МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральным n число $(n-1)!+n!+(n+1)!$ делится на 289?

2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N, большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N.

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|\sqrt{x^2-x-2}+5\right| \geqslant \left|\sqrt{x^2-x-2}+x-1\right|+|6-x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1;45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23\cdot 2^x+2025=y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy, задаваемых уравнением $x^2+y^2=a^2$, наибольшее значение выражения y^2-4y-a равно 6.

7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB=\angle ANC=70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN\cdot MA=2BM\cdot NC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №1. $(n-1)!+n!+(n+1)! = ((n-1)!)(1+n+n^2+n) = ((n-1)!)(n+1)^2$, заметим, что $289=17^2$. Пусть $n<16$, Тогда $(n-1)!(1+n)^2$ не будет делиться на 289 т.к. $(n-1)!$ не будет делиться на 17 и $(n+1)^2$ не будет делиться на 17 (следовательно и их произведение не будет делится на 17^2). Значит n хотя бы 16. Подставим и убедимся, что 16 подходит: $(15!)(17)^2$ оба множителя натуральны, один из них делится на 17^2 (множитель $(17)^2$) (следовательно и их произведение делится на 289). Ответ: $n=16$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №2: Пусть x - 4ое число из семи последовательных. Тогда сумма квадратов семи последовательных чисел имеет вид: $(x-3)^2+(x-2)^2+(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2=x^2-6x+9+x^2-4x+4+x^2-2x+1+x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4+x^2+6x+9=7x^2+28$

если вычесть из полученного результата 28, то получится $7x^2$ и по совместительству N^5. $7x^2=N^5$. Отсюда следует, что $N \vdots 7$, но и семи N не может быть равен, т.к. по условию $N>8$. $N \neq 14$ т.к. тогда $x^2=\frac{14^5}{7}=14^4\cdot 2$ $x=\pm(14^2\sqrt{2})$

и это противоречит условию о том, что $x \in N$ (множеству натуральных чисел). $N \neq 21$ т.к. тогда $x^2=\frac{21^5}{7}=21^4\cdot 3$ $x=\pm(21^2\sqrt{3})$ - противоречие условию о том, что x - натуральное число. $N=28$ подходит т.к. в этом случае $x^2=\frac{28^5}{7}=28^4\cdot 4$ $x=\pm(28^2\cdot 2)$. при $x=28^2\cdot 2$.

наименьшее из 7 последовательных $=28^2\cdot 2-3$, что натуральное число, все условия соблюдены

Ответ: $N=28$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №3 Заметим, что сумма подмодульных выражений справа равна подмодульному выражению слева. Значит если все модули раскрываются с одинаковым знаком, то нер-во выполняется.

$\boxed{\text{ОДЗ}: x^2-x-2 \geq 0 \quad D=1+8=9 \quad x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2}=2;-1 \quad x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty).}$

Также очевидно, что т.к. оба слагаемых при допустимых значениях >0, то модуль слева всегда раскрывается с плюсом.

Рассмотрим 3 случая: 1) когда справа оба модуля с $-$ 2)-3) когда 1 с $+$, а другой с $-$

1) $\begin{cases} \sqrt{x^2-x-2}+x-1<0 \\ 6-x<0 \\ \sqrt{x^2-x-2}+5 \geq -(\sqrt{x^2-x-2}+x-1)-(6-x) \end{cases}$

Из 2ого нер-ва получаем, что $6<x$, но тогда 1ое нер-во неверно $\Rightarrow$ система не имеет решений.

2) $\begin{cases} \sqrt{x^2-x-2}+x-1>0 \\ 6-x\geq 0 \\ \sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1-6+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>6 \\ \dots \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x>6 \\ 5\geq 2x-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>6 \\ 12\geq 2x \end{cases}$ система не имеет решений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$3\begin{cases}\sqrt{x^2-x-2}+x-1 \not< 0\\ 6-x>0.\\ \dots\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1<\sqrt{x^2-x-2}\\ x<6.\\ \dots\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<6.\\ \dots\end{cases}$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geqslant -\sqrt{x^2-x-2}-x+1+6-x$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 2-2x$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 1-x.$$

$\sqrt{x^2-x-2}$ при $x\in[2;6)$ - возраст. при $x\in(-\infty;-1]$ - убыв. $1-x$ — монотонно убывающая.

Т.к. при $x=2$ нер-во верно то верно оно и при $x\in[2;6)$. Теперь рассмотрим нер-во на промежутке $(-\infty;-1]$

$$\sqrt{x^2-x-2} \le \sqrt{(x-1)^2} \text{ при } x\in(-\infty;-1]$$

$\sqrt{(x-1)^2} = 1-x$. следовательно при $x\in(-\infty;-1]$ нер-во не имеет решений.

Ответ: $x\in[2;6]$. от 2 до 6 включительно.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

этой точки $[5; 41]$, в противном случае либо правая либо левая вершина будет иметь абсциссу $\notin [1; 45]$. Возможные значения ординаты этой точки $[1; 39]$, в противном случае ордината этой или верхней вершины $\notin [1; 45]$. Количество таких ромбов $37 \cdot 39 = 1443$.

3) ромбы с вертикальной диагональю $= 8$; по нижней вершине однозначно восстанавливается вся фигура. Возможные значения абсциссы этой точки $[4; 42]$, в противном случае или правая или левая вершина имеет абсциссу $\notin [1; 45]$. Возможные значения ординаты этой вершины $[1; 37]$, в противном случае или нижняя или верхняя вершина имеет ординату $\notin [1; 45]$ Количество таких ромбов $37 \cdot 39 = 1443$.

