

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n=1$

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! + (n-1)! \cdot n + (n-1)! \cdot (n+1) \cdot n = (n-1)! (1 + n + n^2 + n) = (n-1)! (n^2 + 2n + 1) = (n-1)! (n+1)^2$$

Заметим, что $289 = 17^2$, значит, если $(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! (n+1)^2 : 17^2$, то

- ① $(n-1)! : 17$, значит, так как 17-простое, то $n-1 \geq 17$, значит $n \geq 18$
② $(n-1)! : 17^2$, значит $(n+1) : 17^2$, значит так как 17-простое число, то $n+1 : 17$, значит $n+1 \geq 17$ (так как $n \in \mathbb{N}$, а значит $n+1 > 0$), значит $n \geq 16$

Заметим, что число 16 подходит, так как $(16-1)! + 16! + (16+1)! = 15! (1 + 16 + 17 \cdot 16) = 15! \cdot 17 \cdot 17 = 15! \cdot 17^2 : 17^2$

Ответ: при $n=16$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$N=2$

Пусть эти 7 последовательных натуральных чисел, это $a; a+1; a+2; a+3; a+4; a+5; a+6$, тогда сумма их квадратов равна:
 $a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 + (a+5)^2 + (a+6)^2 = a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 + a^2 + 6a + 9 + a^2 + 8a + 16 + a^2 + 10a + 25 + a^2 + 12a + 36 = 7a^2 + 42a + 91$.

Тогда по условию:

$$7a^2 + 42a + 91 = N^5$$

Тогда $7(a^2 + 6a + 9) = N^5$, значит так как $N \in \mathbb{N}$, то $N \div 7$, а так как 7-простое, то $N \div 7$, ~~по условию $N \in \mathbb{N}$ и $N > 8$, значит минимальное $N=14$, докажем, что при $N=14$ существует подходящее натуральное a .~~

~~$7a^2 + 42a + 91$~~ ~~причем $k > 1$, так как по условию $N > 8$~~
 значит $N = 7k$, где $k \in \mathbb{N}$, значит.

$$7(a^2 + 6a + 9) = 7^5 \cdot k^5$$

$$a^2 + 6a + 9 = 7^4 \cdot k^5$$

$$a^2 + 6a + 9 - 7^4 \cdot k^5 = 0$$

Тогда найдем дискриминант: $D = 36 - 4(9 - 7^4 k^5) = 4 \cdot 7^4 k^5$, заметим, что так как $a \in \mathbb{N}$, то дискриминант - точный квадрат, значит.

$7^4 k^5$ - точный квадрат, а значит k^5 - точный квадрат, а значит k - точный квадрат, значит, так как $k > 1$ (так как по условию $N > 8$), то минимальное $k=4$, значит минимальное $N=28$, докажем, что при $N=28$, существует подходящее натуральное a :

$$7(a^2 + 6a + 9) = 7^5 \cdot 4^5$$

$$a^2 + 6a + 9 = 7^4 \cdot 2^{10}$$

$$a^2 + 6a + 9 - 7^4 \cdot 2^{10} = 0$$

$$a = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(9 - 7^4 \cdot 2^{10})}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{7^4 \cdot 2^{10}}}{2} = \frac{-6 \pm 7^2 \cdot 2^5}{2}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{7^2 \cdot 2^5 - 6}{2} = 7^2 \cdot 2^4 - 3 \\ a_2 = \frac{-6 - 7^2 \cdot 2^5}{2} = -3 - 7^2 \cdot 2^4 \end{cases}$$

Тогда $a = 7^2 \cdot 2^4 - 3$ нам подходит (очевидно, что $7^2 \cdot 2^4 - 3 > 0$ и $7^2 \cdot 2^4 - 3 \in \mathbb{N}$, а значит $a \in \mathbb{N}$)

Ответ: $N=28$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

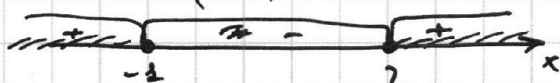
$$\sqrt{3}$$

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

Запишем ~~023~~ 023:

$$x^2-x-2 \geq 0$$

$$(x-2)(x+1) \geq 0$$



$$\text{Значит } x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

Пусть $\sqrt{x^2-x-2}+x-1=a$, а $6-x=b$, тогда

$$a+b=\sqrt{x^2-x-2}+x-1+6-x=\sqrt{x^2-x-2}+5$$

Перепишем изначальное неравенство через a и b :

$$|a+b| \geq |a|+|b|$$

Так как ~~и~~ $|a+b| \geq 0$ и $|a|+|b| \geq 0$ возведем обе части неравенства в квадрат:

$$(|a+b|)^2 \geq (|a|+|b|)^2$$

$$a^2+b^2+2ab \geq a^2+b^2+2|a||b|$$

$$ab \geq |a||b|$$

$$ab \geq |ab|$$

Заметим, что $a+b=\sqrt{x^2-x-2}+5 > 0$, значит хотя бы одно из чисел a и b больше 0, пусть не умаляя общности $a > 0$, тогда $|a|=a$, тогда $ab \geq |a||b|$ равносильно неравенству $ab \geq a|b|$ и так как $a \geq 0$, то можем на него сократить:

$b \geq |b|$, значит $b \geq 0$ (так как при $b < 0$ $|b| = -b$, значит

$b \geq -b$, значит $2b \geq 0$, значит $b \geq 0$, но $b < 0$, противоречие)

