

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- 1) Заметим, что $361 = 19^2$
- 2)
$$h! + (h+1)! + (h+2)! = h! + (h+1) \cdot h! + (h+2)(h+1)h! =$$
$$= h! (1 + h + 1 + (h+1)(h+2)) = h! (h^2 + 4h + 4) =$$
$$= h! (h+2)^2$$
- 3) min значениеⁿ, при котором $(h+2)^2$ делится на 19 это при $h = 17$ (т.к. 19 - простое, а значит для наименьшего числа, которое делится на 19 это число 19. $h + 17 + 2 = 19 \Rightarrow (h+2)$ при $h = 17$ делится на 19). Также, так $(h+2) : 19$, то $(h+2)^2 : 361 \Rightarrow$ при $h = 17$ $(h+2)^2 : 361 \Rightarrow h! (h+2)^2 : 361 \Rightarrow h! + (h+1)! + (h+2)! : 361$. ~~т~~
- 4) min значение h , при котором $h!$ делится на 19 это при $h = 19$ (т.к. оно ^{наименьшее} простое, а значит для мин. число, делящееся на 19 это 19). Однако $17 < 19$ где, а при $h = 19$ число $h! (h+2)^2 : 361$, т.к. $h! : 361$ т.к. делится 19 так как 1) и $(h+2)^2 : 19 \Rightarrow$ ~~при~~ $h = 17$ - min, при



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

которым $n! + (n+1)! + (n+2)! : 367$

Ответ: 17



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть это 5 кон. чисел - $h-2, h-1, h, h+1, h+2$, тогда:

$$(h-2)^2 + (h-1)^2 + h^2 + (h+1)^2 + (h+2)^2 = h^2 - 4h + 4 + h^2 - 2h + 1 + h^2 + h^2 + 2h + 1 + h^2 + 4h + 4 = 5h^2 + 10.$$

2) Обозначим из числа $5h^2 + 10$ до, получим $5h^2$.

$$\Rightarrow 5h^2 = N^3 > 6$$

Мин возможный N это $N=5$, к.к.

кратное получается, когда $h=5$, рассмотрим что при $h < 5$ куб числа не получится,

$$\text{а при } h=5 : 5 \cdot 5^2 = 5^3 \Rightarrow \text{мин } N=5 \text{ и } 25 > 6$$

Ответ: 5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

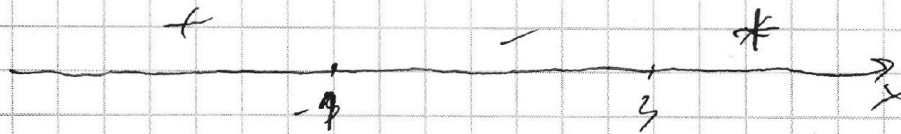
СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Каким какие значения может принимать x :

$$x^2 - 2x - 4 \geq 0$$

$$(x+1)(x-3) \geq 0$$



$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$

2) Каким, при каких значениях x

$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3}| < |2x - 1|$$

$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3}| < |2x - 1|$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 4x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 2x + 4 > 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 4 - 48 = -44 < 0$$

$$\Rightarrow \text{при всех } x \quad |\sqrt{x^2 - 2x - 3}| < |2x - 1|$$

$$\Rightarrow \text{при } 2x - 1 < 0, \text{ то } \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \text{при } x < \frac{1}{2} \quad \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 < 0$$

$$3) \sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 > 0 \Rightarrow \text{в}$$

полюсе этого типа нет смысла



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Рассмотрим $x \in (+\infty; 3,5]$:

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 + 2x-7$$

$$4x-14 \leq 0$$

$$4x \leq 14$$

$$x \leq 3,5$$

$\Rightarrow$ при $x \in (+\infty; 3,5]$ нет решения

5) Рассмотрим $x \in [\overset{3; 3,5}{3}, \overset{3,5}{5}, 3]$:

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 + 7-2x$$

$$6 \geq 6$$

$\Rightarrow$ при $x \in [\overset{3; 3,5}{3}, \overset{3,5}{5}, 3]$ есть решение во всей этой области

6) Рассмотрим $x \leq -1$:

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq -\sqrt{x^2-2x-3} - 2x+1 + 7-2x$$

$$2\sqrt{x^2-2x-3} \geq -4x+2$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} \geq -2x+1$$

при $x \leq -1$ $-2x+1 > 0 \Rightarrow$ при возведении в квадрат знак не меняется в обеих частях неравенства



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

$$D = 4 - 3 \cdot 4 \cdot 4 = -44 < 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 4 > 0$$

Противоречие.

$\Rightarrow$ при $x \in [-1, 1]$ нет решения.