Других вариаций ромбов, удовлетворяющих условиям нет. Значит ответ $1600 + 1443 + 1443 = 3043 + 1443 = 4486$

Ответ: 4486.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 поскольку вершины ромба лежат в целочисленных координатах то его стороны либо параллельны осям (тогда это квадрат) либо гипотенузы прямоугольных Δ с целыми катетами (т.к. катет меньше гипотенузы, то перебрав все значения подойдут только катеты (3;4) либо (4;3)). Посчитаем количество ромбов каждого из вариантов:

1). квадрат: по левой нижней вершине однозначно восстанавливается вся фигура. Возможные абсциссы для этой точки [1; 40] т.к. в противном случае либо она, либо правая вершина будет иметь абсциссу ∉ [1; 45]. Возможные ординаты – [1; 40] т.к. в противном случае либо она, либо верхняя вершина будет иметь ординату ∉ [1; 45]. Таким образом получаем, что возможных квадратов 40 · 40 = 1600.

2). ромбы с вертикальной диагональю = 6.: по нижней вершине однозначно восстанавливается вся фигура. возможные абсциссы для

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача N 5 $23\cdot 2^x+2025=y^2$

$23\cdot 2^x=y^2-2025$

$23\cdot 2^x=(y-45)(y+45)$. Заметим:

Во-первых, $y-45$ и $y+45$ одной чётности. Во-вторых отличаются ровно на 90. Также $x\geq 0$ т.к. в противном случае $23\cdot 2^x$ - нецелое. Пусть одному из множителей (y+45 и y-45) соответствует $23\cdot 2^y$ а другому 2^{x-y} тогда $|23\cdot 2^y-2^{x-y}|=90$. откуда получим
$$\left[\begin{array}{l}|23-2^{x-2}|=45\\ |23\cdot 2^{x-2}-1|=45\end{array}\right.$$
т.к. $90\,\vdots\, 2^1$ и $90\not\vdots\, 2^2$ (следовательно оба множителя делятся на 2^1, а один из них только на 2^1)

1) $|23-2^{x-2}|=45$.
$2^{x-2}-23=45$.
$2^{x-2}=68$. - нет решений для целых x.

2) $|23\cdot 2^{x-2}-1|=45$.

$23\cdot 2^{x-2}-1=45$. $23\cdot 2^{x-2}=45$ единственное решение $x=3$. (в обоих случаях модуль раскрывается однозначно т.к. 2) $1<23\cdot 2^{x-2}$ 1) $23<45$)

Отсюда получаем, что
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y+45=2^2\cdot 23\\ y-45=2\end{cases}\\ \begin{cases}y+45=-2\\ y-45=-2^2\cdot 23\end{cases}\end{array}\right.$$
решив системы получаем 2 пары ответов.

Ответ. $(x=3;\ y=47)$ $(x=3;\ y=-47)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача N6. Очевидно что множество точек, задаваемых $x^2+y^2=a^2$ это окружность с центром $(0;0)$ и радиусом $|a|$. При $|a|<1$. выражение y^2-4y-a не примет 6 никогда.

Т.к. $|y|\le|a| \Rightarrow y^2<1 \quad -4y<4 \quad -a<1$

$\Rightarrow y^2-4y-a<6$. При $|a|\ge 1$. наибольшее значение будет достигаться при $y=-|a|$

(это верно т.к. a - фиксировано, а $|y|\le|a| \Rightarrow$ т.к. оба множителя достигают минимальных значений, модули которых больше максимальных, $y(y-4)$ - достигает своего наибольшего значения при $y=-|a| \Rightarrow$ всё выражение достигает максимума в этой точке).

значит выражение имеет вид:

$a^2+4|a|-a=6$.

$$\begin{cases} a^2+3a-6=0 \\ a>0 \end{cases}$$

$D=9+24=33$.

$a_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2} \qquad \frac{-3-\sqrt{33}}{2}<0$

$a=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$

$$\begin{cases} a^2-5a-6=0 \\ a<0 \end{cases}$$

$D=25+24=7$.

$a_{1/2}=\frac{5\pm 7}{2}=6;-1 \qquad 6>0$.

$a=-1$.

Ответ: $a=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$; -1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА ___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Тожэ черновик

$a^2+4|a|-a-6=0$

$a>0$

$a^2+4a-a-6=0$

$a^2+3a-6=0$

$D_a = 9+24=33$

$a<0$

$a^2-4a-a-6=0$

$a^2-5a-6=0$

$6;\ \boxed{-1}$

$9+24=\sqrt{33}$

$\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$

$\dfrac{9-6\sqrt{33}+33}{4}+1{,}5(-3+\sqrt{33})-6=0$

$2{,}25-1{,}5\sqrt{33}+8{,}25-4{,}5+1{,}5\sqrt{33}-6$

$=16{,}5-10$

40^2

1600

$|y-5|\geq |y+x-1|+|6-x|$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Эта черновик!

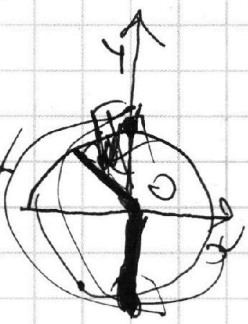
$(n-1!)(1+n+n^2+n$

239 2x 140

$(n-1!)(1+n)^2$

3x 4x 7x 11x 13x 17

$\boxed{n=16}$



$(x-3)^2+(x-2)^2+(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2$

$x^2-9+x^2+4+x^2+1+x^2+x^2+1+x^2+4+x^2+9$

$= N^5$

$\boxed{28}$

$23\cdot 2^x = y^2 - 2025$

$23\cdot 2^x = (y-45)(y+45)$

2^{x-n}

90

нет решения!

$23\cdot 2^{x-n} - 23 = 90$

$2(2^{x-2} - 23) = 90$

$2^{x-2} - 23 = 45$

68

$23\cdot 2^3 + 2025 = 47^2$