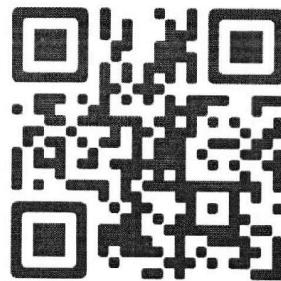


МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 10

- [3 балла] При каком наименьшем натуральном  $n$  число  $(n - 1)! + n! + (n + 1)!$  делится на 289?
- [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа  $N$ , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение  $N$ .
- [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка  $[1; 45]$ . Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых для множества точек плоскости  $Oxy$ , задаваемых уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$ , наибольшее значение выражения  $y^2 - 4y - a$  равно 6.
- [6 баллов] На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$ . Найдите  $\angle CAN$ , если известно, что  $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = \cancel{(n-1)!} \cancel{n!} \cancel{(n+1)!}$$

$$= (n-1)! + (n-1)! \cdot n + (n-1)! \cdot n \cdot (n+1) = (n-1)! \cdot (1+n+n^2+n) =$$

$$= (n-1)! \cdot (n+1)^2 : 289 = 17^2 \Rightarrow (n-1)! \cdot (n+1)^2 : 17 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  т.к. 17 - простое число  $\begin{cases} (n-1)! : 17 \\ (n+1)^2 : 17 \end{cases}$ . Если  $n < 16$ , то

$n+1 < 17$  и  $n-1 < 15 < 17 \Rightarrow$  ни  $(n-1)!$ , ни  $(n+1)^2$  не делится на 17. Значит  $n \geq 16$ . Убедимся, что  $n=16$  подходит:

$$(n-1)! \cdot (n+1)^2 = 15! \cdot 17^2 : 17^2 \quad \cancel{\text{УЧЕБНИК}}$$

Ответ: ~~15~~ 16.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.













СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(h-3)^2 + (h-2)^2 + (h-1)^2 + h^2 + (h+1)^2 + (h+2)^2 + (h+3)^2 =$$

$$= (h^2 - 6h + 9) + (h^2 - 4h + 4) + (h^2 - 2h + 1) + h^2 + (h^2 + 2h + 1) + (h^2 + 4h + 4) + (h^2 + 6h + 9) = \\ = 7h^2 + 28$$

$$\text{Из условия } 7h^2 + 28 = N^5$$

$$7h^2 = N^5, N > 8$$

$$7h^2 : 7 \Rightarrow N^5 : 7, \text{ а т.к. 7 - простое число, } N^5 : 7 \Rightarrow \cancel{\text{N}^5 : 7}$$

~~$$N^5 : 7 \Rightarrow N : 7 \Rightarrow N = 7k, \Rightarrow k > 1 \text{ т.к. } N > 8$$~~

$\Rightarrow 7h^2 = 7^5 \cdot k^5 \Rightarrow \left(\frac{h}{7}\right)^2 = k^5$ , однако число является одновременно квадратом и пятой степенью только если это число - десятая степень:  $k^5 = x^{10} \geq 2^{10} \Rightarrow k \geq 4$ .

Убедимся, что  $k = 4$ ;  ~~$N = 7k = 28$~~  подходит.

$$N^5 = 28^5 = 2^5 \cdot (2^2 \cdot 7)^5 = 2^{10} \cdot 7^5 = 7 \cdot (2^5 \cdot 7^2)^2 = 7 \cdot h^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow h = 2^5 \cdot 7^2$$

Ответ: 28.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-x-2} + 5| \geq |\sqrt{x^2-x-2} + x-1| + |6-x|.$$

Известно, что  $|a| + |b| \geq |a+b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда числа  $a$  и  $b$  имеют один знак:  $|a| + |b| \geq |a+b| \iff$

$$\iff \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

Применим здесь это неравенство:

$$|\sqrt{x^2-x-2} + x-1| + |6-x| \geq |\sqrt{x^2-x-2} + x-1 + 6-x| =$$

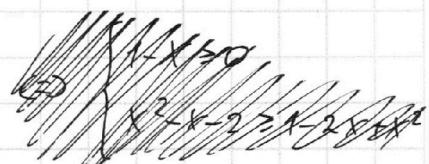
$$= |\sqrt{x^2-x-2} + 5| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x^2-x-2} + 5| \geq |\sqrt{x^2-x-2} + x-1| + |6-x| \geq |\sqrt{x^2-x-2} + 5|$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x^2-x-2} + 5| = |\sqrt{x^2-x-2} + x-1| + |6-x| \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-x-2} + x-1 \geq 0 & ① \\ 6-x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-x-2} + x-1 \leq 0 & ② \\ 6-x \leq 0 \end{cases}$$

