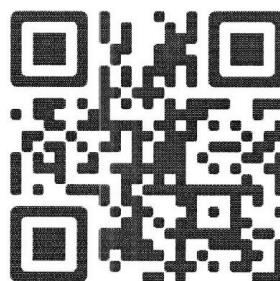


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральным n число $(n - 1)! + n! + (n + 1)!$ делится на 289?

2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geqslant \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.

7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№. $(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! \cdot (n + n(n+1)) = (n-1)! \cdot (n+1)^2 \therefore 289$

$289 = 17^2$, 17 - простое число \Rightarrow разложение на простые множители числа $(n-1)! \cdot (n+1)^2$ должно содержать 17 хотя бы 2 раза.

Если $(n+1)^2 = 17^2$, то $n=16$ (т.к. $n \in \mathbb{N}$)

Если $(n-1)!$ содержит простой множитель 17, то $n \geq 18$, а мы уже убедились, что n может быть равен 16, что меньше 18.

Если $n < 16$, то ни $(n-1)!$, ни $(n+1)^2$ не будут содержать 17 ни одного раза, т.е. $n=16$ наименьшее.

Ответ: $n=16$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$(x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 - 28 = N^5, \quad N > 8.$$

$x-3, x-2, \dots x+3$ – семь последовательных натур. чисел, т.е. $\begin{cases} x \geq 4, \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$

При раскрытии скобок удвоенные произведения взаимодействуют

$$\text{с}, \text{ остается } 7x^2 + 28 - 28 = N^5$$

$$7x^2 = N^5 \Rightarrow N: 7 \Rightarrow \text{т.к. } N \text{ – натуральное, то } \\ 7 \mid N \Rightarrow 7 \mid x$$

Наименьшее возможное $N = 7^4$, но по условию $N > 8$, т.е. 7-ке подходит. Если $N = 14$, то $x^2 = 7^4 \cdot 2^5 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$

Получаем, что в разложении на простые множители числа N должна входить 7 и ещё одно число в чётной степени, большее 1.

$$\text{т.к. требуют найти наименьшее } N, \text{ то } N = 7^1 \cdot 2^2 = 28$$

Ответ. $N = 28$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\underline{N3.} \quad |\sqrt{x^2-x-2} + 5| \geq |\sqrt{x^2-x-2} + x-1| + |6-x|$$

$$ODZ: \quad x^2-x-2 \geq 0; \quad x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

Рассмотрим $\sqrt{x^2-x-2} = t$, $t \geq 0$, $x-1=a$, тогда $6-x=-a+5$

$$|t+5| - |t+a| - |-a+5| \geq 0$$

Заметим, что $t+5-t-a+a-5=0$

$$|t+5| = t+5, \text{ т.к. } t \geq 0.$$

$$t+5 - |t+a| - |-a+5| \geq t+5 - (t+a) - (-a+5)$$

$$|t+a| + |-a+5| \leq (t+a) + (-a+5)$$

$$\text{Рассмотрим пример: } |a| + |b| \leq a+b$$

Если хотят быть одни из чисел a и b отрицательны, то неравенство ~~также~~ не будет верно, т.к. ~~справа~~ сумма будет состоять из абсолютных значений a и b , а ~~справа~~ сумма будет меньше этого. Значит, неравенство верно только при $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$, тогда левая

и правая часть будут равны $\Rightarrow \begin{cases} t+a \geq 0 \\ -a+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-x-2} + x-1 \geq 0 \\ 1-x+5 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$

~~Делаем разные случаи~~

$$\text{Из (1): } x \leq 6 \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; 6]$$

При всех $x \in [2; 6] \quad \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$ — верно, ~~поскольку~~ ~~левая~~ ~~часть~~ ≥ 0 , ~~правая~~

При всех $x \in (-\infty; -1) \quad 1-x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$ ~~поскольку~~ $\sqrt{x^2-x-2} > 0$ и $1-x < 0$.
 $x^2-x-2 > -2x+1; \quad x \geq 3 \Rightarrow$ при $x \in (-\infty; -1)$ нет решений.

Ответ: $x \in [2; 6]$.