7) Из всего выше перечисленного
следует, что $x \in [3, 3, 5]$

Ответ: $[3, 3, 5]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

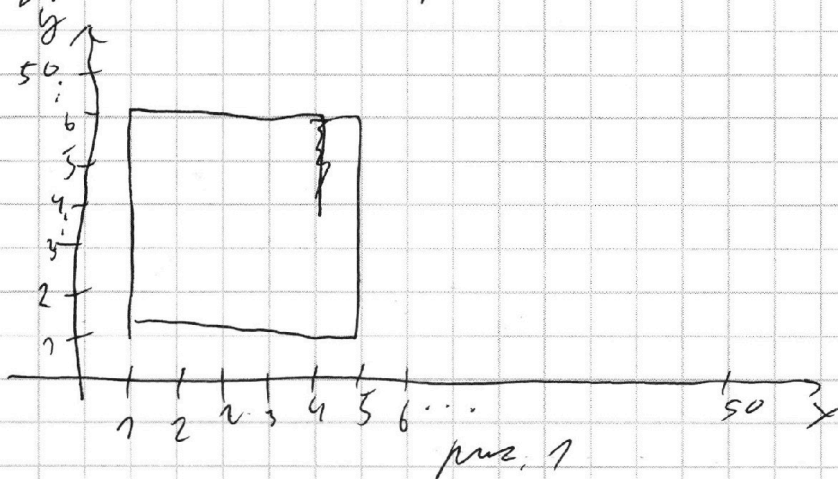
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Рассмотрим, если этот ромб-квадрат со стороной 5:



Теперь давайте рассмотрим сколько есть способов, если все стороны квадрата перпендикулярны осям Ox и Oy . Тогда, на самой нижней линии ($y=1$) можно расположить квадраты: $50 - 5 = 45$ (т.к. левую сторону можно расположить от $x=1$ до $x=50$). И то от Oy можно расположить тоже 45 квадратов $\Rightarrow$ всего $45 \cdot 45 = 2025$ квадратов



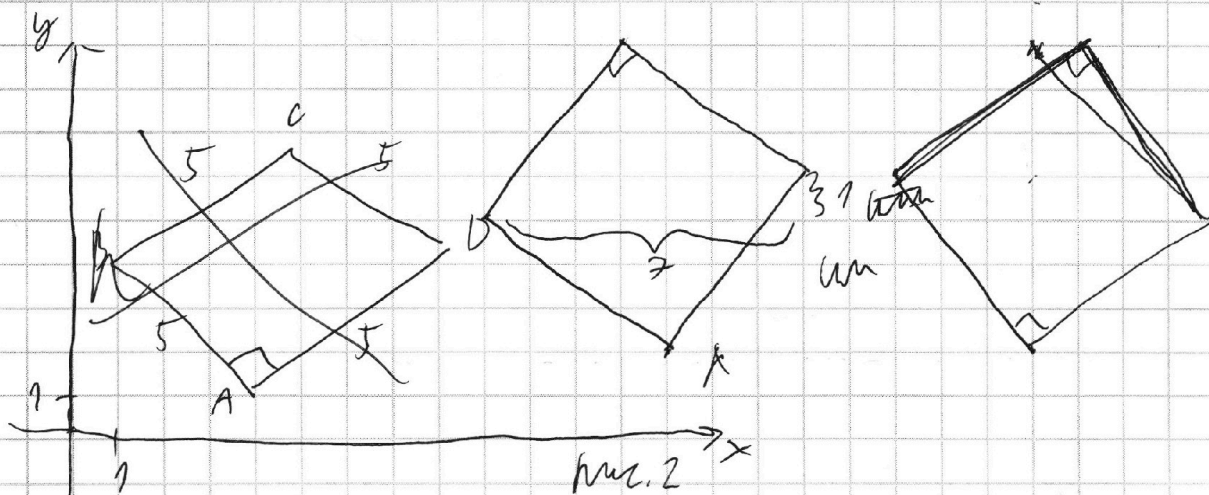
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь рассмотрим варианты, когда стороны квадрата не перпендикулярны осям.



Пусть каждая сторона квадрата 5, то диагональ равно $\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$. Тогда, сумма квадратов координат 2-х противоположных точек равно $\sqrt{50}$. Это значит будет

корень из суммы 2-х рав квадратов.

$\Rightarrow$ это либо $5^2 + 5^2$ либо $7^2 + 1^2 = 49 + 1 = 50$.

Случай, когда $5^2 + 5^2$ это тот случай,

когда стороны перпендикулярны осям

$\Rightarrow$ остался вариант $7^2 + 1^2$ (см. рис. 1). Рассмотрим

такие квадраты можно: $4 \cdot 3 \cdot 43 \cdot 2 = 368$ штук. Итого: $50 \cdot 2 = 100$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

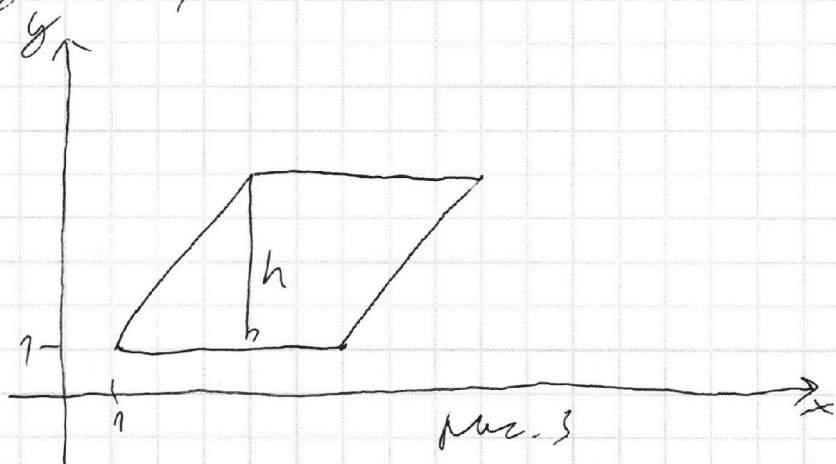
СТРАНИЦА

7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) Теперь рассмотрим случаи, когда фигура не является квадратом.