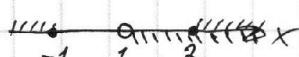
$$①: \sqrt{x^2-x-2} + x-1 \geq 0; \quad \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$$



Значит  $1-x < 0$ , то подходит  $\forall x$ , при которых левая часть имеет

смысл:  $x^2-x-2 \geq 0 \Rightarrow$

 $(x+1)(x-2) \geq 0 \Rightarrow x \Rightarrow \begin{cases} 1-x < 0 \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty) \end{cases}$



$$x \geq 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если  $1-x \geq 0$ , то ~~корень~~ можно возвести в квадрат.

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x; \quad x^2 - x - 2 \geq 1 - 2x + x^2; \quad \boxed{x \geq 3}.$$

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases} \quad \boxed{x \geq 3} \Rightarrow \text{решение нет}$$

Значит, решением нер-ва  $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x$  является пр.  
 $[2; +\infty)$ .

②:  $\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \leq 0$ . Очевидно, что при  $\forall x \notin [2; +\infty)$

это нер-во либо выполнено, либо ~~корень неопределён~~,

т.к.  $x \in [2; +\infty)$  — решение ~~корня~~, то с другими значениями:

$$\begin{cases} x < 2 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2 \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty) \end{cases} \quad (\sqrt{x^2 - x - 2} = 1 - x \text{ неизгл.})$$

~~если~~  $-1 < x < 2$

$x \leq -1$  — решение

этого нер-ва.

Значит членами ~~равенства~~ равенства ~~равенства~~ являются:

$$\boxed{\begin{cases} x \geq 2 \\ 6-x \geq 0 \\ x \leq -1 \\ 6-x \leq 0 \end{cases}} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 6 \\ x \leq -1 \\ x \geq 6 \end{cases} \quad \underline{x \in [2; 6]} \quad \text{нет реш.}$$

Ответ:  $[2; 6]$ .



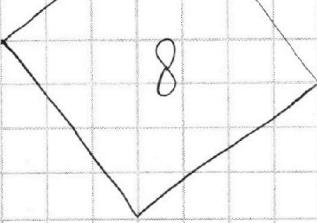
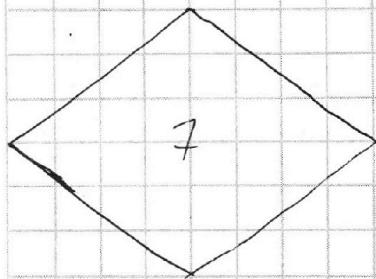
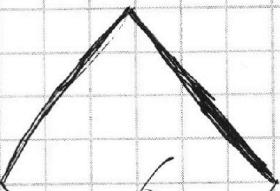
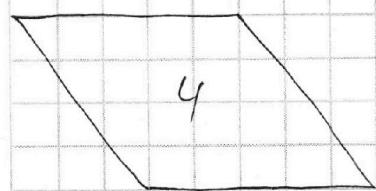
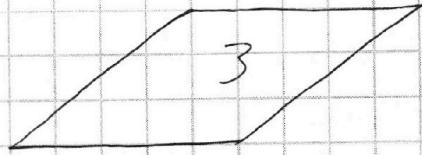
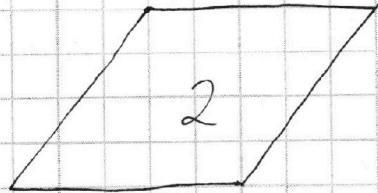
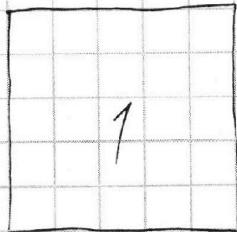
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего на координатной плоскости образовались 5 с  
вершинами ~~координатами~~ в точках с целыми  
координатами можно получить 4-ти способами:  
вектор с координатами  $(5; 0)$ , с коорд.  $(0; 5)$ ,  
(коорд  $(3; 4)$ ) и с коорд.  $(4; 3)$ . Более их  
быть не может, так как по г. Аффинагра не 3  
треул. С целыми сторонами, имеющими 5 и кратном  
1 или 4. Острова передбрам можно получить  
все виды уравов со стороны длины 5:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Типов 2 и 4; 3 и 5; 6 и 7; 8 и 9  
на плоскости однаковое количество,  
потому что их можно перевести  
друг в друга преобразованиями движений.  
Ромбов типа 1 на плоскости будет  
 $86^2 - 4$ , потому что его центр может находиться в  
внутренней ячейке ~~внешней ячейки~~  $86 \times 86$ , но нам не подходит 4  
ромба, если одна из вершин квадрата — начальная  
координат. Аналогично типа 2: ~~86^2 + 2 \cdot 83 \cdot 87 + 2 \cdot 82 \cdot 88 + 2 \cdot 85 \cdot 83 + 2 \cdot 84^2 - 4 \cdot 9~~  
83 \cdot 87 - 4; Типа 3: 82 \cdot 88 - 4; Типа 4: 83 \cdot 87 - 4;  
Типа 5: 82 \cdot 88 - 4; Типа 6: 85 \cdot 83 - 4; Типа 7:  
85 \cdot 83 - 4; Типа 8: 84^2 - 4; Типа 9: 84^2 - 4  
Общ:  $86^2 + 2 \cdot 83 \cdot 87 + 2 \cdot 82 \cdot 88 + 2 \cdot 85 \cdot 83 + 2 \cdot 84^2 - 4 \cdot 9$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$y^2 - 45^2 = 23 \cdot 2^x$$