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2-x-2} \geq x^2-2x+1 \\ &x^2-x-2 \geq 0 - \text{члены} \\ &1-x \geq 0 - \text{члены} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



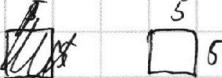
- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

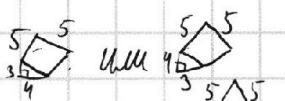
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№4. Рассмотрим все фигуры, удовлетворяющие условию:

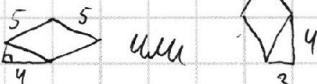
1) квадрат 5×5 со сторонами, параллельными осям.



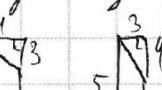
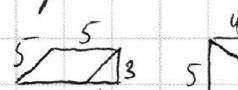
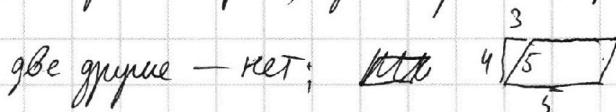
2) квадрат 5×5 со сторонами, не-паралл. осям.



3) ромб, все стороны которого не паралл. осям.



4) параллелограмм, где стороны которого параллельны **одной** из осей, а две другие — нет.



1) 1 вариант; 2) 2 варианта 3) 2 варианта

4) 4 варианта, а также их "отзеркаленные" версии.

Всего можно выбрать фигуры можно из квадрата 44×44 .

Выбираем проекцию на Ох или на Оу стороны, тогда квадрат определяется однозначно. Из отрезка длиной 44 есть $44 - n$ способа выбрать отрезок длины n , $44 - n + 1$ способов выбрать отрезок длины n .

1) $40 \cdot 40 = 1600$ способов. 2) оба варианта такого квадрата занимают площадь 7×7 клеток. $2 \cdot 38 \cdot 38 = 2888$ способов

3) оба варианта такого ромба занимают площадь 8×6 клеток.

$$2 \cdot 37 \cdot 39 = 2888 \text{ способов}$$

4) первые 2 вар. такого параллелограмма занимают площадь 8×4 клетки и выбираются $4 \cdot 37 \cdot 41 = 4(39^2 - 4) = 4 \cdot 1520 = 6080$ способами с учётом "отзеркаленных".

$$2961 \cdot 4 = 11844$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 (продолжение).

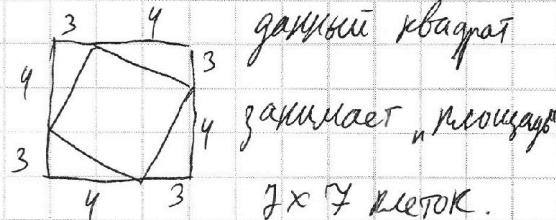
Еще 2 вар. Такого параллелограмма ~~выбирают~~ заимствуют площадь 9×3 км. и вычисляют $4 \cdot 36 \cdot 42 = 4(39^2 - 9) = 4 \cdot 2956 = 11824$ способами с учётом „отзеркаленных“.

Всего способов: $1600 + 2888 + 2886 + 11844 + 11824 = 23668 + 5774 + 1600 = 31042$

Ответ: 31042.

* Примечание: площадью называются не площадь квадрата / ромба / параллелограмма, а четырёхугольник со сторонами, параллельными осям, который нужно выделить, чтобы вписать в него движущую фигуру.

Пример.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2 ; x, y \in \mathbb{Z}$$

т.к. $y \in \mathbb{Z}$, целая часть членов $\Rightarrow x \geq 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Если } x=0, \text{ то } y^2=2048 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq 0 \\ \Rightarrow x \geq 0, y \neq 0 \end{array} \right\}$$

целая часть равнозначна $\Rightarrow y \neq 0$

$$2025 \bmod 23 = 1 \Rightarrow 23(2^x + 88) + 1 = y^2$$

$$1) 23(2^x + 88) = (y-1)(y+1), 2^x + 88 \neq 21, 2^x + 88 \neq 25$$

$$2) 23 \cdot 46 / (2^{x-1} + 44) = (y-1)(y+1), 2^{x-1} + 44 \neq 44$$

$$3) 92(2^{x-2} + 22) = (y-1)(y+1) \quad 2^{x-1} + 44 = 96 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 4 \Leftrightarrow x=3, \\ 2^{x-2} + 22 = \frac{90}{2} \Leftrightarrow 2^{x-2} = 68; \text{ решений нет.}$$

$$2^{x-2} + 22 = 94 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 72; \text{ решений нет.}$$

$$4) 184(2^{x-3} + 11) = (y-1)(y+1)$$

$$2^{x-3} + 11 = 186; 2^{x-3} = 175; \text{ решений нет.}$$

$$2^{x-3} + 11 = 182; 2^{x-3} = 171; \text{ решений нет.}$$

Нужно уметь представить $23(2^x + 88)$, значит, решение
рассматриваемое нет.

