



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1. $(n-1)! + n! + (n+1)! = ((n-1)!(1+n+n^2+n))$
 $\geq ((n-1)!(n+1)^2$, заметим, что $289 = 17^2$.
Пусть $n < 16$. Тогда $(n-1)!(1+n)^2$ не будет делиться на 289 т.к. $(n-1)!$ не будет делиться на 17 и $(n+1)^2$ не будет делиться на 17 (следовательно и их произведение не будет делиться на 17^2). Значит n хотя бы 16. Подставим и убедимся, что 16 подходит: $(15!) \cdot (17)^2$ оба множителя натуральные, один из них делится на 17^2 (множитель $(17)^2$) (следовательно и их произведение делится на 289). Ответ: $n = 16$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1: Пусть x - чое число из
суммы последовательных. Тогда сумма
квадратов сум последовательных чисел
имеет вид: $(x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 +$
 $(x+2)^2 + (x+3)^2 = x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 +$
 $x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 = 4x^2 + 28$
если вычесть из полученного результата
28, то получится $4x^2$ и по совместительству
 N^5 . $4x^2 = N^5$. Отсюда следует,
что $N \div 4$, но и сумма N не может быть
равен, т.к. по условию $N > 8$. $N \neq 14$, т.к.
тогда $x^2 = \frac{14^5}{4} = 14^4 \cdot \frac{1}{4}$ и $x = \pm(14^2 \sqrt{2})$
это противоречит условию о том, что $x \in \mathbb{N}$
(множеству натуральных чисел). $N \neq 21$ т.к.
тогда $x^2 = \frac{21^5}{4} = 21^4 \cdot \frac{3}{4}$ и $x = \pm(21^2 \sqrt{3})$ - противоре-
чит условию о том, что x - натуральное
число. $N = 28$ подходит т.к. в этом случае.
 $x^2 = \frac{28^5}{4} = 28^4 \cdot 4$ и $x = \pm(28^2 \cdot 2)$. при $x = 28^2 \cdot 2$.
наименьшее из 4 последовательных $= 28^2 \cdot 2 - 3$,
что натуральное число, все условия соблюдены.
Ответ: $N = 28$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3 Заметим, что суммы подкоренных выражений справа равна подкоренному выражению слева. Значит если все модули раскрываются с одинаковым знаком, то мер-во выполняется.

$$\text{ОДЗ: } x^2 - x - 2 \geq 0 \quad D = 1 + 8 = 9 \quad x_{1/2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1$$

$$x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$

Также очевидно, что т.к. оба модуля при допустимых значениях > 0 , то модуль слева всегда раскрывается с плюсом.

Рассмотрим 3 случая: 1) когда справа оба модуля с- 2) - 3) когда 1 с +, а другой с-

$$1) \begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 < 0 \\ 6 - x < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq -(\sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1) - (6 - x)$$

~~Из этого мер-ва получаем, что~~

$6 < 6$, но тогда все мер-во неверно $\Rightarrow$

система не имеет решений.

$$2) \begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 > 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 - 6 + x \Rightarrow \begin{cases} x > 6 \\ \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 6 \\ 5 \geq 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 6 \\ 12 \geq 2x \end{cases} \text{ система не имеет решений.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима! 30

$$3 \begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \leq 0 \\ 6 - x > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 \leq \sqrt{x^2 - x - 2} \\ x \leq 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 6. \\ \dots \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 1 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} - x + 1 + 6 \neq x,$$

$$2\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 2 - 2x$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 1 - x.$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \text{ при } x \in [2; 6) \text{ возрастает, } 1 - x \text{ — монотонно убывающая.}$$

$$\text{при } x \in (-\infty; -1) \text{ убав.}$$

Т.к. при $x = 2$ нерав-во верно то верно оно

и при $x \in [2; 6)$. Теперь рассмотрим нерав-во на промежутке $(-\infty; -1]$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \leq \sqrt{(x-1)^2} \text{ при } x \in (-\infty; -1]$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \leq |x-1|$$

$x \in (-\infty; -1]$ нерав-во не имеет решений.