$$(y-45)(y+45) = 23 \cdot 2^x; \quad 23 - \text{простое число} \Rightarrow y-45 \equiv 23 \text{ или } y+45 \equiv 23$$

$$\text{①: } y-45 \equiv 23 \pmod{23} \quad y-45 = 23k, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow y+45 = 23k+90;$$

$$23k \cdot (23k+90) = 23 \cdot 2^x$$

$$k(23k+90) = 2^x, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0 \quad \cancel{\text{или } k = \pm 2^x \quad 23k+90 = 2^x}$$

$$\cancel{23 \cdot 2^x + 90 = 2^x} \quad \text{так как } k \in \mathbb{Z}, \quad 2^x, 2^x \in \mathbb{Z}$$

$$\cancel{2(23k+90) = 2^x} \quad \text{не равна 1}$$

$$\cancel{2^{x-1} \cdot 2^{x-1} = 2^{x-1} \cdot 2^{x-1}}$$

$$\text{Если } x=0, \text{ то } \beta = 113, \text{ не подх.}$$

$$\text{Если } \beta=0, \text{ то } \alpha = -2^x = -\frac{89}{23}, \text{ не подх.} \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = -2^x \\ \beta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x, \beta > 0 \Rightarrow$$

$$= 2^{x-1} \cdot 2^{x-1} \in \mathbb{Z}$$

$$2(23 \cdot 2^x + 45) = 2^x$$

$$2(23 \cdot 2^{x-1} + 45) = 2^{x-1}, \quad \text{левая часть нечетная} \Rightarrow \text{правая}$$

$$\text{также} \Rightarrow 2^{x-1} = 1 \Rightarrow \cancel{2^x = 2} \Rightarrow$$

$$\text{тогда } \text{①} k=2^x; \quad 23k+90=2^x \text{ или } \text{②} k=-2^x; \quad 23k+90=-2^x$$

$$\text{①: } 23 \cdot 2^x + 90 = 2^x$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2^x, 2^x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq 0, \beta \geq 0$$

$$\text{Если } x=0, \text{ то } 2^x = 113, \text{ не подх.}$$

$$\text{Если } \beta=0, \text{ то } 2^x = -\frac{89}{23}, \text{ не подх.} \quad \left. \begin{array}{l} x=0 \\ \beta=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x, \beta > 0 \Rightarrow$$

$$= 2^{x-1} \cdot 2^{x-1} \in \mathbb{Z}$$

$$2(23 \cdot 2^{x-1} + 45) = 2^x$$

$$23 \cdot 2^{x-1} + 45 = 2^{x-1} \quad \text{левая часть нечетная} \Rightarrow 2^{x-1} - \text{четное.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{x-1} = 1 \Rightarrow 2^{x-1} = \frac{-44}{23} \text{ не подх.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6 аугал (2) алашшама  $\alpha, \beta \geq 0$ , если  $\alpha=0$ , то  $2^\beta = 67$