Ответ:

$$5) 2 \cdot 23(2^{x-1} + 44) = (y-1)(y+1), \text{ решений нет}$$

$$6) 4 \cdot 23(2^{x-2} + 22) = (y-1)(y+1), \text{ решений нет}$$

$$7) 8 \cdot 23(2^{x-3} + 11) = (y-1)(y+1), \text{ решений нет}$$

$$8) 1 \cdot 23(2^x + 88) = (y-1)(y+1), \text{ решений нет.}$$

Ответ: (3; 44).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

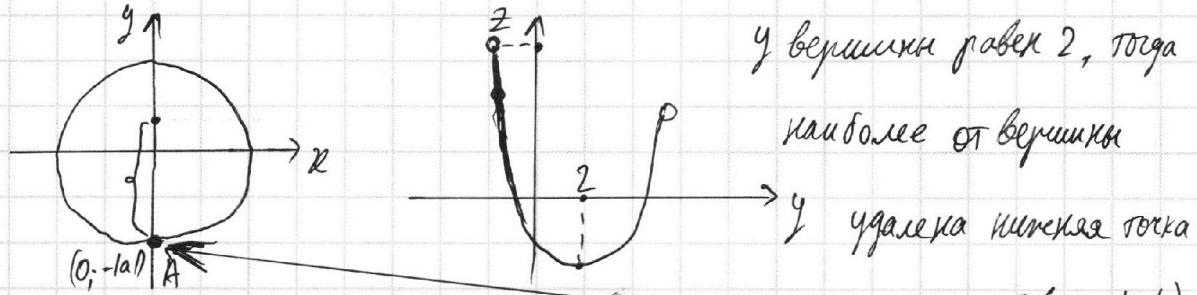
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 = a^2$ - уравнение окружности с центром $(0,0)$ и радиусом $|a|$.

$y = u^2 - 4u - a$ - график эллипса парабола с ветвями вверх, поэтому
наибольшее значение достигается в точке, наиболее сильно удалённой
право или слева от вершины ~~окружности~~ параболы.



$y_A = -|a| \Rightarrow$ при $y = -|a|$ достигается наибольшее значение выражения
 $y^2 - 4y - a$. Получаем, что $f(|a|)^2 - 4 \cdot (-|a|) - a = 6$

$$a^2 + 4|a| - a = 6.$$

При $a > 0$: $a^2 + 3a - 6 = 0$; $\begin{cases} a_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} > 0 - \text{подходит} \\ a_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} < 0 - \text{не подходит} \end{cases}$

При $a < 0$: $a^2 - 5a - 6 = 0$; $\begin{cases} a_1 = \frac{5 + 7}{2} = 6 > 0 - \text{не подходит} \\ a_2 = \frac{5 - 7}{2} = -1 < 0 - \text{подходит} \end{cases}$

Ответ: $a = -1; a = \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$.



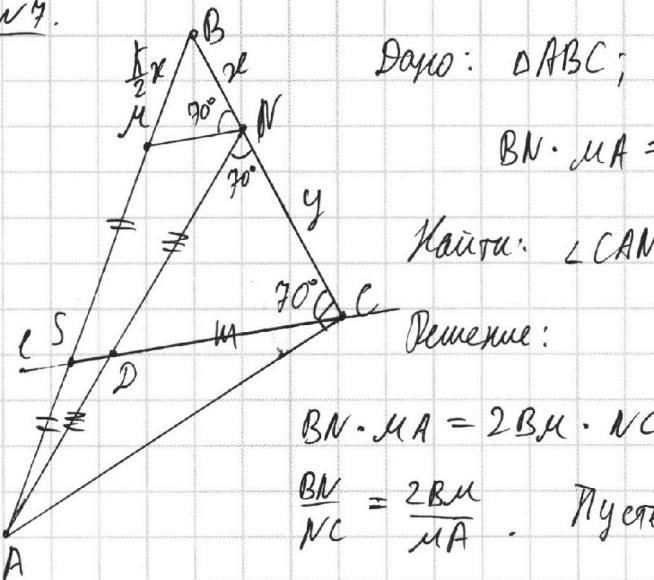
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7.