Значит в любом случае $a \geq 0$ и $b \geq 0$, значит.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-x \leq 0 \\ 1-x > 0 \\ x^2-x-2 \geq (1-x)^2 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 1 \\ x^2-x-2 \geq x^2+1-2x \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 1 \\ x \geq 3 \\ x \leq 6 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

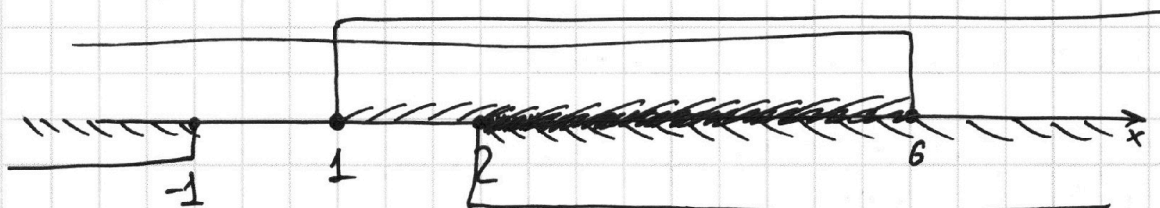
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

так как система $\begin{cases} x < 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$ не имеет решений, то

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

Значит, учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 6 \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty) \end{cases}$$



Значит нам подходят $x \in [2; 6]$.

Ответ: $x \in [2; 6]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Будем считать ромбы по вершине, имеющей наибольшее значение по оси Oy , тогда каждый ромб будет посчитан один раз. Пусть вершины ~~этого ромба~~ ~~с координатами~~

Пусть ромб образован точками с координатами $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); (x_4, y_4)$, где $y = \max\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

$y_3 = \min\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

Будем считать ромбы по вершине, имеющей наибольшую координату по y среди остальных вершин (если таких несколько, то смотрим из них самую левую), тогда все ромбы будут посчитаны 1 раз. (*)

Пусть ромб образован точками $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); (x_4, y_4)$, где (x_1, y_1) - точка по которой мы считаем этот ромб (то есть точка описанная в (*), (x_2, y_2) - * самая правая точка из 4 (если таких несколько, то берем самую верхнюю), (x_3, y_3) - самая нижняя точка из 4 (если таких несколько, то берем самую правую из них), а (x_4, y_4) - самая левая точка из 4 (если таких несколько то берем самую нижнюю из них). Тогда так как длина стороны ромба равна 5, то например $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 25$, где $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$, тогда несложным перебором (перебираем $|x_1 - x_2|$, от 1 до 4) получаем, что либо $|x_1 - x_2| = 3$ либо $|x_1 - x_2| = 4$ либо $|x_1 - x_2| = 0$ $\Rightarrow$ $|x_2 - x_3| =$ либо 3 либо 4 либо 0 аналогично с $|y_2 - y_3|$

Заметим, что согласно выбору ~~индексов~~ индексов: $x_1 < x_2; x_2 > x_3; x_3 < x_4; x_1 > x_4$, тогда пусть $|x_2 - x_1| = a; |x_3 - x_2| = b; |x_4 - x_3| = c; |x_1 - x_4| = d$, тогда $a - b + c - d = 0 \Rightarrow a + d = b + c$ и

$a, b, c, d \in \{0, 3, 4\}$, тогда несложным перебором получаем, что все возможные варианты a, b, c, d это

a	0	0	0	3	4	4	4	5	5	0	0	5	5	3	5	5	4
b	0	0	0	4	4	3	3	0	5	0	5	3	5	3	5	4	5
c	0	3	3	0	3	4	4	5	0	5	0	5	3	5	4	4	5
d	0	3	3	0	4	3	4	0	5	5	3	3	5	5	4	4	5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и $a, b, c, d \in \{0; 3; 4; 5\}$ Тогда так как нельзя выбрать
разделить набор $0, 3, 4, 5$ на 2 группы с равными сум-
мами, то $\{a, d\}$ и $\{b, c\}$ в каком-то порядке совпадают,
значит вариантов выбрать a, b, c, d это $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$, но
вариант $0, 0, 0, 0$ не возможен, значит всего вариантов 31.
Заметим, что по значениям $x_2 - x_1; x_3 - x_2; x_4 - x_3; x_1 - x_4$
однозначно (т.к. мы в специальном порядке ввели
индексы) восстанавливаются значения $y_2 - y_1; y_3 - y_2; y_4 - y_3;$
 $y_1 - y_4$; значит для a, b, c, d и (x_i, y_i) однозначно вос-
станавливаются ромбы.

Заметим, что, если $x_1 \in [5; 36]$ и $y_1 \in [10; 45]$, то
все эти 31 вариант подходит тогда уже насчитали
 $31 \cdot 32 \cdot 36$ ромбов.

~~Если $x_1 \in [5; 36]$ и $y_1 \in [10; 45]$~~
* а остальные вершины записывает в порядке обхода
по часовой стрелке!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -88 = 23 \cdot 2^{x-1} \\ y = -43 \end{cases} \text{ противоречие так как } 23 \cdot 2^{x-1} > 0.$$

Так же, заметим, что $23 \cdot 2^x > 0 \Rightarrow (y-45)(y+45) > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ либо $y-45$ и $y+45$ ^{больше} > 0 либо $y-45$ и $y+45$ меньше нуля.