Если какая-то сторона ромба будет перпендикулярна диагонали:



Возьмем абсциссы и ординаты вершин - целые, но расстояние от вершины стороны до

другой - целое (будем это обозначать h), h может

быть 3 ($3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$) или 4 ($3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$).

В 1 случае расстояние между точками

на диагонали 9, в другом - 8 соответственно.

$\Rightarrow$ таких ромбов можно построить:

$$(50 - 8) \cdot (50 - 4) \cdot 2 + (50 - 9) \cdot (50 - 3) \cdot 2 =$$

$$= 42 \cdot 46 \cdot 2 + 2 \cdot 41 \cdot 43 \text{ (на 2 умножим, т.к. ромб может быть в 2-х вариантах, если } 0 < x < 50 \text{)}$$



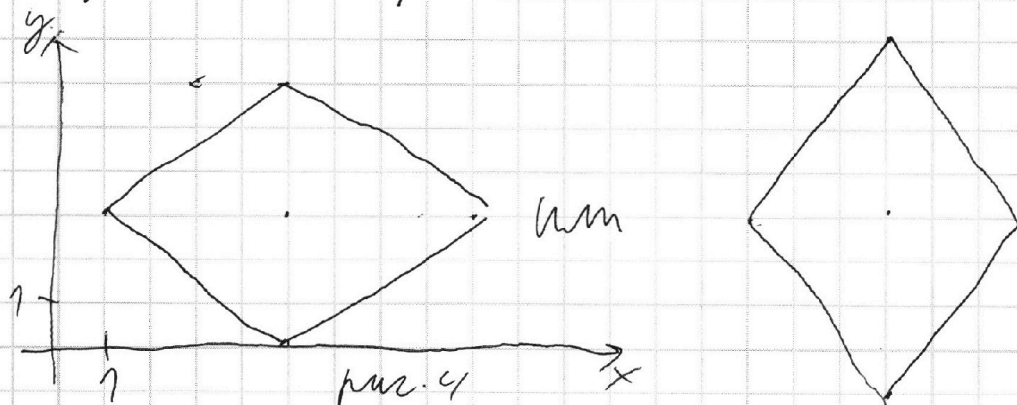
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим случай, когда ни одна сторона не параллельна осям:



Есть расстановка по x от ~~от~~ 1 до 50 ~~соединений~~ ~~степей~~ будет не 3 и не 4 , но точки тем же образом можно расставить так, чтобы обе координаты были целые $\Rightarrow$ ~~тогда~~ возможны только варианты с рис. 4, ромбов возможно расположить:

$$(50-8) \cdot (50-6) \cdot 4 \cdot 2 = 2 \cdot 42 \cdot 44$$

$$3) \text{ Теперь сложим всё: } 2025 + 3698 + 3864 + 3526 + 3696 = 16809$$

Ответ: 16809



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) если $x < 0$, то $19 \cdot 2^x$ - не целое $\Rightarrow$
 $19 \cdot 2^x + 2025$ - не целое $\Rightarrow y^2$ - не целое $\Rightarrow y$ - не целое, противоречие. $\Rightarrow x \geq 0$.

$$2) 2025 \equiv 11 \pmod{19} \Rightarrow y^2 \equiv 11 \pmod{19}$$

$$(\text{н.к. } 19 \cdot 2^x : 19)$$

$$3) 19 \cdot 2^x = y^2 - 2025 = y^2 - 45^2 = (y - 45)(y + 45)$$

$$\Rightarrow \text{либо } y - 45 : 19, \text{ либо } y + 45 : 19$$

$$\Rightarrow \text{либо } y \equiv 7 \pmod{19} \text{ либо } y \equiv 17 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow \text{либо } y^2 \equiv 11 \pmod{19} \text{ либо } y^2 \equiv 4 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow y - 45 : 19 \Rightarrow y \equiv 7 \pmod{19}. \text{ Пусть}$$

$$y = 19k + 7, \text{ тогда}$$

$$19 \cdot 2^x = (19k - 38)(19k + 52)$$

$$2^x = (k - 2)(19k + 52)$$

$$\text{Пусть } k = 4, 19k + 52 = 128 = 2^7, \text{ а } k - 2 = 2$$

$$\Rightarrow 2^7 \cdot 2^1 = 2^8 \Rightarrow \text{пусть } x = 8, k = 2 \Rightarrow y = 83$$

$\Rightarrow y$ может быть равна также -83 .

$$(\text{н.к. } 19 \cdot 2^x, \text{ в частности } y^2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