не подж.; если  $\beta=0$ , то  $2^\alpha = \frac{91}{23}$  не подж.  $\Rightarrow 2^{\alpha-1}, 2^{\beta-1} \in \mathbb{Z}$ :

$$\cancel{2}(-23 \cdot 2^{\alpha-1} + \cancel{45}) = -2^\beta$$

$$-23 \cdot 2^{\alpha-1} + \cancel{45} = -2^{\beta-1}, \text{ левая часть нецел.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2^{\beta-1} - \text{нечел.} \Rightarrow 2^{\beta-1} = 1 \Rightarrow 2^{\alpha-1} = \frac{-46}{-23} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^\alpha = 4 \Rightarrow k=-4 \Rightarrow y-45 = 23 \cdot (-4) = -92 \Rightarrow \boxed{y=-47} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x = \frac{-92 \cdot (-2)}{23} = 8 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

6 аугал (2), если  $y+45 : 23$ , алашшама первому, если  
если если  $y$  делится на  $-4$ , делится в кей мы получим  
тот же ответ, дальше  $y$  будет о чём вспомним:

$$\boxed{x=3; y=47.}$$

Ответ:  $(3; -47); (3; 47)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Введем функцию  $f(y) = y^2 - 4y + a$ .

Г.к. для  $\forall$  точек на окружности  $x^2 + y^2 = a^2$  ордината  $y \in [-|a|; |a|]$ ,

будем искать максимальную функцию на ~~этих~~ ~~окружности~~ отрезке.

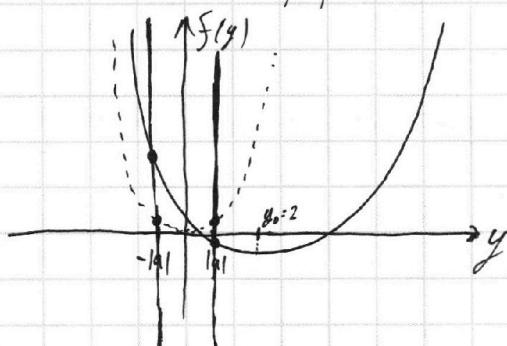
~~Максимум функции~~  $f(y)$  — парабола лежит вверх.

Её максимум находится в вершине:  $y_0 = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2$ . Значит

этая парабола смещена вправо относительно  $f(y) = y^2$ ,

значит явно, что её максимум на отрезке  $[-|a|; |a|]$  достигается

в точке  $-|a|$ :



$f(-|a|)$  по условию = 6.

$$|a|^2 + 4|a| + a = 6$$

1) Если  $a \geq 0$ :

$$a^2 + 5a = 6$$

$$(a-1)(a+6)=0$$

$a=1$  или  $a=-6$  не подходит.

2) Если  $a < 0$ :

$$a^2 - 3a - 6 = 0$$

$$\Delta = 9 + 4 \cdot 6 = 33$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}. \quad a = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} > 0$$

не подходит.

$$a = \frac{3 - \sqrt{33}}{2} < \frac{3 - \sqrt{25}}{2} = \frac{-2}{2} = -1 < 0 \text{ подходит}$$

Ответ:  $a = 1$  или  $a = \frac{3 - \sqrt{33}}{2}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

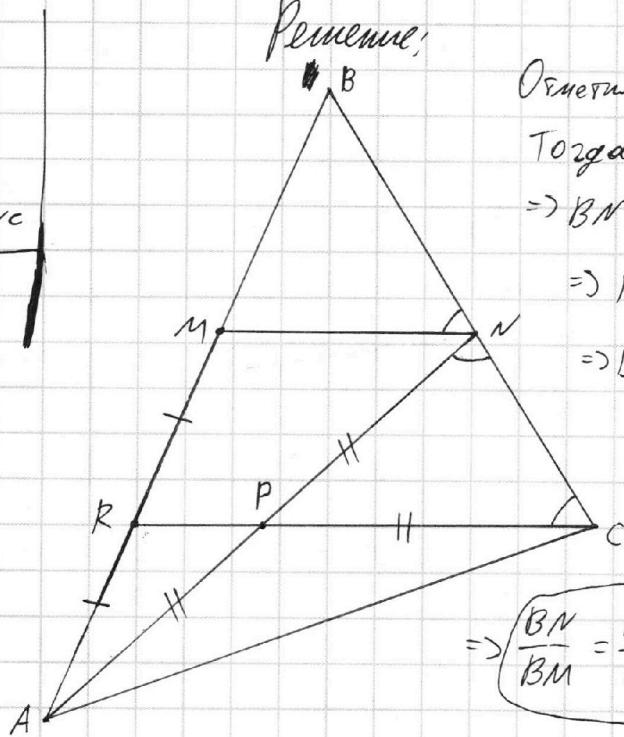
$$\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$$

~~МНВА = 70°~~

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

ЛСАН - ?