Тогда рассмотрим случаи в (1.1); (1.2); (2.1); (2.2), где
и $(y-45)$ и $(y+45)$ меньше нуля:

$$(1.1) \begin{cases} y-45 = -2 \\ y+45 = -23 \cdot 2^{x-1} \end{cases} \begin{cases} y = 43 \\ 86 = -23 \cdot 2^{x-1} \end{cases} \text{ противоречие так как } 23 \cdot 2^{x-1} > 0$$

$$(1.2) \begin{cases} y-45 = -46 \\ y+45 = -2^{x-1} \end{cases} \begin{cases} y = -1 \\ 44 = -2^{x-1} \end{cases} \text{ противоречие так как } 2^{x-1} > 0$$

$$(2.1) \begin{cases} y+45 = -46 \\ y-45 = -2^{x-1} \end{cases} \begin{cases} y = -91 \\ -91-45 = -2^{x-1} \end{cases} \begin{cases} y = -91 \\ 136 = 2^{x-1} \end{cases}$$

но $136 : 17$, а $2^{x-1} : 17 \Rightarrow$ противоречие

$$(2.2) \begin{cases} y-45 = -23 \cdot 2^{x-1} \\ y+45 = -2 \end{cases} \begin{cases} y-45 = -23 \cdot 2^{x-1} \\ y = -47 \end{cases} \begin{cases} -92 = -23 \cdot 2^{x-1} \\ y = -47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^2 \cdot 23 = 23 \cdot 2^{x-1} \\ y = -47 \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = -47 \end{cases}$$

Так же если $x < 0$, то $23 \cdot 2^x + 2025 = \text{нечисло} \notin \mathbb{Z}$ так как $23 \nmid 2$

Ответ: $(3; 47); (3; -47)$



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $2025 = 45^2$ и ~~и $23 \nmid 45$~~ ~~поэтому~~

$23 \cdot 2^x = y^2 - 45^2$

$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$

Так как 23 простое, то либо $y-45 \equiv 23$ либо $y+45 \equiv 23$

Заметим, что $\text{НОД}(y-45; y+45) = \text{НОД}(2y; y+45)$

№5

$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$, заметим, что y - нечетный при $x \geq 1$, если $x=0$, то $23 \cdot 2^0 + 2025 = 2048 = 2^{11} \neq y^2$

$$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

Заметим, что $\text{НОД}(y-45; y+45) = \text{НОД}(2y; y+45)$, где так как y нечетное, то $2y \nmid 4$, значит $\text{НОД}(y-45; y+45) \nmid 4$, значит, так как y - нечетное, то $y-45$ и $y+45$ - четное, значит есть 2 случая: ① $y-45 \equiv 2$, но $y-45 \nmid 4$ и $y+45 \equiv 2^{x-1}$, но $y+45 \nmid 2^x$

Заметим, что так как 23 простое, то либо $(y-45) \equiv 23$ либо $y+45 \equiv 23$: ①.1 $y+45 \equiv 23$, значит так как $23 \cdot 2^x$ не делится ни на какое простое число кроме 2 и 23, то

$$\begin{cases} y-45=2 \\ y+45=23 \cdot 2^{x-1} \end{cases} \begin{cases} y=47 \\ 47+45=23 \cdot 2^{x-1} \end{cases} \begin{cases} y=47 \\ 92=23 \cdot 2^{x-1} \end{cases} \begin{cases} y=47 \\ 2^2 \cdot 23=2^{x-1} \end{cases}$$

Значит $y=47$, а $x=3$

①.2 $y-45 \equiv 23$, значит так как $23 \cdot 2^x$ не делится ни на какое простое число кроме 2 и 23, то

$$\begin{cases} y-45=2023 \\ y+45=2^{x-1} \end{cases} \begin{cases} y=46+45 \\ y=2^{x-1}-45 \end{cases} \begin{cases} y=91 \\ 91+45=2^{x-1} \end{cases} \begin{cases} y=91 \\ 136=2^{x-1} \end{cases}$$

но $136 \nmid 17$, значит противоречие.

② $y+45 \equiv 2$, но $y+45 \nmid 4$ и $y-45 \equiv 2^{x-1}$, но $y-45 \nmid 2^x$

Аналогично ① есть 2 случая:

① $y+45 \equiv 23$, значит так как $23 \cdot 2^x$ не делится ни на какое простое число кроме 2 и 23, то

$$\begin{cases} y+45=46 \\ y-45=2^{x-1} \end{cases} \begin{cases} y=1 \\ -44=2^{x-1} \end{cases} \text{Противоречие так как } 2^{x-1} > 0$$

② $y-45 \equiv 23$, значит так как $23 \cdot 2^x$ не делится ни на какое простое число кроме 2 и 23, то

$$\begin{cases} y-45=23 \cdot 2^{x-1} \\ y+45=2 \end{cases} \begin{cases} y-45=23 \cdot 2^{x-1} \\ y=-43 \end{cases} \text{Противоречие}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$x^2 + y^2 = a^2$ — окружность с центром в $(0; 0)$ и радиусом $|a|$, тогда для любой точки этой окружности $y \in [-|a|; |a|]$ причем для любого $\sigma \in [-|a|; |a|]$ существует точка с $y = \sigma$

Наибольшее значение выражение $y^2 - 4y - a$ равно 6, значит для любого $y \in [-|a|; |a|]$: $y^2 - 4y - a \leq 6$ и существует $t \in [-|a|; |a|]$, что $t^2 - 4t - a = 6$.