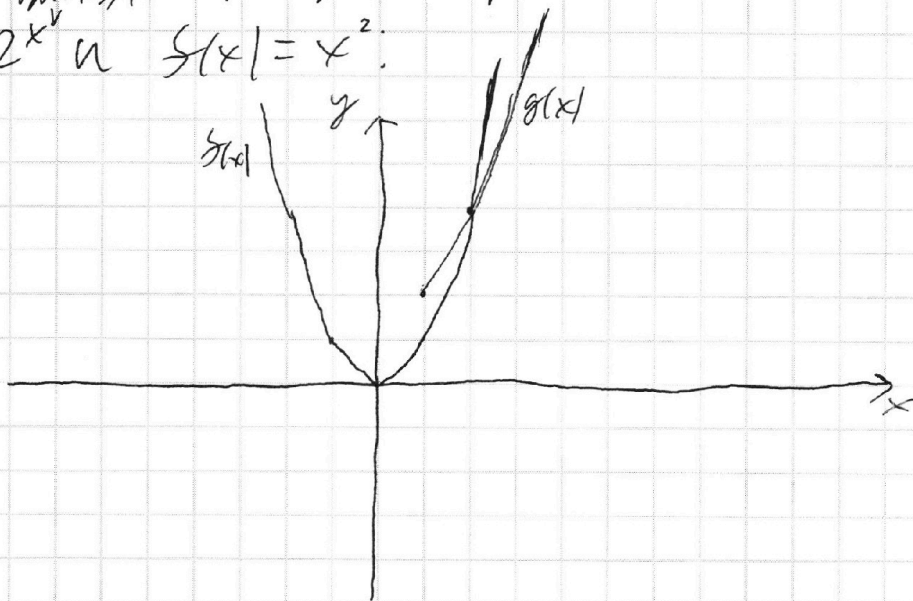
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Докажем, что графиков пересечет,

Графически проверим функции

$g(x) = 2^{x^2}$ и $f(x) = x^2$.



Заметим, что у графиков только

1 точка пересечения $\Rightarrow$ у графиков

$g'(x) = 19 \cdot 2^x + 2025^x$ и $f(x) = x^2$ тоже

будет 1 точка пересек (это также можно

замечать, т. к. $19 \cdot 2^x + 2025^x$ при $x \geq 1$ монотонно

возрастает. Ф-ция и x^2 при $x \geq 0$ - монотонно

по убыва

возрастает. Ф-ция $\Rightarrow$ у них есть только 1 т. пересек.

а при $x < 0$ у них тоже пересек, т. к. $g'(x)$ при $x \geq 1$

$\Rightarrow$ у них ф-ция $19 \cdot 2^x + 2025^x = x^2$ только пересек

$(8; 83)$ и $(8; -83)$. Ответ: $(8; 83); (8; -83)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Ты у меня: $x^2 - 6x + a \leq 8$

$$\Rightarrow a \leq -x^2 + 6x + 8$$

$\Rightarrow a$ принимает все значения
графика $y = -x^2 + 6x + 8$

$$\Rightarrow -x^2 + 6x + 8 = a$$

$$2) \begin{cases} -x^2 + 6x + 8 = a \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

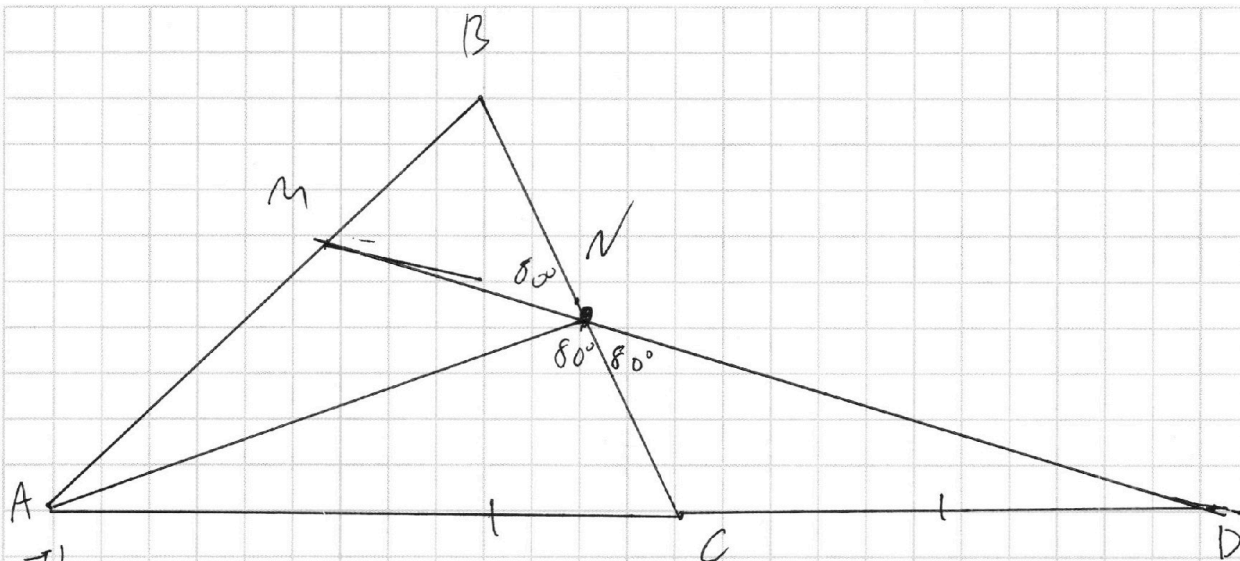
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



II)
*) Если $MN \perp AC$:

1) Продлим MN до точки пересечения с прямой AC . Предположим, что т. пересечения прямой MN и AC оказалась за точкой C .