Решение:



Отметим Г. Р - сер. АМ.

$$\text{Тогда } BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BN \cdot \frac{MA}{2} = BM \cdot NC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BN \cdot MR = BM \cdot NC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BN \cdot MR + \underline{BM \cdot BN} = \underline{BM \cdot NC} + \underline{+ BM \cdot BN} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BN \cdot (BM + MR) =$$

$$= BM \cdot (BN + NC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{BM} = \frac{BN + NC}{BM + MR} = \frac{BC}{BR}, \text{ т.к.}$$

Этот же  $\triangle RBC$  и  $\triangle MBN$  общий угол при верх. B  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle RBC \parallel \triangle MBN$  по двум сг. и общем. углам  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCR = \angle BNM \Rightarrow MN \parallel RC \Rightarrow$  по Г. Фалеса  $AP = PN$

(Г. Р - г. пересеч. CR и AN).

$\angle PNC = \angle MNB = \angle NCP \Rightarrow \triangle NPC - p/\delta \Rightarrow \underline{CP = NP} \Rightarrow$

$\Rightarrow CP = NP = PA \Rightarrow \triangle APC - p/\delta \Rightarrow \cancel{\text{МНВА}} \angle CAP =$

$= \angle ACP \Rightarrow \angle CAP = \frac{180^\circ - \angle APC}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \angle CPN)}{2} =$

$$= \frac{180^\circ - \angle PNC - \angle PCN}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ - 70^\circ}{2} = 20^\circ$$

Ответ:  $20^\circ$ .