Ответ: $x \in [2; 6]$. от 2 до 6 включительно.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

этой точки $[5; 41]$, в противном случае либо правая либо левая вершина будет иметь абсциссу $\notin [1; 45]$. Возможные значения ординаты этой точки $[1; 39]$, в противном случае ордината этой или вершней вершин $\notin [1; 45]$. Количество таких ромбов $34 - 39 = 1443$.

3) ромбы с вертикальной диагональю $= 8$, по нижней вершине однозначно восстанавливается вся фигура. Возможные значения абсциссы этой точки $[4; 42]$, в противном случае или правая или левая вершина имеет абсциссу $\notin [1; 45]$. Возможные значения ординаты этой вершины $[1; 34]$, в противном случае или нижняя или верхняя вершина имеет ординату $\notin [1; 45]$. Количество таких ромбов $34 - 39 = 1443$.

Другие варианты ромбов, удовлетворяющих условиям нет. Значит ответ $1600 + 1443 + 1443 = 3043 + 1443 = 4486$

Ответ: 4486.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 по какому вершинному ребру дана
в целочисленных координатах по его сторонам
либо параллельны оси (тогда это квадрат)
либо гипотенуза прямоугольного $\triangle$ с целыми
катетами (т.к. катет меньше гипотенузы, то
перебрав все значения получится только катеты
(3; 4) либо (4; 3)). Посчитает количество
паров концов из вершин:

1) квадрат: по левой нижней вершине однозначно
восстанавливается вся фигура. Возможные
абсциссы для этой точки $[1; 40]$ т.к.

в противном случае либо она, либо правая вершина
будет иметь абсциссу $\notin [1; 45]$. Возможные
ординаты $- [1; 40]$ т.к. в противном случае
либо она, либо верхняя вершина будет иметь
ординату $\notin [1; 45]$. Таким образом получаем,
что возможных квадратов $40 \cdot 40 = 1600$.

2) - ромбы с вертикальной диагональю = 6: по
нижней вершине однозначно восстанавливается
вся фигура. Возможные абсциссы для



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 $23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 2025$$

$$23 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45). \text{ Заметим:}$$

Во-первых, $y - 45$ и $y + 45$ одной чётности. Во-вторых отличаются ровно на 90. Также $x \geq 0$ т.к.

в противном случае $23 \cdot 2^x$ - нецелое. Пусть

одному из множителей $(y+45 \text{ и } y-45)$ соответствует $23 \cdot 2^y$

а другому 2^{x-y} тогда $|23 \cdot 2^y - 2^{x-y}| = 90$.

откуда получим $|23 - 2^{x-2}| = 45$ т.к.

1) $|23 - 2^{x-2}| = 45$.

$$2^{x-2} - 23 = 45$$

$2^{x-2} = 68$. - нет решений для целых x .

$|23 \cdot 2^{x-2} - 1| = 45$ $90 : 2^1$ и $90 : 2^2$

следовательно оба множителя делится на 2^1 , а один из них только на 2^1

2) $|23 \cdot 2^{x-2} - 1| = 45$.

$23 \cdot 2^{x-2} - 1 = 45$. $23 \cdot 2^{x-2} = 46$ единственное решение $x = 3$. (в обоих случаях модуль равен 46, а делится одинаково т.к. 1) $1 < 23 \cdot 2^{x-2}$ 2) $23 < 45$)

Отсюда получаем, что

решив систему

$$\begin{cases} y + 45 = 2^2 \cdot 23 \\ y - 45 = 2 \\ y + 45 = -2 \\ y - 45 = -2^2 \cdot 23 \end{cases}$$

получим 2 пары ответов.

Ответ. $(x=3; y=44)$ $(x=3; y=-44)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 16. Очевидно что множество точек, задаваемых $x^2 + y^2 \leq a^2$ это окрестность в центре $(0; 0)$ с радиусом $|a|$. При $|a| < 1$.