Пусть это будет т. D .

По теореме Миллера в $\triangle ABC$ и секущей MN :

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$$

$$\text{По условию } AM \cdot BN = 2MB \cdot NC$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{CD}{DA} = 1 \Rightarrow \frac{CD}{DA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DA}{CD} = 2$$

$$\frac{AC + CD}{CD} = 2 \Rightarrow \frac{AC}{CD} = 1 \Rightarrow AC = CD$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle CND$ и $\angle MNB$ - вертикальные

$$\Rightarrow \angle CND = \angle MNB = 80^\circ \Rightarrow \angle CND = 80^\circ$$

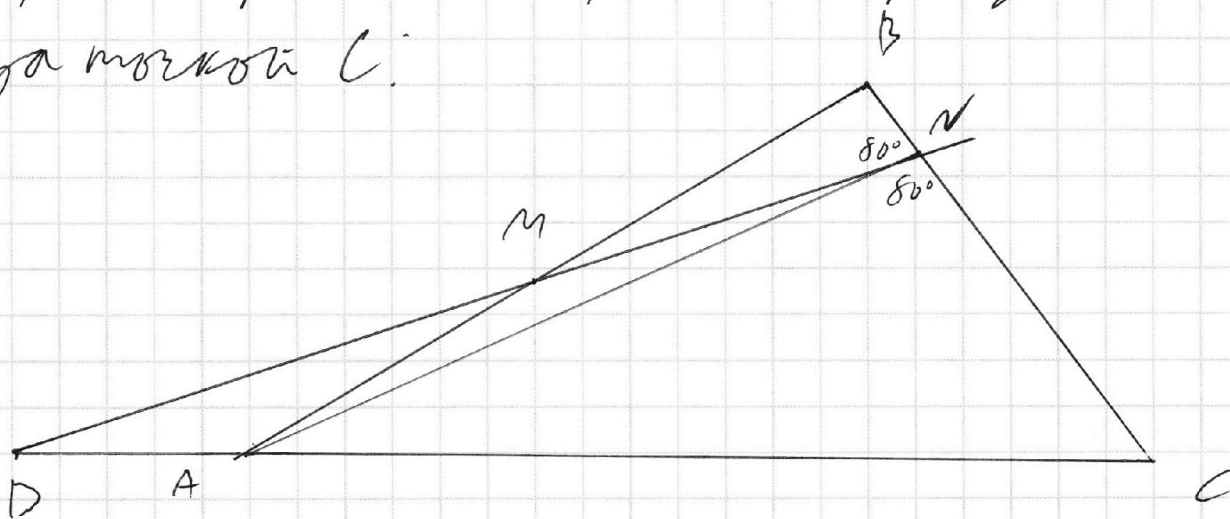
Рассмотрим $\triangle AND$:

$$\begin{aligned} \angle ANC = \angle CND = 80^\circ &\Rightarrow NC - \text{биссектриса} \\ AC = CD &\Rightarrow NC - \text{медiana} \end{aligned} \left| \Rightarrow \triangle AND - \text{равно-} \right.$$

бедренный
(по признаку)

$$\Rightarrow \angle CAN = \frac{180^\circ - \angle AND}{2} = \frac{180^\circ - 160^\circ}{2} = 10^\circ$$

2) Если прямая MN пересекает прямую AC за точкой C :



Тогда, прямая BD и AC пересекаются в M :

$$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AD}{DC} = 1. \text{ Так } NB \cdot MA = 2 \cdot CN \cdot BM, \text{ то}$$

$$\frac{AD}{DC} = 2 \Rightarrow \frac{DC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AD+AC}{AD} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = -\frac{1}{2}$. Отрицательные длины отрезков не могут быть меньше 0 и т.д. по аксиоме длины отрезков больше 0
 $\Rightarrow$ такой вариант невозможен



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

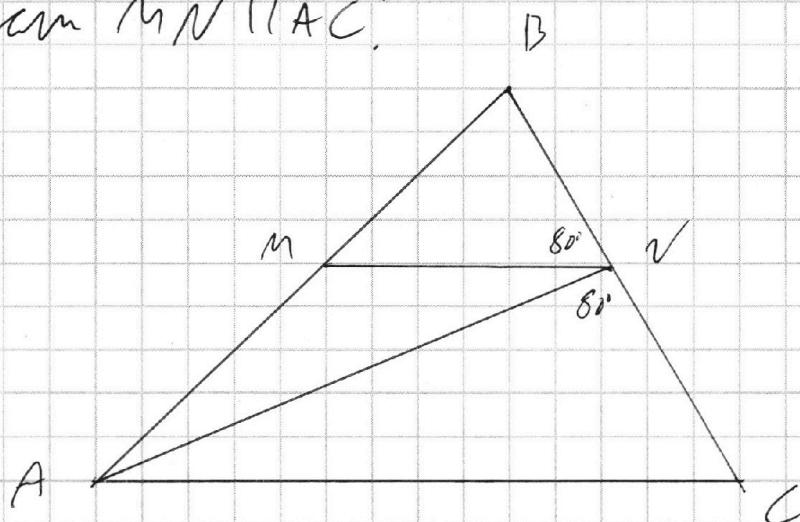
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II) $BM \parallel AC$:



Пусть $BM \parallel AC$, тогда (в-во треугольника):

$$\frac{AM}{MB} = \frac{NC}{NB} \Rightarrow AM \cdot NB = MB \cdot NC, \text{ что}$$

противоречит условию. $\Rightarrow$ такой вариант невозможен.

II) Из всего выше сказанного следует, что $\angle CAN = 10^\circ$

Ответ: 10°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 2x - 3 \geq 9x^2 - 4x + 1$$

$$(2x-1)^2 = x^2$$

$$3x^2 + 2x + 4 \geq 0$$

$$16 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$y > 45$$

$$Q = 4 + 4 \cdot 45 = 4 + 180 = 184$$

$$19 \cdot 2^k = 45 + 46 = 91$$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

$$x^2 - 6x + a \leq 8$$

$$Q =$$

$$a \leq -x^2 + 6x + 8$$

$$a \leq -(x^2 - 6x - 8)$$

$$a \leq -16$$

$$97 + 45 =$$

$$= 142$$

$$48 + 45 =$$

$$93 + 50 = 143$$

$$x^2 - 6x + a \leq 8$$

$$a \leq -x^2 + 6x + 8$$

$$k=0 \quad ?$$

$$k=1 \quad ?$$

$$k=2 \quad 4$$

$$k=3 \quad 8$$

$$k=4 \quad 3$$

$$k=5 \quad 13$$

$$36 + 4 \cdot 8 = 36 + 32 = 68$$

$$y - 45 = 2^k$$

$$y = 2^k + 45$$

$$96 = 19 \cdot \frac{2^k}{2^k - 2^k}$$

$$2^k \equiv 5 \pmod{19}$$

$$2^k + 90 = 19 \cdot 2^{k-1} \quad 2^k + 45 + 45 = 19 \cdot 2^{k-1}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x = (19k + 12 - 45) / (19k + 12 + 45)$$

$$(19k - 33) / (19k + 57)$$

$$361k^2 + 19k \cdot 57 - 19k \cdot 33 - 57 \cdot 33 = 1952$$

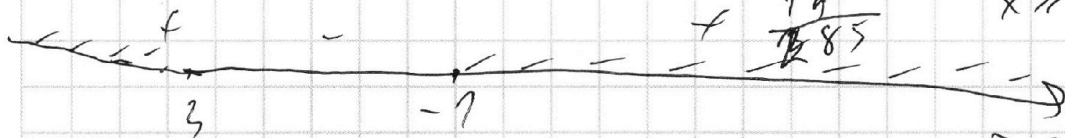
$$19(19k^2 + 24k - 99) = 2^x$$

$$19k^2 + 24k - 99 = 2^x$$

2025

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$(x+1)(x-3) \geq 0$$



$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -2x + 1 + 2x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -4x + 2$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} < 2x + 1$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -2x + 1$$

$$x^2 - 2x - 3 < (2x + 1)^2$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq$$

$$x^2 - 2x - 3 < 4x^2 + 4x + 1$$

$$\geq 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$6 \geq 6$$

$$3x^2 + 6x + 4 > 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 4$$

$$16 - 48 = -32$$

$$6 \geq 2x - 1 + 2x - 7$$

$$6 \geq 4x - 8$$

$$14 \geq 4x$$

$$x \leq \frac{14}{4} =$$

$$\begin{array}{r} 289 \overline{) 19} \\ -19 \\ \hline 99 \\ -99 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 4 \\ \hline 76 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ +48 \\ \hline 104 \end{array}$$

$$104 - 99 =$$

$$128 =$$

$$2x - 1 \geq 10$$

$$2x \geq 11$$

$$x \geq \frac{11}{2}$$

$$2 \cdot 2 =$$

$$7 - 2x \geq -2x \geq 0$$

$$7 \geq 2x$$

$$x \leq 3,5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on a grid background, showing various calculations and a graph.

Top Left: Subtraction: $2025 - 17 = 2008$. Division: $2008 \div 19 = 105$ (with remainder 13).

Top Right: A table with columns 0-7 and rows of numbers. Calculations: $36:19 = 1$ (remainder 17), $19 \cdot 2^x + 2025 = 19k + 13$, $19 \cdot 2^x + 2025 = 19k + 2$.

Center: A graph of a parabola $y = x^2$ on a coordinate system. The x-axis is labeled with 1, 2, 3, 4, 5. The y-axis is labeled with 1, 4, 9, 16, 25. The parabola passes through points (1,1), (2,4), (3,9), (4,16), (5,25).