Дано: $\triangle ABC$; $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$;

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$$

Найти: $\angle CAN$.

Решение:

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \quad | : (MA \cdot NC)$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}. \text{ Пусть } BN=x, NC=y, \text{ тогда } 2BM=\frac{1}{2}x,$$

$$MA=ky, \text{ т.е. } BM=\frac{1}{2}y$$

Через точку С проведем прямую ℓ , параллельную MN . Получим $\ell \cap AB=S$, $\ell \cap AN=D$.

По теореме о пропорциональных отрезках, $\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{MS} \cdot \frac{BN}{NC} = \frac{x}{y}$,

поскольку т.к. $BM=\frac{1}{2}x$, то $MS=\frac{1}{2}y \Rightarrow AS=MS=\frac{1}{2}y$.

$AS=SM$ и $CS \parallel MN$, поэтому $AD=DN$ по теореме Фалеса

$\angle BNM = \angle BCD$ (~~соответственные при $MN \parallel SC$ и с.к. BC~~) \Rightarrow

$\Rightarrow \triangle DNC$ - равнобедренный ($DN=DC$) по признаку.

$CD=ND=DA \Rightarrow \triangle ANC$ - прямоугольный ($\angle ANC=90^\circ$) по признаку,

поскольку т.к. $\angle ANC=70^\circ$, то $\angle NAC=90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$

Ответ: $\angle CAN=20^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 + 29442 \\
 1600 \\
 \hline
 31042
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 322 \\
 2956 \\
 4 \\
 \hline
 11824
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11824 \\
 + 23668 \\
 5874 \\
 \hline
 29442
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6 \\
 38 \\
 38 \\
 \hline
 304
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2886 \\
 + 38 \\
 39 \\
 \hline
 2965
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1444 \\
 2 \\
 \hline
 2888
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2965 \\
 2 \\
 \hline
 5930
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5 \\
 \hline
 5
 \end{array}$$

1) ~~89~~ $40 \cdot 40 = 1600$ квадратов 5×5 .

2) 7×7 квадратов: $45 - 7 = 38; 288 \cdot 38 = 2888$

3) 8×6 квадратов: $45 - 8 = 37; 37 \cdot 39 = 38^2 = 1444$

4) стояло же, то оши 6×8 кв. 1444

5) 8×4 кв.; $45 - 8 = 37; 45 - 4 = 41; 2 \cdot 37 \cdot 41 = 2 \cdot 39^2 = 5930$

9×3 кв.; $45 - 9 = 36; 45 - 3 = 42; 2 \cdot 42 \cdot 36 = 39^2 \cdot 2 = 5930$

6) $5930 \cdot 4 =$

$$\begin{array}{r}
 2888 \\
 \hline
 5930
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5776 \\
 + 1600 \\
 \hline
 7376
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 23720 \\
 4376 \\
 \hline
 31096
 \end{array}$$

$1600 + 2888 + 1444 \cdot 2 + 5930 \cdot 4 = 5776 + 1600 + 23720 = 31096$

$37 \cdot 39 = (38 - 1)(38 + 1) = 38^2 - 1$

$$\begin{array}{r}
 2956 \\
 4 \\
 \hline
 629
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6 \\
 39 \\
 37 \\
 \hline
 273
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 32 \\
 2961 \\
 4 \\
 \hline
 1844
 \end{array}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$\begin{array}{r}
 11844 \\
 11829 \\
 \hline
 23668
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 12888 \\
 2886 \\
 \hline
 5774
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 117 \\
 + 14 \\
 \hline
 1443
 \end{array}$$

$36 \cdot 42 = (39 - 3)(39 + 3) = 39^2 - 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$|\sqrt{x^2-x-2} + 5| \geq |\sqrt{x^2-x-2} + x - 1| + |6-x|$$

$$x^2-x-2 \geq 0 \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ -1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ x \end{array} \quad x \in (-\infty; -1] \cup [2, +\infty)$$

$$\sqrt{x^2-x-2} = t; \quad x-1 = a; \quad t \geq 0. \quad t+5 \geq |t+a| - |a+5| \geq 0$$

$$-a = 1-x$$

$$-a+5 = 6-x$$

$$\text{Лев} \quad t+5 \geq |t+a| + |-a+5|$$

$$t+5 \geq |t+a| + |5-a|$$

$$\text{Если } t \geq -a, 5 \geq a; \quad t+5 \geq t+a + 5-a$$

$$t+5 \geq t+5 \quad \text{верху}$$

$$\text{Если } t \geq -a, 5 \geq a; \quad t+5 \geq t+a - 5+a$$

$$a > 5$$

$$10 \geq 2a; \quad a \leq 5 \quad x \leq 6$$

противоречие.

