



11)

12)

13)





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

15) ~~ххх~~

каждый из них имеет
высоту h_x и ширину h_y
и их количество
в промежутке

$$\text{от } 1 \text{ до } 50 = (50 - h_x + 1) \cdot \\ \cdot (50 - h_y + 1) = \\ = (51 - h_x)(51 - h_y)$$

для этих видов параллелограмма: (слева h_y)

$$5, 5 / 4, 8 | 4, 8 | 3, 9 | 3, 9 | 8, 4 | 8, 4 | \\ 9, 3 | 9, 3 | 6, 8 | 7, 7 | 7, 7 | 8, 6 | 7, 7 | \\ 7, 7 |$$

$$\text{посчитаем сумму} \quad 4 \cdot (51 - 7)^2 + 4(51 - 9)(51 - 3) + \\ + (46)^2 + 2(51 - 6)(51 - 8) + 4(51 - 8)(51 - 4) = \\ = 4 \cdot 44^2 + 4 \cdot 42 \cdot 48 + 46^2 + 2 \cdot 45 \cdot 43 + \\ + 4 \cdot 43 \cdot 47 = \underline{\underline{7744}} + \underline{\underline{8056}} + \underline{\underline{2116}} + \\ + \underline{\underline{3840}} + \underline{\underline{7904}} = 15800 + 3840 + 10020 = \\ = 25820 + 3840 = 29690$$

Ответ: 29690

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$19 \cdot 2^x = (y+45)(y-45)$, заменим, что

$$(y+45, y-45) = (90, y-45) \Rightarrow$$

исс НОД

степень 2

$$\text{иск НОД} \quad \text{т. к } 19 \cdot 2^x \text{ и } 90 \text{ имеют общую из}$$

от этого видно, что $y+45$ и $y-45$ имеют общую из степень 2, а другое 19 тоже имеет

$$y+45 \text{ при } y=45 \text{ падает. степ. 2 и падает 19} \\ \Rightarrow 45, \text{ то } y-45=45, \text{ а } y+45=90$$

$$\text{тогда пусть } y = 45 = z$$

$$19 \cdot 2^x = z(z+90) \Rightarrow \text{тако } z, z,$$

тако $90+z$ - степень 2, другое -

степень 2 $\cdot 19$

$$19 \cdot 2^x = 19 \cdot 2^k \cdot 2^e = 19 \cdot 2^k (2^e)$$

$$64 \cdot 2^k < 128 \cdot 2^k$$

$$16 \cdot 2^k < 19 \cdot 2^k < 32 \cdot 2^k \Rightarrow \text{разность}$$

меньше степ. 2 выше

$$18 \cdot 2^k, 17 \cdot 2^k, 15 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, 13 \cdot 2^k, 45 \cdot 2^k$$

$$\text{из этого всего, только } 45 \cdot 2^k : 90 \geq 100 \cdot 2^k \Rightarrow k = 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x тогда $1 + 7 = 8$, а $y = 38 + 45 =$
 $= 83$

Ответ: $x = 8$, $y = 83$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 = a^2$ - уравнение окружности
с радиусом a

$-a \leq x \leq a$, а $x^2 - 6x + a^2$ - график a -
парабола с ветвями вверх \Rightarrow
ее максимум на концах либо в

a , либо $b = -a$:

$$\text{либо } 1/a^2 - 5a = 8, \text{ либо } 2/a^2 + 7a = 8$$

~~У корни a и b 21 корня $a = -7$~~

$$a^2 + 7a - 8 = 0$$

$$\text{тогда } D = 49 + 32 = 81$$

~~$\frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2}$~~

$$\alpha_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{2} = 1 \text{ либо } -8$$

при $a = -8 \quad x = -8 \quad 64 + 48 - 8 \quad (\text{не подходит})$

при $a = 1 \quad x = 1 \quad 1 - 6 + 1 = 4 \quad (\text{подходит})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

задача уравнение $a^2 + 5a - 8 = 0$

$$D = 25 + 4 \cdot 8 = 25 + 32 = 57$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}$$

проверим эти корни

$$a = \left(\frac{5 + \sqrt{57}}{2} \right)^2 + \frac{25 + 5\sqrt{57}}{2} - 8$$

$$\sqrt{57} > 7$$

$$a = 6^2 + 6 \cdot 5 - 8 > 8$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right)^2 + 25 \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right) - 8 =$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right)^2 + 5 \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right) - 8, m.k \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right) < 0$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right)^2 - 5 \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right) - 8 = ?$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right)^2 - 10 \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right) = 64 \stackrel{?}{=} \frac{25 + 57 - 10\sqrt{57}}{4} - 50 + 10\sqrt{57}$$

