



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
- [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
- [4 балла] Решите неравенство

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|$$

$$y = 45 + 2^x$$

$$2^2 + 90 = 2(2^{x-1} + 45)$$

- [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 - a = y^2 - a$$

$$4y = a^2 - a - x^2$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$2^x + 45$$

$$2^x + 90$$

$$2(2^{x-1} + 45)$$

$$y = 2^x - 45$$

$$2^x - 90 = 23$$

$$2(2^{x-1} - 45) = 23$$

- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.

$$x^2 - a^2 = y^2 - 4y - a$$

$$x^2 - a^2 = 6$$

$$-4y - a =$$

- [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45) = 23 \cdot 2^x$$

$$y = 2^{x-1} + 45$$

$$64 - 45$$

$$169$$

$$109$$

$$104$$

$$145$$

$$49$$

$$225$$

$$169$$

$$2025$$

$$169$$

$$2025$$

$$169$$

$$2025$$

$$169$$

$$2025$$

$$169$$

$$2025$$

$$169$$

$$2025$$

$$169$$

$$y = 2^{x-1} - 45$$

$$y = 45 + 2^x$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$y = 1$$

$$y = 45 + 2^x$$

$$2(2^{x-1} + 45)$$

$$2^{x-1} + 45 = 23$$

$$2^{x-1} - 45 = 23$$

$$2^{x-1} = 68$$

$$y = 1$$

$$y = 23$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$y = 22$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 2^x + 45$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 15$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$y = 22$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 2^x + 45$$

$$y = 22$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 2^x + 45$$

$$y = 22$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 2^x + 45$$

$$y = 22$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 2^x + 45$$

$$y = 22$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 2^x + 45$$

$$y = 22$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 2^x + 45$$

$$y = 22$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 2^x + 45$$

$$y = 22$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 2^x + 45$$

$$y = 22$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 2^x + 45$$

$$y = 22$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 2^x + 45$$

$$y = 22$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$

$$y = 23$$

$$y = 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

11

$$\text{Пусть } (n-1)! = x$$

$$n! = x \cdot n$$

$$(n+1)! = x \cdot n \cdot (n+1)$$

$\downarrow$

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = x + x \cdot n + x \cdot n \cdot (n+1) = x(n+1)^2$$

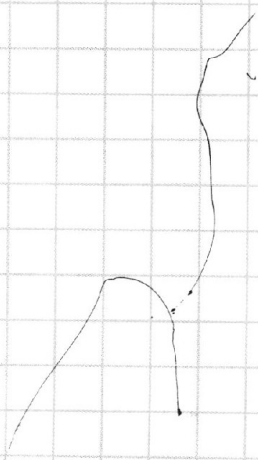
$\downarrow$

Если $n < 16$, то $(n+1)^2$ не дел на 17 и x не дел

на 17, а т.к. $289 = 17 \cdot 17 \Rightarrow x(n+1)^2$ не дел на 289. $\Rightarrow$ хотя бы

16. Заметим, что если $n = 16$. $\Rightarrow (n+1)! + n! + (n-1)! = (n-1)!(n+1)^2 =$

$$= 15! \cdot 17^2 : 289 \Rightarrow \text{Ответ: } 16$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N^2

Пусть 7 послед. квадратов из условия $- a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + \dots + (a+6)^2 =$
 $= 7a^2 + 91 + 42a$. Если мы вычтем 28, то получим $7a^2 + 63 + 42a =$
 $= 7(a+3)^2 = N^5$, $\Rightarrow N : 7$.

Рассмотрим случаи N . г.к $N : 7 \Rightarrow N = 7, 14, 21, 28, \dots$

1 случай $N=14$:

$$7(a+3)^2 = 14^5 \Rightarrow (a+3)^2 = 2^5 \cdot 7^4 - \text{не квадрат} \quad \times$$

2 случай $N=21$:

$$7(a+3)^2 = 21^5 \Rightarrow (a+3)^2 = 3^5 \cdot 7^4 - \text{не квадрат}$$

3 случай $N=28$

$$7(a+3)^2 = 28^5 - \text{правда при } a = (2^5 \cdot 7^2 - 3) \Rightarrow \text{Ответ: } N_{\min} = 28$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

Разберём несколько случаев x :