Bottom Left: Calculations: $45 + x : 19$, $19 \cdot 2^x = (y+45)(y-45)$, $45 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow y-45$. A list of values for y : $y \equiv 13, 6, 17, 39 \pmod{19}$ and $y \equiv 64, 83, 121, 159 \pmod{19}$.

Bottom Right: Calculations: $y = 50, 69, 88, 107, 126, 145$. A list of values for y : $y \equiv 85, 107, 126, 145 \pmod{19}$.

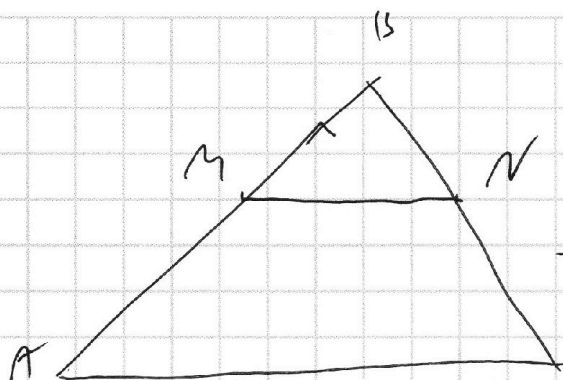


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

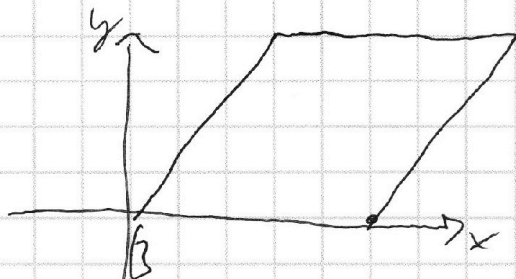
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



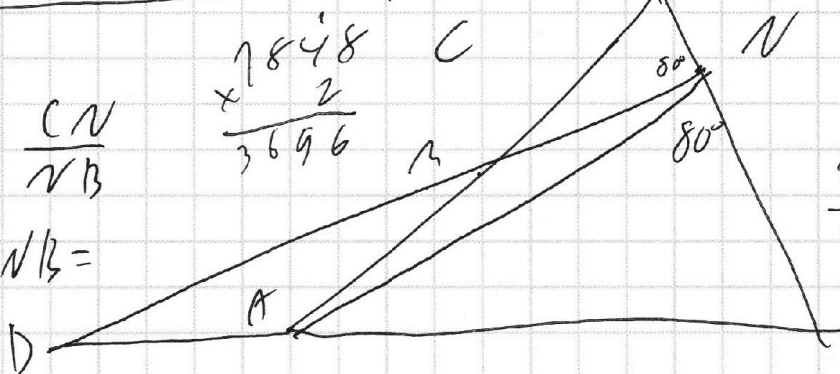
$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 444 \\ \hline 1768 \\ 118 \\ \hline 1848 \end{array}$$



$$\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NB}$$

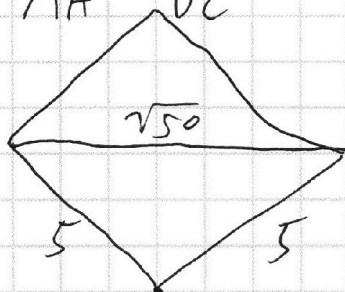
$$AM \cdot NB =$$

$$\begin{array}{r} 1848 \\ \times 2 \\ \hline 3696 \end{array}$$

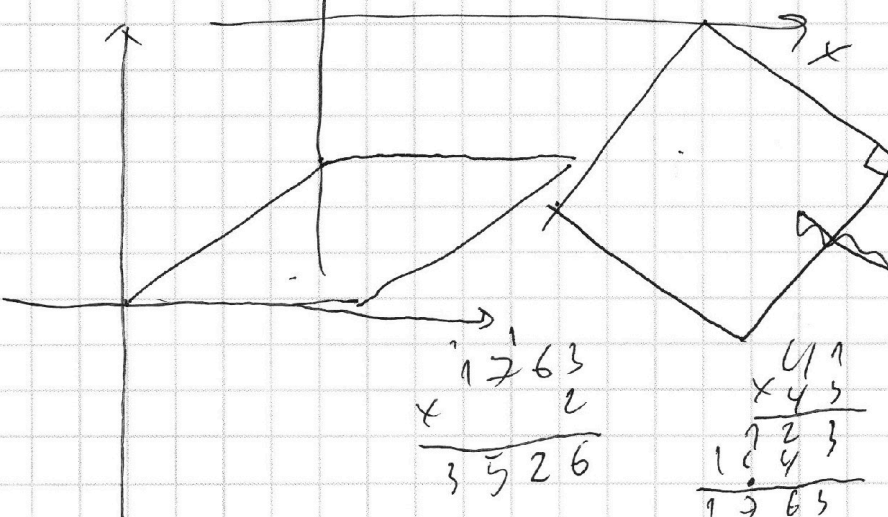


$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 44 \\ \hline 1252 \\ 168 \\ \hline 1932 \end{array}$$