Решим $y^2 - 4y - a \leq 6$ относительно y :

$$y^2 - 4y - (a+6) \leq 0$$

① Если дискриминант < 0 , то нет решений, т.к. это парабола ветвями вверх, нам это не подходит $\Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow 16 + 4(a+6) \geq 0 \Rightarrow 16 + 24 + 4a \geq 0 \Rightarrow a \geq -10$.

② при $D = 0$ одно решение, что нам не подходит $\Rightarrow D \neq 0 \Rightarrow a \neq -10$

③ при $D \geq 0$: ~~$y \in [2 - \sqrt{a+10}; 2 + \sqrt{a+10}]$~~

$y \in [2 - \sqrt{a+10}; 2 + \sqrt{a+10}]$, то есть при таких y

неравенство $y^2 - 4y - a \leq 6$ верно, значит так как корни уравнения $y^2 - 4y - a = 6$ это $2 \pm \sqrt{a+10}$, то

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{a+10} \leq -|a| \\ 2 + \sqrt{a+10} = |a| \end{cases} \quad \begin{cases} 2 + |a| \leq \sqrt{a+10} \\ \sqrt{a+10} = |a| - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 - |a| \leq |a| - 2 \\ \sqrt{a+10} = |a| - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + a + 10 + 4\sqrt{a+10} \leq a^2 \\ \sqrt{a+10} = |a| - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leq -2 \text{ (н)} \\ \sqrt{a+10} \leq |a| - 2 \end{cases}$$

в этом случае нет решений

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{a+10} = -|a| \\ 2 + \sqrt{a+10} \leq |a| \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{a+10} = 2 + |a| \\ 2 + \sqrt{a+10} \leq |a| \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{a+10} \geq -|a| \\ 2 + \sqrt{a+10} = |a| \end{cases} \quad (1)$$

Решим (1): $\sqrt{a+10} = |a| - 2$

$$a+10 = a^2 - 4|a| + 4$$

$$a+6 = a^2 - 4|a|$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ a+6 = a^2+4a \\ a < 0 \\ a+6 = a^2+4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ a^2-5a-6 = 0 \\ a < 0 \\ a^2+3a-6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ a = -1 \\ a = 6 \\ a < 0 \\ a = \frac{-3 \pm \sqrt{31}}{2} \end{cases}$$

в том случае $a = -6$ и

$$a = \frac{-3 - \sqrt{31}}{2} \quad \left(\frac{-3 + \sqrt{31}}{2} \text{ не}$$

подходит т.к оно больше 0)

и неравенство выполняется при любом a *

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} 2 - \sqrt{a+10} = -|a| \\ 2 + \sqrt{a+10} \leq |a| \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sqrt{a+10} - 2|a| \\ 2 + \sqrt{a+10} \leq |a| \end{cases} \quad 4 \leq 0 (1)$$

в том случае нет
 решений

$$* \quad \cancel{2 - \sqrt{a+10}}$$

* подставляем под $2 + \sqrt{a+10} = |a|$, т.к.

$$+ \begin{cases} 2 - \sqrt{a+10} \geq -|a| \\ 2 + \sqrt{a+10} \geq |a| \end{cases}$$

$4 \geq 0$, что верно

Ответ: $a = -6$ и $a = \frac{-3 - \sqrt{31}}{2}$



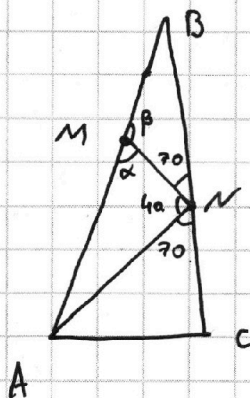
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№7.

$$1) \angle MNA = 180 - \angle BNM - \angle ANC = 180 - 140 = 40.$$

2) по т. синусов $\triangle AMN$:

$$\frac{\sin \angle}{\sin 40} = \frac{AN}{AM} \quad (1)$$

3) по т. синусов $\triangle BMN$:

$$\frac{\sin 70}{\sin \beta} = \frac{BM}{BN} \quad (2)$$

4) т.к α и β — смежные углы, то $\alpha + \beta = 180 \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$

$$5) (1) \cdot (2): \frac{\sin \angle}{\sin 40} \cdot \frac{\sin 70}{\sin \beta} = \frac{AN}{AM} \cdot \frac{BM}{BN}$$

$$\frac{\sin 70}{\sin 40} = \frac{AN \cdot BM}{AM \cdot BN}$$

По условию: $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$, значит

$$\frac{\sin 70}{\sin 40} = \frac{AN \cdot BM}{2BM \cdot NC}$$

$$\frac{\sin(90-20)}{\sin(2 \cdot 20)} = \frac{AN}{2NC} \Rightarrow \frac{\cos 20}{2 \sin 20 \cdot \cos 20} = \frac{NA}{2NC} \Rightarrow \frac{NC}{NA} = \sin 20.$$

6) По т. синусов $\triangle ANC$: $\frac{\sin \angle NAC}{\sin \angle NCA} = \frac{NC}{NA}$