$$\text{Если } t < -a, 5 \geq a: \quad t+5 \geq -t-a + 5-a \quad \begin{array}{l} 5 \geq x-1 + 1 \\ 6 \geq x \\ x \leq 6 \end{array}$$

$$2t \geq -2a; \quad t \geq -a \quad \text{противор.}$$

$$t < -a, 5 \geq a: \quad t+5 \geq -t-a - 5+a \quad |a| + |b| \leq a+b$$

$$t < -a, -5 > -a \quad 2t \geq -10 \quad \text{Если } a \geq 0, b \leq 0.$$

$$t \geq -5$$

$$t < -a < -5$$

$$t < -5$$

$$b > 0, c < 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$$

$$|b| + |c| \geq b+c \quad b > 0, c < 0 \quad 1-x \geq 0; \quad x \leq 1$$

$$b-c \geq b+c \quad -c \geq c \quad -x-2 \geq -2x+1 + 2x$$

$$2c \leq 0$$

$$c \leq 0$$

$$x-2 \geq 1$$

$$x \geq 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! \stackrel{?}{=} 289$$

$n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

$$(n-1)! (n+1 + n(n+1)) = (n-1)! ((n+1)(n+1)) = (n+1)^2 (n-1)! \stackrel{?}{=} 289$$

$$17^2 = 289$$

$$\begin{aligned} & (n-1)! = 1 \\ & (n+1)^2 = 289 \quad n+1 \geq 17 \\ & n=16 \Rightarrow (n+1)^2 = 289 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ -184 \\ \hline 185 \\ -184 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & (n-1)! + (n-1)! \cdot n + (n-1)! \cdot n \cdot (n+1) = (n-1)! (1+n+n(n+1)) = 1 \\ & = (n-1)! \cdot (n+1)^2 \quad (n+1)(n+1) = (n+1)^2 \end{aligned}$$

$$(n+1)^2 = 289; \quad n+1=17; \quad n=16$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ -4 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$\text{N}^2 (x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 - 28 = N^5;$$

$$N \geq 8; \quad \min(N) = ? \quad 23(2^x + 88) + 1 = y^2$$

$$(y-1)(y+1) = 23(2^x + 88) \quad (y-1)(y+1) = 23(2^x + 88)$$

$$x^2 + (8x+9) + x^2 + 4 + x^2 + 1 + x^2 + x^2 + 4 + x^2 + 9 - 28 = N^5$$

$$7x^2 = N^5. \quad 7x^2 > 0, \quad t.k. \quad x \in \mathbb{N} \Rightarrow N \in \mathbb{N}$$

$$N_{\min} = 7$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty). \quad x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \geq 0$$

$$D = 1 + 8 = 9 \quad \text{no roots}$$

$$\text{N}^3. |\sqrt{x^2 - x - 2} + 5| \geq |\sqrt{x^2 - x - 2}| + |x - 1| + |6 - x| \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = t, \quad t \geq 0. \quad x-1=a. \quad 6-x = -(x-6) = -(x-1-5) = -a+5$$

$$|t+5| \geq |t+a| + |-a+5|; \quad |t+5| - |t+a| - |a-5| \geq 0$$

$$|t+5| \geq |t+a| + |a-5| \quad \begin{array}{c} 30 \\ |t+a| - |a-5| \leq 0 \end{array}$$

$$\text{если } t+a \geq 0, \quad a-5 \leq 0, \quad \text{то } t+5 - t-a = a-5 \geq 0$$

$$\text{если } t+a > 0, \quad a-5 > 0, \quad \text{то } t+5 - t-a - a+5 = -2a + 10 \geq 0 \quad |: 2|$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2; \quad x \geq 0, \quad y \neq 0. \quad a-5 \leq 0$$