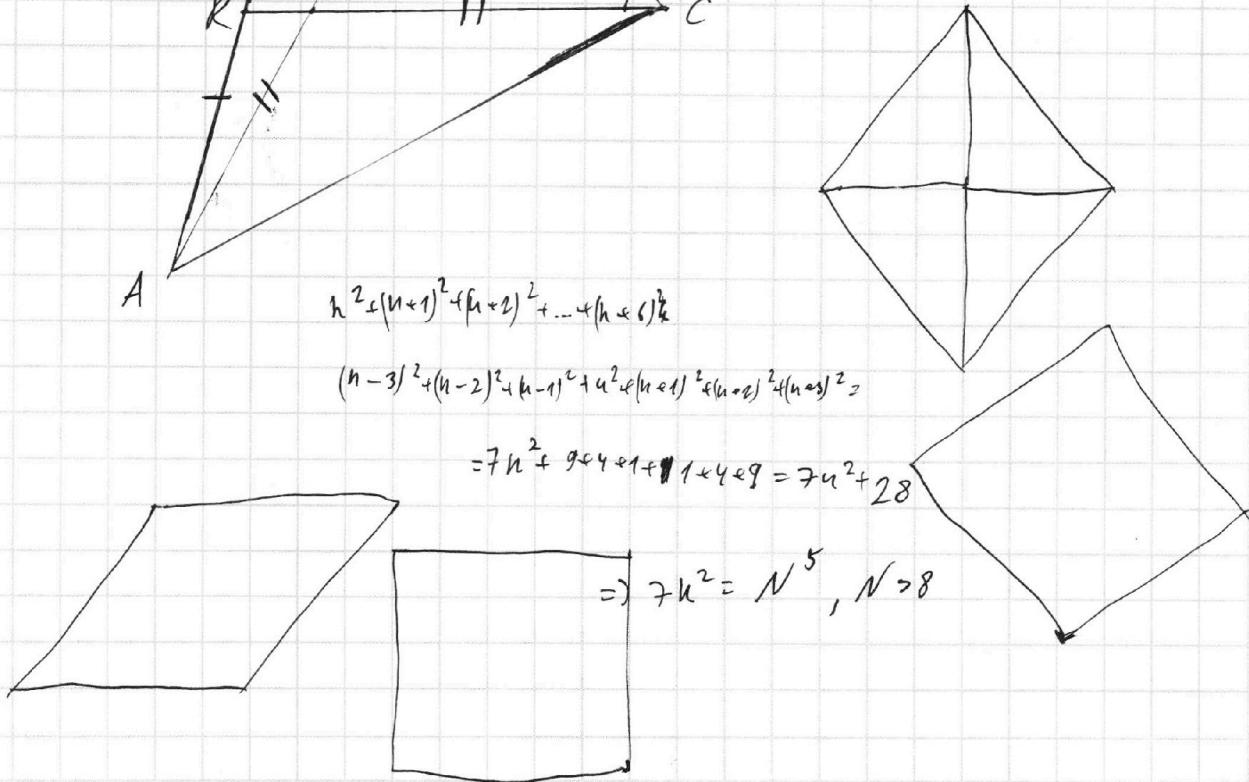
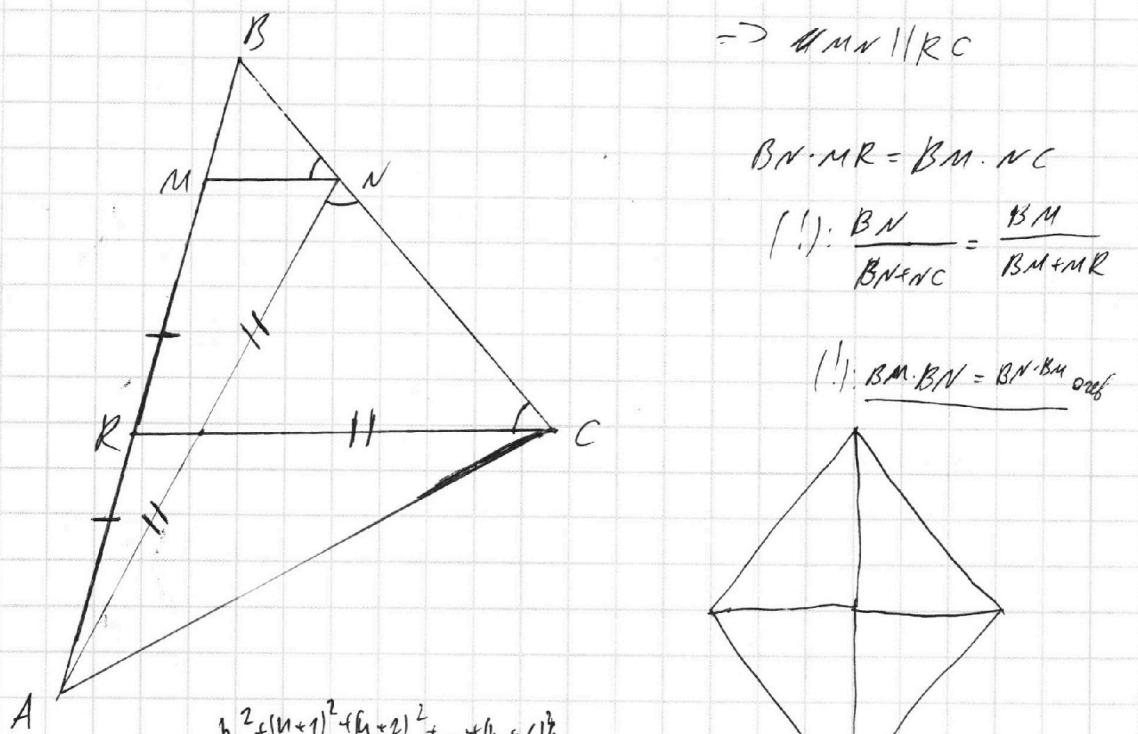
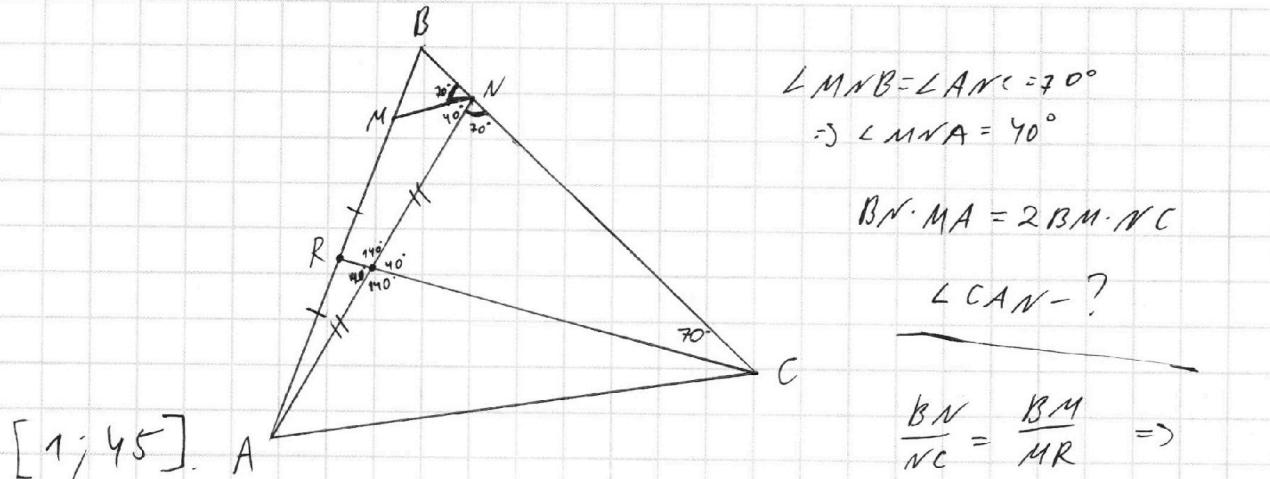