Ответ: $a = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

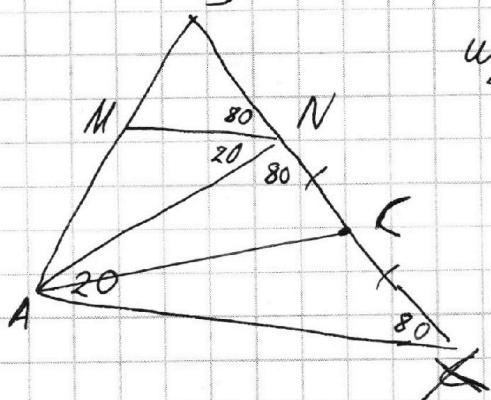
6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте проведём $l \parallel MN$, она пересекает BC в X , тогда $NX \cdot MB = BN \cdot MA$, т.к. $MN \parallel AX$
значит C - середина NX



из параллельности
 $MN \parallel AX \Rightarrow \angle MNA =$
 $= \angle XAN = 180^\circ - 80^\circ : 2 =$
 $= 20^\circ$ т.к. $\angle ANX =$
 $80^\circ \Rightarrow \angle ANX = p/6 \Rightarrow$

AC и медиана и
бис -са $\Rightarrow \angle NAC = \frac{20^\circ}{2} =$

$$= 10^\circ$$

Ответ: $\angle NAC = 10^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

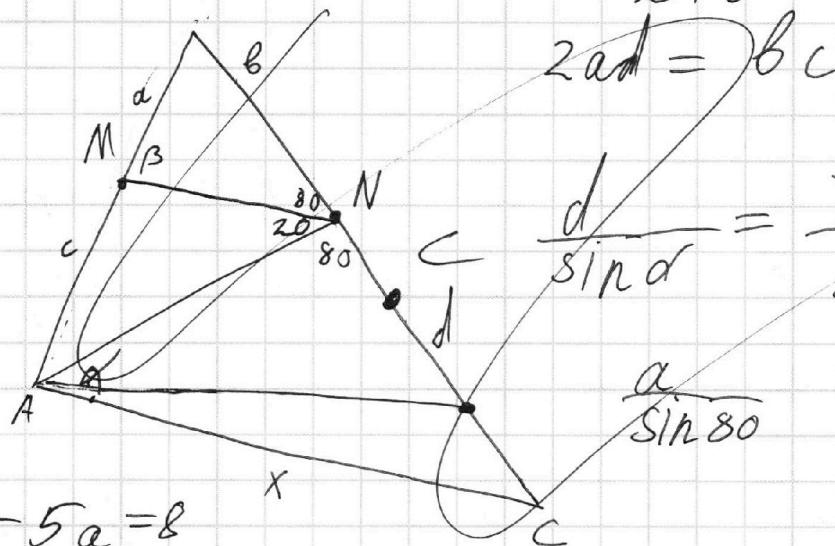
 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$5a^2 + 22a + 29$$

$$20 + 44 + 29$$

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 6 \\ \hline 216 \end{array}$$



$$2ad = bc$$

$$\frac{d}{\sin d} = \frac{x}{\sin 80^\circ}$$

$$\frac{a}{\sin 80^\circ}$$

$$a^2 - 5a = 8$$

$$a(a-5)$$

$$45 + 66 + 26$$

$$\begin{array}{l} 16 \cdot 2^k \\ 32 \cdot 2^k \end{array}$$

$$a^2 + 7a$$

2

4

8

16

32

64

128

256

512

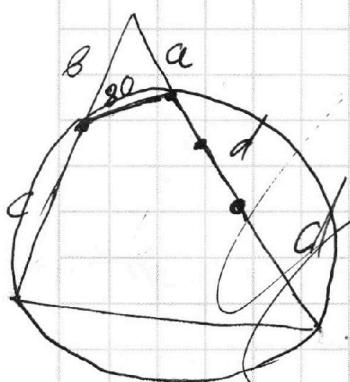
1024

$$-9 \cdot 9 = 81$$

38

5

76





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \cdot 44$$

$$n!$$

$$361 = 19^2 \times \frac{88}{704} \times \frac{88}{96} \times \frac{84}{496} \times \frac{96}{456} \times \frac{8056}{8056}$$

$$a^2 + a^2 + 2a + 1$$

$$20^2 - 400$$

$$380 - 19 = 361 \times \frac{46}{46}$$

$$n! (1 + n + 1 + (n+1)(n+2))$$

$$\begin{array}{r} \times 86 \\ 99 \\ \hline 344 \end{array} n^2 + 3n + 2$$

$$21 + \frac{276}{184}$$

$$n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 \cdot n!$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{matrix}$$

$$8 \quad 14 \quad 30 \quad 55$$

$$\begin{array}{r} \times 43 \\ 90 \\ \hline 3840 \end{array}$$

$$45 \quad (y - 45)(y + 45) =$$

$$-19 \cdot 2^x$$