Обозначим $\angle NCA$ за x , тогда т.к $\angle NAC + \angle NCA + \angle ANC = 180^\circ$, то

$$\angle NAC = 110 - x$$

$$\text{Значит } \sin 20 = \frac{NC}{NA} = \frac{\sin(110-x)}{\sin x}$$

$$\begin{aligned} \sin(110-x) &= \sin 110 \cos x - \cos 110 \sin x = \sin(90+20) \cos x - \cos(90+20) \sin x = \\ &= (\sin 90 \cos 20 + \cos 90 \sin 20) \cos x - (\cos 90 \cos 20 - \sin 90 \sin 20) \sin x = \\ &= \cos 20 \cos x + \sin 20 \sin x \end{aligned}$$

Значит

$$\sin 20 = \frac{\cos 20 \cos x + \sin 20 \sin x}{\sin x}$$

Значит

$$\sin 20 = \frac{\cos 20 \cos x}{\sin x} + \sin 20 \Rightarrow \frac{\cos 20 \cdot \cos x}{\sin x} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т.к $\cos 20 \neq 0$, то $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$ значит, так как $x < 180^\circ$, то $x = 90^\circ$, значит $\angle CAN = 110 - 90 = 20^\circ$

Ответ: 20°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

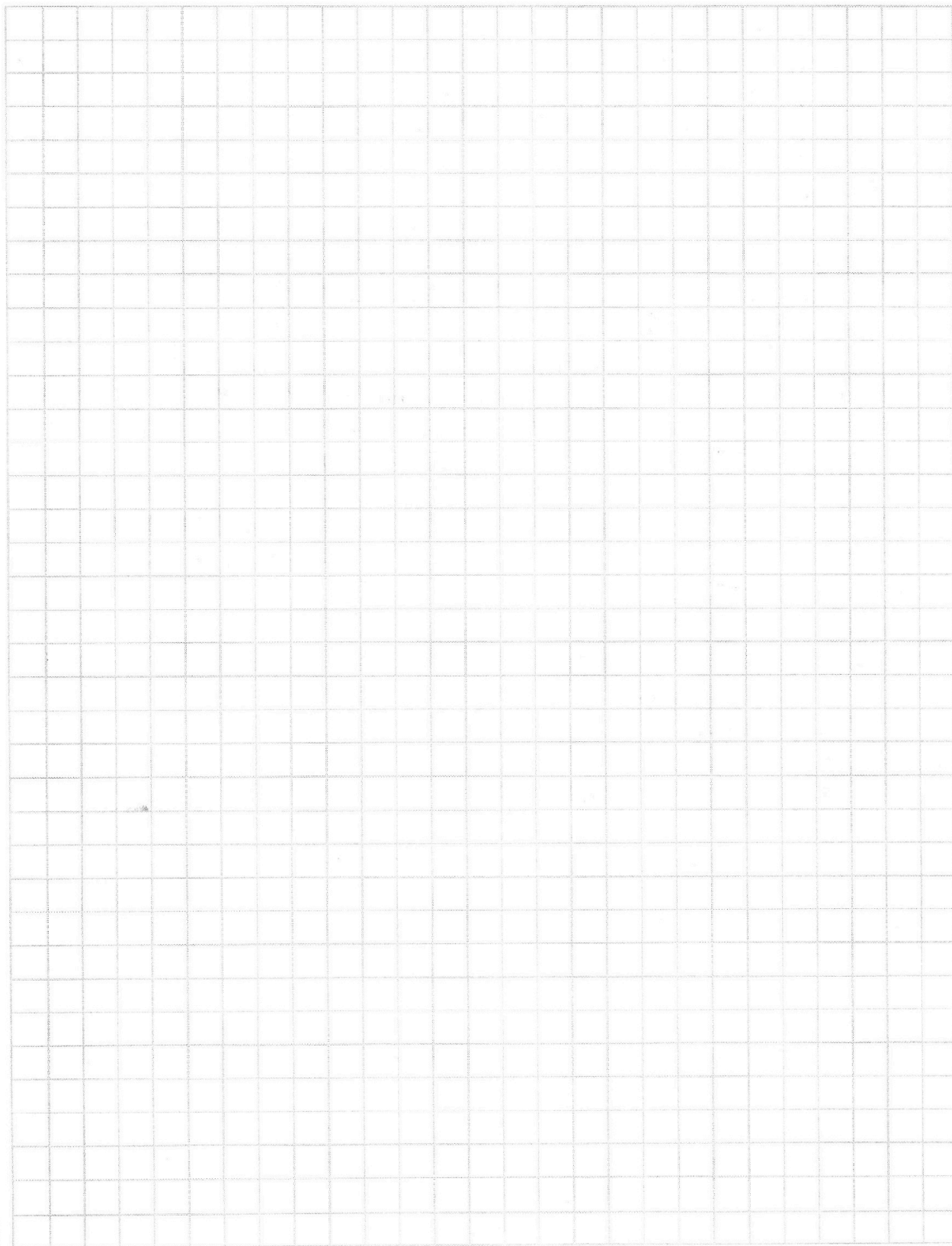
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