$$\frac{NC}{NB} \cdot \frac{BN}{MA} \cdot \frac{AD}{DC} = 1$$

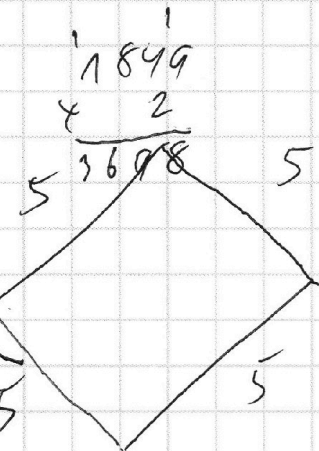


$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 443 \\ \hline 129 \\ 172 \\ \hline 1849 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1763 \\ \times 2 \\ \hline 3526 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 411 \\ \times 43 \\ \hline 1243 \\ 1723 \\ \hline 1765 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1849 \\ \times 2 \\ \hline 3698 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 6x + a \leq 8$$

$$x^2 - 6x + a - 8 \leq 0$$

$$x^2 - 6x + a - 8 = 0$$

$$D = 36 - 4(a - 8) = 36 - 4a + 32 = 68 - 4a$$

$$a \leq -x^2 + 6x + 8$$

$$-x^2 + 6x + 8 =$$

$$y + 45 \equiv 0 \pmod{19}$$

$$y + 7 \equiv 0 \pmod{19}$$

$$y \equiv 12 \pmod{19}$$

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$19 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$$

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 45^2$$

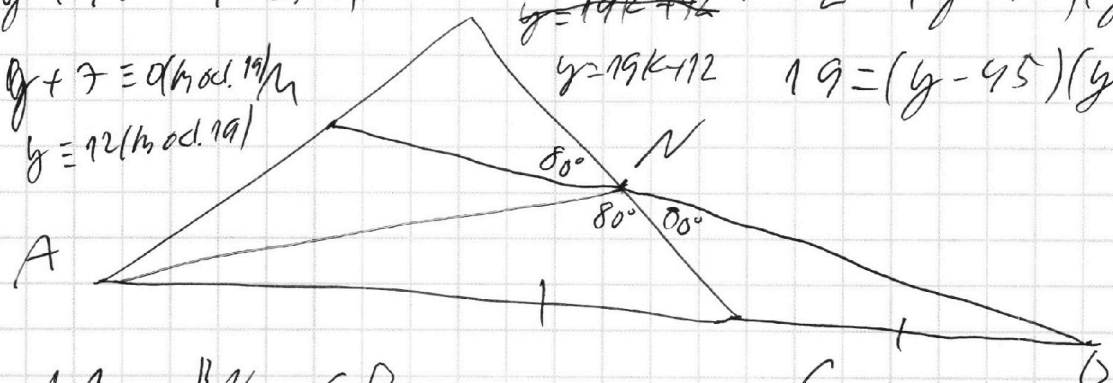
$$x = 0$$

$$y = 19k + 12$$

$$y = 19k + 12$$

$$19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45)$$

$$19 = (y - 45)(y + 45)$$



$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$$

$$2 \cdot \frac{CD}{DA} = 1$$

$$\frac{CD}{DA} = \frac{1}{2}$$

$$y + 45 = 19$$

$$\frac{DA}{CD} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{CD + AC}{CB} = \frac{2}{1}$$

$$\begin{cases} y - 45 = 1 \\ y + 45 = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 20 \\ y - 45 = 19 \\ y + 45 = 1 \end{cases}$$

$$y - 45 = 2^x \quad \frac{AC}{CD} = 1$$

$$\begin{cases} y - 45 = 2^x \\ y + 45 = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45) \\ y - 45 = 2^x \\ y + 45 = 19 \cdot 2^{x-1} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n! + (n+1) \cdot n! + (n+2)(n+1) \cdot n! =$$

$$= n! (1 + n + 1 + (n+2)(n+1)) =$$

$$= n! (n+2 + n^2 + n + 2n + 2) =$$

$$= n! (n^2 + 4n + 4)$$

$$361$$

$$361$$

$$361 = 19^2$$

$$(n+1)(n+3) + 1 =$$

$$= n^2 + 3n + n + 3 + 1 =$$

$$= n^2 + 4n + 4$$

$$(n+2)(n+1) = n$$

$$n! (n+2)^2$$

$$361 = 19^2$$

$$n^2$$

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 =$$

$$= n^2 + 4 + n^2 + 1 + n^2 + n^2 + 4 + n^2 + 1 =$$

$$= 5n^2 + 10$$

$$5n^2 = n^3$$

$$n=5$$

$$5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 5 \cdot 8 = 40 = 20^2$$

$$\begin{array}{r} 13698 \\ + 3864 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7562 \\ + 3526 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17088 \\ + 3696 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 1174784} \\ - 26 \\ \hline 101 \\ - 91 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 12 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 38 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ + 190 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14784 \\ + 2025 \\ \hline 16809 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ - 14 \\ \hline 2011 \\ - 114 \\ \hline 1897 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \overline{) 10806} \\ - 10 \\ \hline 806 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 106 \\ \times 19 \\ \hline 1914 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 106 \\ \times 19 \\ \hline 1914 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 106 \\ \times 19 \\ \hline 1914 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 106 \\ \times 19 \\ \hline 1914 \end{array}$$