$$y^2 \bmod 23 = 1$$

$$23k+1 = y^2 \quad 23k = (y-1)(y+1)$$

$$k \geq 0 \quad y \geq 1$$

$$y^2 - 1 \bmod 23$$

$$y^2 = 24, 44, 70, 93, 116, 139, 162$$

$$185, 208, 231, 253, 300;$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



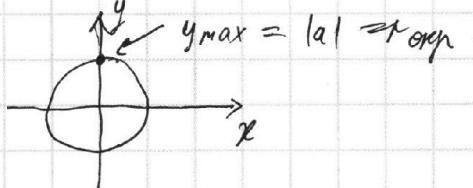
- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad - \text{окр с ц} (0,0) \text{ и радиусом } |a|. \max(y^2 - 4y - a) = 6$$

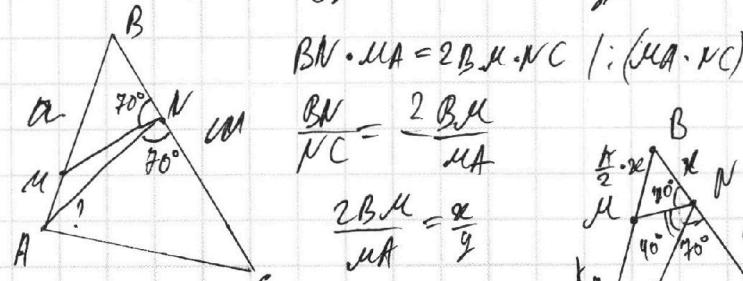
так при наибольшем y .



Ответ:

$$y^2 - 4y - a = 6 \quad \text{наибольшее значение } y \Rightarrow y_{\max} > y_{\text{текущая}}$$

$$\text{Несколько } y = \frac{4}{2} \Rightarrow y_{\max} > y_{\text{текущая}}$$



$$\sqrt{5}. 23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$y, x \in \mathbb{Z}$.

$$y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{неч. } y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \geq 0. \quad \text{Если } x=0, \text{ то } y^2 = 2025 + 23 = 2048 = 2^8 \Rightarrow y \neq 2 \Rightarrow x \neq 0$$

После $x \geq 0 \Rightarrow 2^x$ окажут на 2, 4, 8, 16... $\Rightarrow 23 \cdot 2^x$ окажут на 6, 12, 24, 48.

y^2 окажут на ①, ②, ③, ④

Неч. $y \geq 0 \Rightarrow y \neq 0$. Квадрат окажет на ①, ④, ③, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧

y^2 окажут на 1 или на 9.

\Rightarrow если $y^2 \equiv 1 \pmod{4}$, то $x \pmod{4} \equiv 1$

если $y^2 \equiv 9 \pmod{4}$, то $x \pmod{4} \equiv 3$

если $x=1$, то $y^2 = 2048$

если $x=3$, то

$$1, 24, 44, \\ 23k + 1 = y^2 \\ 23k = (y-1)(y+1)$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ 184 \\ \hline 185 \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ 188 \\ \hline 185 \end{array} \quad D = a^2 + 3a - 6 = 0 \\ D = 9 + 24 = 33$$

$$a^2 - 4|a| - a = 6 \quad \begin{array}{r} 184 \\ 1 \\ \hline 184 \end{array} \quad a_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{Если } a \geq 0: \quad a^2 - 5a - 6 = 0 \quad a^2 - 5a - 6 = 0 \\ D = 25 + 24 = 49 \quad D = 25 + 24 = 49$$

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \text{ } \checkmark \\ a_2 = \frac{5-7}{2} = -1 \end{array}$$

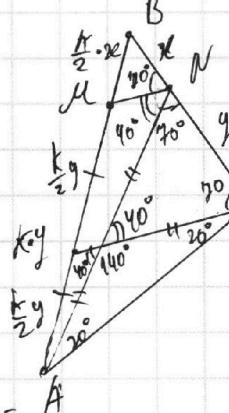
$$a^2 + 3a - 6 = 0 \quad 33 \\ D = 9 + 4 \cdot (-6) = 9 + 24 = 33 \\ x_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} > 0$$

$$a_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} < 0 \quad \checkmark$$