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! / (1+n+\cancel{n^2+n}) = (n+1)^2 \cdot (n-1)! \Rightarrow \cancel{(n-1)!}$$

$$n \geq 16$$

$$289 : 17^2$$

$\frac{17}{17} \\ \frac{17}{17} \\ \frac{17}{17}$

$$\left| \sqrt{(x-2)(x+1)} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{(x-2)(x+1)} + x-1 \right| + |6-x|$$

$$|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta| \Rightarrow |\sqrt{(x-2)(x+1)} + x-1| + |6-x| \geq \left| \sqrt{(x-2)(x+1)} + 5 \right|$$

$$\Rightarrow \alpha \text{ и } \beta \text{ одно знака} \quad |\alpha + x - 1 + |6-x| = |4 + 5|$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)(x+1)} + x-1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)(x+1)} + x-1 \leq 0 \\ 6-x \leq 0 \end{cases}$$

$$1) \alpha \geq 0 \quad 2) \alpha < 0$$

$$f(y) = y^2 - 4y - \alpha$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 - 4\alpha - \alpha = \alpha^2 - 3\alpha - 6$$

$$\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{53}}{2}$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$f(-\alpha) = \alpha^2 + 4\alpha - \alpha = \alpha^2 + 3\alpha = 6$$

$$23 \cdot 2^x + 3^4 \cdot 5^2 = y^2$$

$$D = 9 + 24 = 33$$

$$y \in \mathbb{Z}$$

$$(y-45)(y+45) = 23 \cdot 2^x$$

$$y-45 = 23k \quad (23k-90) \cdot 23k = 33 \cdot 2^x \Rightarrow$$

$$y-45 = 23k :$$

$$23k \cdot (23k+90) = 23 \cdot 2^x$$

$$k \cdot (23k+90) = 2^x$$

$$\Rightarrow k = 2^{\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow 23k-90 = 2^{\frac{x}{2}} \Rightarrow 23k-90 = 2$$

или  $k = 2^{\frac{x}{2}}$ :  $2 \cdot (96-20) = 80 \neq 0$   $\checkmark$   $2^x = 2 \cdot 4 = 8 \Rightarrow x = 3$

$$\Rightarrow k = 2^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{x}{2}} \cdot (23 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 90) = 2^{\frac{x}{2}}$$

$$f(y) = y^2 - 4y - \alpha \quad \text{на отрезке } [-9; \alpha]; \quad 23 \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{x}{2}} \Rightarrow 23 \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 90 = 2^{\frac{x}{2}}$$

$$x_0 = \frac{4}{2} = 2, \quad f(2) = 4 - 8 - \alpha = -\alpha - 4$$

$$23 \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{x}{2}} \quad \text{или } 23 \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 90 = 2^{\frac{x}{2}}$$

$$136 \quad \checkmark$$

$$f(-\alpha) = \alpha^2 + 4\alpha - \alpha$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 - 4\alpha - \alpha$$