0.03 $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

Случай $1 \leq x \leq 6$

$$\sqrt{(x+1)(x-2)} + 5 \geq \sqrt{(x+1)(x-2)} + x - 1 + 6 - x$$

$\Downarrow$

$$5 \geq 5 - \text{всегда работает} \Rightarrow 1 \leq x \leq 6$$

Случай $x \geq 6$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + x - 6$$

$\Downarrow$

$$12 \geq 2x$$

$\Downarrow$

$$6 \geq x \Rightarrow \text{подходит только } x = 6$$

Случай $x \leq 1$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq -\sqrt{x^2 - x - 2} - x + 1 + 6 - x$$

$\Downarrow$

$$2\sqrt{(x+1)(x-2)} \geq -2x + 2$$

$\Downarrow$

$$\sqrt{(x+1)(x-2)} \geq 1 - x$$

$\Downarrow$

$$(x+1)(x-2) \geq (1-x)^2$$

$\Downarrow$

$$x^2 - x - 2 \geq x^2 + 1 - 2x$$

$\Downarrow$

$$x - 3 \geq 0$$

$\Downarrow$

$$x \geq 3 - \text{противоречие}$$

$\Downarrow$

Ответ: $2 \leq x \leq 6$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

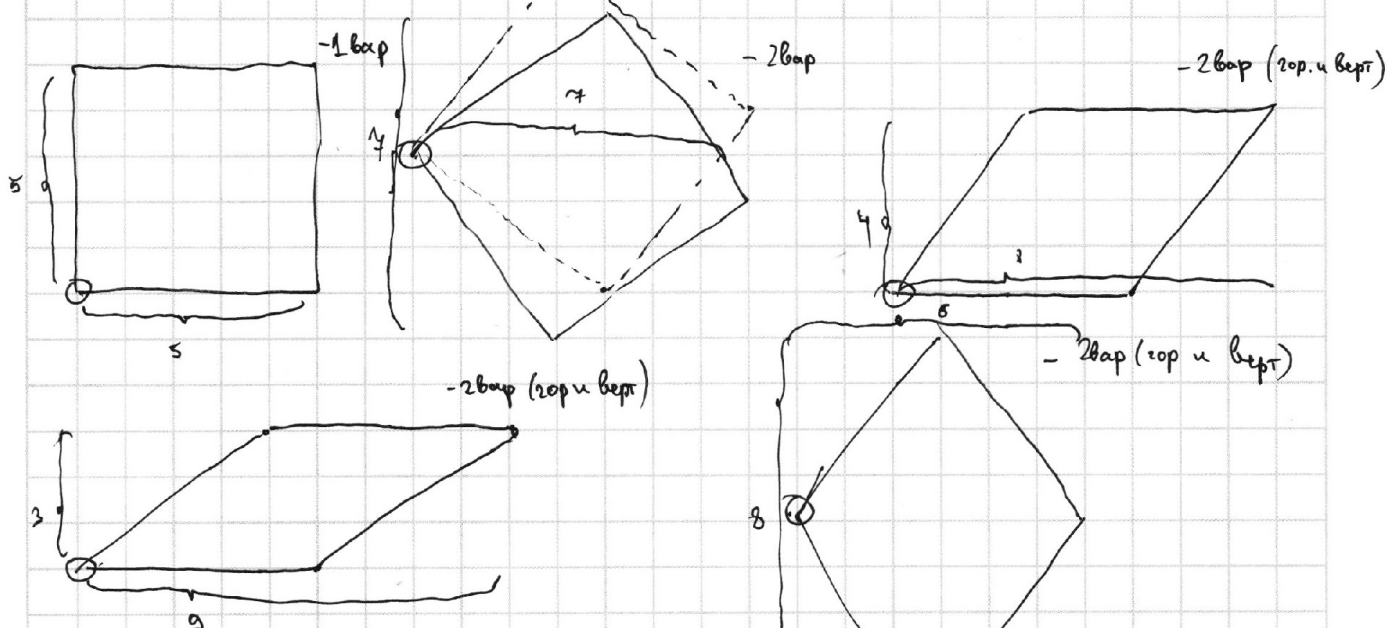
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Какие могут быть прямоуго. трапз с гипотенузой 5. (катет может быть равен 0) Если гипот 5, то катет max 5 (т.к. гипот > катет) $\Rightarrow$

Переберём возможные катеты и посмотрим что это может быть катет -

(0,5) и (3,4). - Переберём возможные варианты рис ниже:



Подсчитаем для каждого кол возможных размещений, где

2 вер просто умножим на 2. Будем считать, что разб задан клетки обведенные на рисунке. Мы можем размещать её так, что бы по горизонт и по верт ещё оставалось нужное кол клеток (подпис на рисунках. $\Rightarrow 40^2 + 2 \cdot 30^2 + 2 \cdot 41 \cdot 37 + 2 \cdot 42 \cdot 36 + 2 \cdot 37 \cdot 39$ (коэф) = ~~13586~~ 13586



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS

$$23 \cdot 2^x = y^2 - 2025$$

$$23 \cdot 2^x = (y-45)(y+45) \quad - \text{Одна из скобок равна } 2^a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } y-45 = 2^a \Rightarrow y = 2^a + 45 \Rightarrow y+45 = 2^a + 90 = 2(2^{a-1} + 45)$$

- в скобке неч. число $\Rightarrow$ имеет только неч. делители $\Rightarrow$

$$2^{a-1} + 45 = 23 \quad - \text{X}$$

$$\text{Пусть } y+45 = 2^a \Rightarrow y = 2^a - 45 \Rightarrow y-45 = 2^a - 90 = 2(2^{a-1} - 45)$$

$$- \text{ в скобке неч. число } \Rightarrow \text{ равно } 23 \text{ не } 2^{a-1} - 45 = 23 \Rightarrow 2^{a-1} = 68 \quad - \text{X}$$

$\Rightarrow$ Ответ: таких пер нет.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Множество точек $x^2 + y^2 = a^2$ - круг с центром в $(0;0)$ и радиусом a .

$y^2 - 4y - a$ - парабола ветвью вверх, х.оси симметрии которой ~~идет~~

больше 0. $\Rightarrow$ т.к. значение $\text{Max} \Rightarrow y < 0$

$$\begin{cases} y < 0 \\ y^2 - 4y - a = 6 \\ a^2 - y^2 = 36 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y < 0 \\ -6y^2 + 24y + 6a + a^2 - y^2 = 0 = -7y^2 + 24y + 6a + a^2 = 0 \\ \cancel{a^2 - y^2 = 36} \end{cases}$$

$\Downarrow$

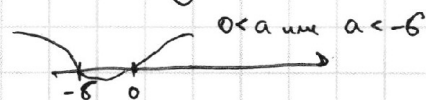
$$\begin{cases} D \geq 0 \\ -6 - \sqrt{D} \geq 0 \Rightarrow D \geq 36 \end{cases}$$

$$D = 24^2 - 4(-7 \cdot (6a + a^2))$$

$$24^2 - 4(-7 \cdot (6a + a^2)) \geq 24^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28(6a + a^2) \geq 0$$

$$a(6 + a) \geq 0$$



$\Rightarrow$ Ответ: $a \geq 0$ или $a < -6$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

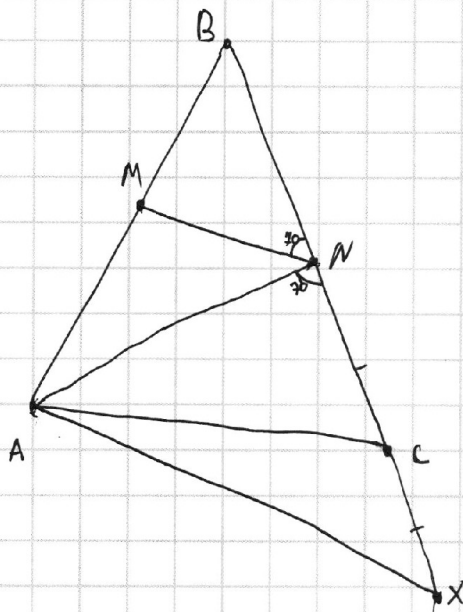
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7



Продлим NC в два раза за точку C .
(точка X) ($NC = CX$)

Т.к. $BN \cdot MA = 2BN \cdot NC$

$\Downarrow$

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{2NX} \Rightarrow \text{по Талезу } MN \parallel AX$$

$$\Rightarrow \angle AXB = \angle MNB = 70^\circ \Rightarrow \angle ANX = \angle AXN \Rightarrow$$

$$\triangle ANX - \text{р/б} \Rightarrow \angle ACN = 90^\circ \text{ (т.к. } AC \perp BC \text{)}$$

$$\Rightarrow \angle NAC = 180 - 90 - 70 = 20$$