Ответ: $20^\circ, x > 0, y \neq 0$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$(23 \cdot 2^x) \pmod{2} = 0 \\ 2025 \pmod{2} = 1, y^2 \pmod{4} = 1 \\ 23 \cdot 2^x \pmod{23} = 0, 2025 \pmod{23} = 1 \quad 23 = 1$$



$$kx = \frac{\alpha}{2}, ky = \frac{\beta}{2}$$

$$kx + ky = \frac{\alpha + \beta}{2} = 70^\circ$$

$$kx + ky = 70^\circ$$

$$kx + ky = 140^\circ$$

$$kx + ky = 20^\circ$$

$$kx + ky = 10^\circ$$

$$kx + ky = 5^\circ$$

$$kx + ky = 25^\circ$$

$$kx + ky = 35^\circ$$

$$kx + ky = 45^\circ$$

$$kx + ky = 55^\circ$$

$$kx + ky = 65^\circ$$

$$kx + ky = 75^\circ$$

$$kx + ky = 85^\circ$$

$$kx + ky = 95^\circ$$

$$kx + ky = 105^\circ$$

$$kx + ky = 115^\circ$$

$$kx + ky = 125^\circ$$

$$kx + ky = 135^\circ$$

$$kx + ky = 145^\circ$$

$$kx + ky = 155^\circ$$

$$kx + ky = 165^\circ$$

$$kx + ky = 175^\circ$$

$$kx + ky = 185^\circ$$

$$kx + ky = 195^\circ$$

$$kx + ky = 205^\circ$$

$$a^2 - 4|a| - a = 6 \quad \begin{array}{r} 184 \\ 1 \\ \hline 184 \end{array} \quad a_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0 \quad 33 \\ D = 25 + 24 = 49 \quad D = 25 + 24 = 49$$

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \text{ } \checkmark \\ a_2 = \frac{5-7}{2} = -1 \end{array}$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0 \quad 33 \\ D = 9 + 4 \cdot (-6) = 9 + 24 = 33$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} > 0$$

$$a_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} < 0 \quad \checkmark$$

$$a^2 - 4a - 6 = 0 \quad 33 \\ D = 16 + 24 = 40 \quad D = 16 + 24 = 40$$

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{4+6}{2} = 5 \text{ } \checkmark \\ a_2 = \frac{4-6}{2} = -1 \end{array}$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0 \quad 33 \\ D = 25 + 24 = 49 \quad D = 25 + 24 = 49$$

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \text{ } \checkmark \\ a_2 = \frac{5-7}{2} = -1 \end{array}$$

$$a^2 - 6a - 6 = 0 \quad 33 \\ D = 36 + 24 = 60 \quad D = 36 + 24 = 60$$

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{6+8}{2} = 7 \text{ } \checkmark \\ a_2 = \frac{6-8}{2} = -1 \end{array}$$

$$a^2 - 7a - 6 = 0 \quad 33 \\ D = 49 + 24 = 73 \quad D = 49 + 24 = 73$$

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{7+9}{2} = 8 \text{ } \checkmark \\ a_2 = \frac{7-9}{2} = -1 \end{array}$$

$$a^2 - 8a - 6 = 0 \quad 33 \\ D = 64 + 24 = 88 \quad D = 64 + 24 = 88$$

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{8+10}{2} = 9 \text{ } \checkmark \\ a_2 = \frac{8-10}{2} = -1 \end{array}$$

$$a^2 - 9a - 6 = 0 \quad 33 \\ D = 81 + 24 = 105 \quad D = 81 + 24 = 105$$

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{9+11}{2} = 10 \text{ } \checkmark \\ a_2 = \frac{9-11}{2} = -1 \end{array}$$

$$a^2 - 10a - 6 = 0 \quad 33 \\ D = 100 + 24 = 124 \quad D = 100 + 24 = 124$$

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{10+12}{2} = 11 \text{ } \checkmark \\ a_2 = \frac{10-12}{2} = -1 \end{array}$$

$$a^2 - 11a - 6 = 0 \quad 33 \\ D = 121 + 24 = 145 \quad D = 121 + 24 = 145$$

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{11+13}{2} = 12 \text{ } \checkmark \\ a_2 = \frac{11-13}{2} = -1 \end{array}$$

$$a^2 - 12a - 6 = 0 \quad 33 \\ D = 144 + 24 = 168 \quad D = 144 + 24 = 168$$

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{12+14}{2} = 13 \text{ } \checkmark \\ a_2 = \frac{12-14}{2} = -1 \end{array}$$