выражение $y^2 - 4y - a$ не примет в никуда.

$$\text{т.к. } |y| \leq |a| \Rightarrow y^2 \leq 1 \quad -4y \leq 4 \quad -a \leq 1$$

$\Rightarrow y^2 - 4y - a \leq 6$. При $|a| \geq 1$ наибольшее значение будет достигаться при $y = -|a|$

(это верно т.к. a - фиксировано, а $|y| \leq |a| \Rightarrow$

т.к. оба множителя достигают минимальных значений, тогда $y(y-4)$ достигает своего наибольшего значения при $y = -|a| \Rightarrow$ всё выражение достигает максимума в этой точке.)

значит выражение примет вид:

$$a^2 + 4|a| - a = 6.$$

$$\begin{cases} a^2 + 3a - 6 = 0 \\ a > 0. \end{cases}$$

$$D = 9 + 24 = 33.$$

$$a_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} \quad \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} < 0$$

$$a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}; -1$$

$$\begin{cases} a^2 - 5a - 6 = 0 \\ a < 0. \end{cases}$$

$$D = 25 + 24 = 49.$$

$$a_{1/2} = \frac{5 \pm 7}{2} = 6; -1 \quad 6 > 0.$$

$$a = -1.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
101 ИЗ 101

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тоже черновик

36-0.

20.

$a > 0$

$$a^2 + 4a - a - 6 = 0$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$g_a = g + 24 = 33$$

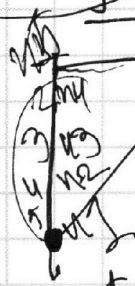
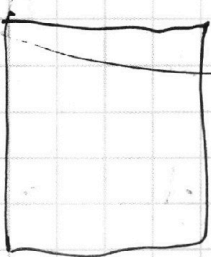
a^3

$$g + 24 = \sqrt{33}$$

$$\frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

402.

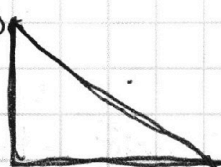
1600



$$g = 6\sqrt{33} + 33 + 1,5(-3 + \sqrt{33}) - 6 = 0$$

$$2,25 - 1,5\sqrt{33} + 0,25 - 4,5 + 1,5\sqrt{33} - 6 = 0$$
$$= 10,5 - 6 = 4,5$$
$$a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$2,25 + 39$$



$$|y - 15| \geq |y + a - 1 + (b - a)|$$

8
34
39
333

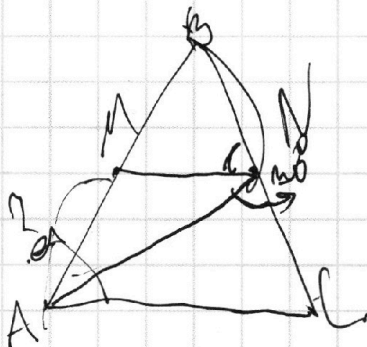
$a < 0$

$$a^2 - 4a - a - 6 = 0$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$g + 24 = 4$$

$$-6; -1$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

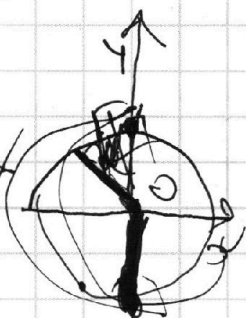
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

эта Черновик!

~~Вариант 200~~

$$(n-1!)(1+n+n^2+n^3)$$
$$(n-1!)(1+n)^2$$

$$\frac{290+140}{140+140}$$



$$2x$$
$$3x$$
$$4x$$
$$5x$$
$$6x$$
$$7x$$
$$8x$$
$$9x$$
$$10x$$
$$11x$$
$$12x$$
$$13x$$
$$14x$$
$$15x$$
$$16x$$
$$17x$$
$$18x$$
$$19x$$
$$20x$$

$$(x-3)(x-2)(x-1) + x^2 + (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + \dots$$

$$n=46$$

$$1425$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$23 \cdot 2 = 46$$
$$23 \cdot 2 = 46$$
$$23 \cdot 2 = 46$$

$$90$$

$$23 \cdot 2 = 46$$
$$23 \cdot 2 = 46$$
$$23 \cdot 2 = 46$$

$$23 \cdot 2 = 46$$