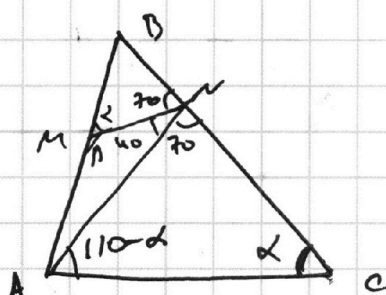


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{NC} = 2 \frac{BM}{MA}$$

$$\frac{BN \cdot AM}{BM} = 2NC$$

$$\frac{40}{70} = \frac{BM}{AM}$$

$$\frac{40}{70} = \frac{BM}{AM}$$

$$\frac{40}{70} = \frac{BM}{AM} \cdot \frac{AM}{AN}$$

$$\frac{40}{70} = 2 \frac{NC}{AN}$$

$$\frac{2 \sin 20 \cos 20}{\cos 20} = 2 \frac{NC}{AN}$$

$$NC = \sin 20 AN$$

$$\frac{NC}{AN} = \frac{\sin 110 - 1}{\sin 20} = \sin 20$$

$$\sin(110 - 2) = \sin 20 \cdot \sin 2$$

$$\sin 2 \cdot \sin 110 - \sin 110 \cos 2 = \sin 20 \sin 2$$

$$\cos 110 - \sin 110 \cdot \operatorname{ctg} 2 = \sin 20$$

$$\cos(90 + 20) = \cos 90 \cdot \cos 20 = \sin 90 \sin 20 = -\sin 20$$

$$\cos 2 \alpha =$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2 \alpha$$

—

$$-\sin 110 \cos 2 = 2 \sin 20 \sin 2$$

$$\sin(90 + 20) = \sin 90 \cos 20 = \cos 90 \sin 20 = 0$$

$$-\cos 20 \cos 2 = 2 \sin 20 \sin 2$$

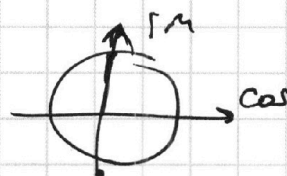
$$-(\sin 20 + \cos 20 \operatorname{ctg} 2) = \sin 2$$

$$-(\sin 20 + \cos 20 \operatorname{ctg} 2) = \sin 2$$

$$\operatorname{ctg} 2 = \frac{2 \sin 20}{\cos 20}$$

$$\operatorname{ctg} 2 = 2 \operatorname{ctg} 20$$

$$\operatorname{ctg} 2 = \frac{1}{2 \operatorname{ctg} 20}$$



$$\frac{\sin 20}{\sin 40} = \frac{\sin 20}{2 \sin 20 \cos 20} = \frac{1}{2 \cos 20}$$

$$\alpha = 90$$

$$\alpha = \frac{\cos 20}{4 \sin 20}$$

$$\frac{\sin 2}{\sqrt{1 - \sin^2 2}} = \frac{\cos 20}{2 \sin 20}$$

$$\frac{\sin^2 2 + 1}{1 - \sin^2 2} = a$$

$$t^2 = a - at^2$$

$$t^2 = \frac{a}{a+1}$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{a+1}}$$

$$a = a+1$$

$$\cos^2 20 = \cos^2 20 + 1$$

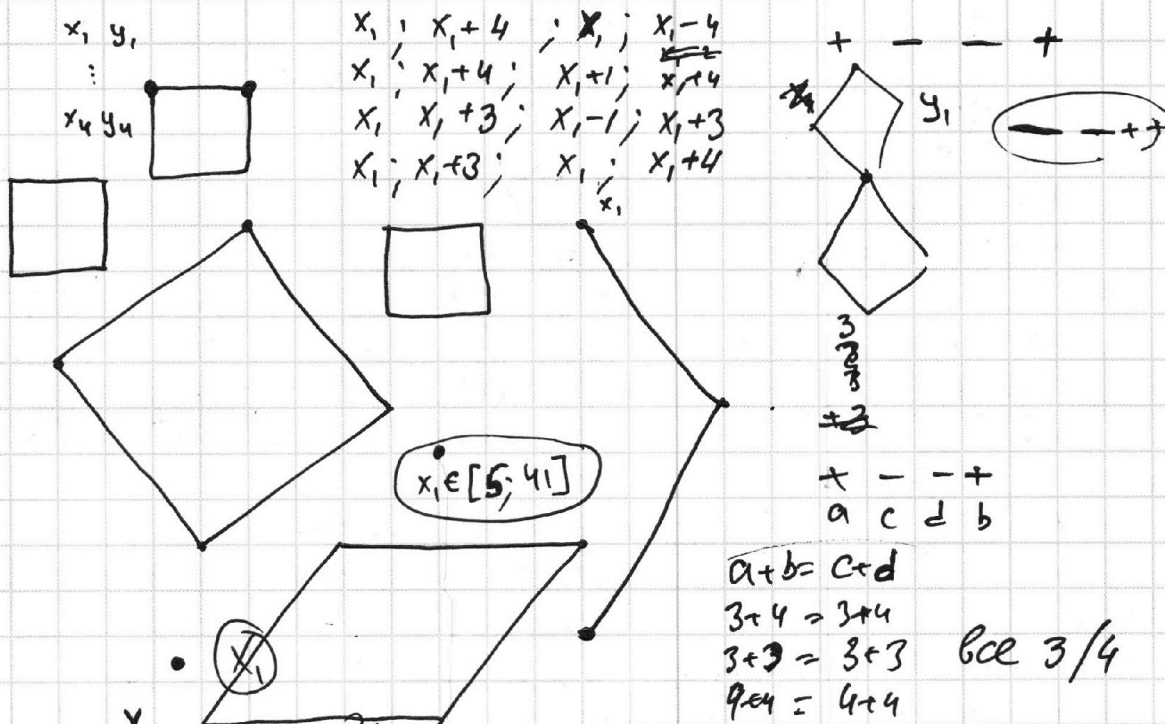


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$
$$2^{2^{x+1}} - 2025(2^{x+1}) = y^2$$

x -нечетное; $x = 2k+1$

$$2^{2^{k+6}} - y^2 = 2025 \cdot 45^2(2^{k+1})$$

$$(2^{k+6} - y)(2^{k+6} + y) = 45^2(2^{k+1})$$

$$23 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{11} = y^2$$

$$23(2^x - 1) \cdot 2^{11} = y^2$$

mod 16

$$23 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$y-45 \mid 23$$

$$23 \cdot 2^x + 23 \cdot 2^{11} = 23 \cdot 2^{x+1} = y^2$$

$$\begin{cases} y-45 \mid 46 \\ y+45 \mid 2^{x-1} \end{cases} \begin{cases} y-45 \mid 4 \\ y+45 \mid 2^{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-45 \mid 4 \\ y+45 \mid 8 \end{cases}$$

$$y+45 = 8k$$

$8k - 90 \mid 4$

$$23 \cdot 2^x + 2^{11} = y^2$$

$$23 \cdot 2^x + 2^{10} = (y-2^5)(y+2^5)$$

$$\begin{array}{r} 2025 \mid 16 \\ 16 \mid 126 \\ \hline 42 \\ -32 \\ \hline 105 \\ 96 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \mid 32 \\ 192 \mid 63 \\ \hline 105 \\ 96 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 176 \mid 8 \\ 16 \mid 17 \\ \hline 96 \\ 86 \\ \hline 10 \\ 136 \\ \hline 136 \end{array}$$

$$\begin{cases} y-45 \mid 46 \\ y+45 \mid 2^{x-1} \end{cases}$$

$$v_2(y-45) = v_2(y+45)$$

$$v_2(y-45+y+45) = v_2(2y) = 1$$

$$y = 47$$

$$y = 45 + 2^k$$

$$y+45 = 90 \cdot 2^k$$

$$\begin{array}{r} 136 \mid 17 \\ 7 \mid 1 \\ \hline 66 \\ 17.8 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a=5$

(a,b)
 (b,c)

$y^2 - 4y - a = 6$
 $y^2 - 4y - (a+6) = 0$
 $y^2 - 4y - a \leq 6$
 $y^2 - 4y - (a+6) \leq 0$
 $y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + a + 6}}{2} = 2 \pm \sqrt{a+10}$
 $y \in [2 - \sqrt{a+10}, 2 + \sqrt{a+10}]$
 $25 = x^2 + y^2$

$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 = 25$
 $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 = 25$
 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 25$
 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2$

$x_1 - x_2 = 3$
 $y_1 - y_2 = 4$
 $x \geq 3$

$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$
или $x \geq 2$
 $23 \cdot 2^x \equiv 0 \pmod{4}$
 $2025 \equiv 1 \pmod{4}$

$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$

$y^2 - 4y - a = 6$
 $y^2 - 4y - (a+6) = 0$
 $y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + a + 6}}{2} = 2 \pm \sqrt{a+10}$

$y \in [2 - \sqrt{a+10}, 2 + \sqrt{a+10}]$
 $a \leq 2 + \sqrt{a+10}$

$5 \geq 1 + 4$
 $x=3$
 $2 \cdot 5$
 $2 + 2 + (6-3)^2$

$\sqrt{25} + 5 \geq$
 $7 \geq 3 + 2 + 3$

(x_1, y_1)
 (x_2, y_2)
 (x_3, y_3)
 (x_4, y_4)

$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 = 25$
 $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 = 25$
 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 25$
 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2$

$2025 \mid 16$
 $76 \mid 42$
 $42 \mid 105$
 $105 \mid 96$
 $96 \mid 1496$

$2025 \mid 16$
 $76 \mid 42$
 $42 \mid 105$
 $105 \mid 96$
 $96 \mid 1496$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

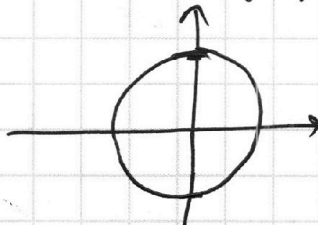
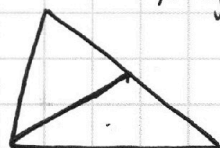
$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$(2^{x+1} - 2025) \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$2^{x+1} - 2025 (2^x - 1) = y^2$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$ma + (y^2 - 4y - a) = 6$$



$$y \in [-a; a]$$

$$y^2 - 4y - a \leq 6$$

$$y^2 - 4y - (a+6) \leq 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4+a+6}}{1} = 2 \pm \sqrt{a+10}$$

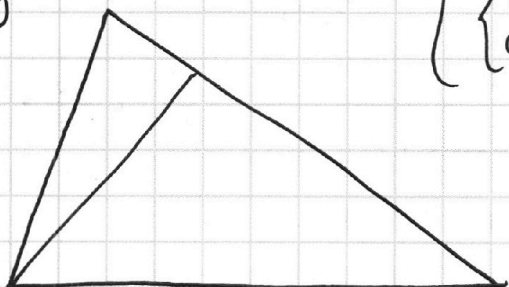
$$y \in [2 - \sqrt{a+10}; 2 + \sqrt{a+10}]$$

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{a+10} \geq -a \\ 2 + \sqrt{a+10} \leq a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a+10} \leq 2+a \\ \sqrt{a+10} \leq a-2 \end{cases}$$

$$a = 10$$

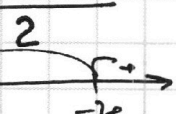
$$\begin{cases} y^2 - 4y - 10 \leq 6 \\ y^2 = 4y \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2+a \geq 0 & a \leq -2 \\ a+10 \leq a^2+4a+4 & \\ a-2 \geq 0 & a \geq 2 \\ a+10 \leq a^2-4a+4 & \end{cases}$$

$$a^2 - 5a - 6 \geq 0$$

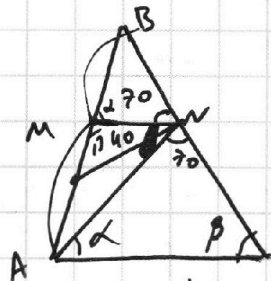
$$-3 \pm \sqrt{9+24}$$



$$AN \cdot MA = 2BM \cdot NE$$

$$\frac{AN}{NC} = 2 \cdot \frac{BM}{MA} \Rightarrow \frac{2}{NC} = \frac{BM}{AN \cdot MA}$$

$$\frac{MB}{MA} =$$



$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{NC}{AN}$$

$$\frac{40}{1} = \frac{AM}{AN}$$

$$\frac{70}{a} = \frac{BM}{BN}$$

$$\frac{BM}{BN} \cdot \frac{AN}{AM} = \frac{1}{40} \cdot \frac{70}{a}$$

$$\frac{2AN}{NC} = \frac{\cos 20^\circ}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что так как по условию абсциссы и ординаты всех вершин ромба - натуральные (целые и) промежутка $[1; 45]$ то так как длина стороны равна 25, то

$$23 - 2^x + 45^2 = 9^2$$

$$23 - 2^x = (y - 45)(y + 45)$$

$$\textcircled{1} \quad y - 45 \equiv 23$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ 23 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$(y - 45; y + 45) =$$

$$= (24; y + 45) \text{ так, согласно } \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} y - 45 \equiv 4 \\ y + 45 \equiv 4 \end{cases}$$

$$y = 4k + 45$$

$$4k + 90 \equiv 4$$

$$y - 45 = 2^x$$

$$y + 45 = 2^{x+1}$$

$$2y = 2(1 + 2^{x-2})$$

$$90 = 2(2^{x-2} - 1)$$

$$45 = 2^{x-2} - 1$$

$$y = 2^{x+1} - 90$$

$$DN \cdot MA = 2 DM \cdot NC$$

$$\frac{DM}{MA} = \frac{DM}{BN} \cdot \frac{AN}{MA} =$$

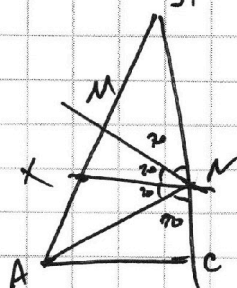
$$\frac{DN}{DM} = \frac{2}{70}$$

$$\frac{40}{DM} = \frac{AM}{AN}$$

$$\Rightarrow \frac{40}{70} = \frac{DN}{BM} \cdot \frac{AM}{AN} = \frac{2 BM \cdot NC}{AN}$$

$$\frac{\sin 40}{\sin 70} = \frac{2 NC}{AN} = 2 \sin 20$$

$$\frac{\sin 40}{\sin 70} = \frac{NC}{AN} = \frac{\sin 20}{\sin 90}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$y-45=2t$$

$$y+45=2^{x-1}-23k$$

$$\cos(90+20) = \sin 20$$

$$\frac{\sin(110-2)}{\sin 2} = \sin 20$$

$$\frac{\sin 110 \cos 2}{\sin 2} + \cos 110 = 2 \sin 20$$

$$\frac{\cos 20 \cdot \cos 2}{\sin 2} = 2 \sin 20$$

$$\frac{\sqrt{1-\sin^2 2}}{\sin 2} = 2 \sin 20$$

$$\cos(90+20) = -$$

$$\frac{\sin(110-2)}{\sin 2} = \sin 20$$

$$\frac{\sin 110 \cos 2 - \cos 110 \sin 2}{\sin 2} = \sin 20$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = (y-45)(y+45)$$

$$\textcircled{y-45 \vdots 23}$$

$$y-45 \vdots 23$$

$$y+1 \vdots 23$$

$$\begin{cases} y-45 \vdots 2 \\ y+45 \vdots 2k-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-45 \vdots 2 \\ y+45 \vdots 2k-1 \end{cases}$$

$$y = 23k - 1$$

$$\begin{cases} y-45 \vdots 2 \\ y+45 \vdots 2k-1 \end{cases}$$

$$y = 2t + 45 = 46k + 45$$

$$y+45 = 46k + 90$$

$$23k-1 = 2t+45$$

$$23k-2t = 46$$

$$2t \vdots 23 \Rightarrow t = 23r$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$x =$$

$$46^2 - 45^2 = 91$$

$$y^2 - 45^2 \vdots 23, 2$$

