



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



+ 1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

+ 2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

+ 3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.

+ 4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

+ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.

+ 6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

+ 7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.

-128-16-4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = z^3 + 4z^2 \\ xyz = x^3 + 4x^2 \\ xyz = y^3 + 4y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^3 + 4z^2 = x^3 + 4x^2 = y^3 + 4y^2$$

рассм. 1 равенство (ост. будут аналогичные)

$$x^3 + 4x^2 = y^3 + 4y^2 \Leftrightarrow x^3 - y^3 + 4(x^2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) + 4(x+y)(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 4x + 4y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + 4x + y^2 + 4y + xy) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(xyz + xz + xy) = 0 \quad (\text{ост. равенства аналог.})$$

$$\begin{cases} (x-z)(yz + xz + xy) = 0 \\ (y-z)(yz + xz + xy) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0; x-z=0; z-y=0 \Rightarrow \\ \boxed{x=y=z=k} \end{cases}$$

Подставим в 1 ур-е: $k^2 = 4k + k^2 \Rightarrow 4k = 0 \Rightarrow \boxed{k=0} \Rightarrow x=y=z=0$

$\Rightarrow$ т.к. по условию наша сист. должна

иметь ненулевые решения. Значит $\boxed{xy + xz + yz = 0}$

Значит $xy + xz + yz = 0$ или дел $x+y+z$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = yz - 4x +$$

$$+ zx - 4y + xy - 4z = -4(x+y+z) \Rightarrow (x+y+z)(x+y+z+4) = 0$$

Т.е. либо $x+y+z=0$ (I); либо $x+y+z=-4$ (II)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II $x+y+z=0 \Leftrightarrow -4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = \overbrace{x^2 + y^2 + z^2}^{zy+4x} + 8x + 16 +$$

$$\underbrace{y^2 + 8y + 16}_{xz+4y} + \underbrace{z^2 + 8z + 16}_{xy+4z} = \underbrace{4(x+y+z)}_{-4} + 48 + \underbrace{xy+yz+xz}_0$$

$= 32.$

Приведем пример: $(x; y; z) = (-\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}; +\frac{4}{3})$

Проверим исходную систему:

А также:

$$\begin{cases} + \frac{64}{9} = +\frac{16}{9} + \frac{16}{9} = \frac{16}{9} + \frac{48}{9} = \frac{64}{9} \checkmark \\ - \frac{32}{9} = +\frac{64}{9} - \frac{32}{3} = \frac{64}{9} - \frac{96}{9} = -\frac{32}{9} \checkmark \\ - \frac{32}{9} = +\frac{64}{9} - \frac{32}{3} = \frac{64}{9} - \frac{96}{9} = -\frac{32}{9} \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{aligned} xy+xz+yz &= \\ &= \frac{64}{9} - \frac{32}{9} - \frac{32}{9} = 0 \checkmark \end{aligned}$$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \frac{256+32}{9} = \frac{288}{9} = 32 \checkmark$$

I $\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+xz=0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x+y+z)^2 &= 0 = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot (0) \Rightarrow \\ &= x^2 + y^2 + z^2 = 0 \leftarrow \text{это} \\ &\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ y^2 \geq 0 \\ z^2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

значит и то

$$x=y=z=0$$

$$\text{и } x=y=z=0$$

должно быть решение в целых числах.

Ответ: 32.

Достигаемо при $(x; y; z) = (-\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}; +\frac{4}{3})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Представим наше число $\overbrace{9 \dots 9}^{25000} = 10^{25000} - 1 = n$
 25000 шт

$$n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1$$

~~$10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1$~~
 50000

$$\left\{ \begin{aligned} 10^{75000} + 3 \cdot 10^{25000} &= \overbrace{100 \dots 0}^{49999} \cdot 10^{25000} \\ 3 \cdot 10^{50000} + 1 &= \overbrace{30 \dots 01}^{49999 \text{ шт.}} \end{aligned} \right.$$

здесь "7"
здесь "0"
здесь "2"
здесь "9"
здесь "1"

$$\begin{array}{r} 10 \dots 00 \dots 30 \dots 0 \\ - 30 \dots 00 \dots 1 \\ \hline \end{array}$$

здесь "9"
здесь "0"
здесь "2"
здесь "9"
здесь "1"

всего "94": $25000 + 24999 = 49999 \text{ шт.}$
 $(25000 - 1)$
Ответ: 49999 шт.



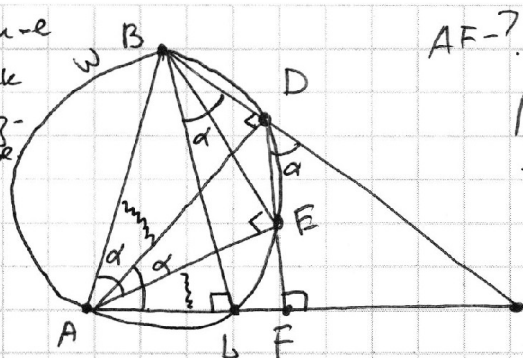
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

расши-
рять
огуз-
иачи



AF=?

AB=15 BE=10 AC=20

Пусть $\angle BAE = \alpha$,
 $\angle BDE = 180 - \alpha$ $\triangle ADE$ -
 $\angle FDC = \alpha$

Пусть $\angle PAC = \beta$

Заметим, что

$\angle AB$ - диаметр $\Rightarrow \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$
 $\angle EBF \perp AC$
 $\angle BGF \perp AC$
 $\angle BGF \parallel EF \Rightarrow \angle GBC = \angle FDC = \alpha$
 $AE = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

Заметим, что $\angle DBL = \angle DAC = \alpha$ и оба угла
~~опираются на одну и ту же дугу~~ ~~опираются~~ ~~на одну и ту же дугу~~

Заметим, что $\sin \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{2}{3}$

$\angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \angle DAC = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{DC}{AC} \Rightarrow$

$DC = \sin \alpha \cdot AC = \frac{40}{3}$ $\angle ADC = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ из т. Пифагора для $\triangle ADC$ найдем AD .

$$AD^2 = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} \cdot 20 = \frac{\sqrt{5} \cdot 20}{3}$$

Осталось заметить, что $\angle BAE = \angle BAD + \angle DAE$
 $\angle DAC = \angle DAE + \angle EAC$

$$\Rightarrow \angle BAD = \angle EAC = \angle EAF$$

и $\angle ADB = \angle AFE = 90^\circ$

$\triangle ADB \sim \triangle AFE$ по 2-м углам.

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{15}{\sqrt{5} \cdot 20} = \frac{5\sqrt{5}}{AF} \Rightarrow AF = \frac{5^2 \cdot 20}{3 \cdot 15} = \frac{100}{3}$$

Ответ: $AF = \frac{100}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Будем считать, что перед нами n коробок в ряд. И мы всегда выбираем

с.п.б коробки. Посчитаем вероятность того, что ведущий получит 3 маркеры в

эти 5 коробок. (Заметим, что эта игра эквивалентна выбору любых 5 коробок из n коробок). Заметим, что эта игра эквивалентна выбору любых 5 коробок из n коробок.

маркеры $\rightarrow$ ① ② ③

Посчитаем q_1 - вероятность

того, что ведущий получит ① в 1-й из 5

коробку: $q_1 = \frac{5}{n}$; посчитаем q_2 (у нас

осталось свободно $n-1$ коробка и 4 маркера) $\Rightarrow$

$\Rightarrow q_2 = \frac{4}{n-1}$; аналогично $q_3 = \frac{3}{n-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow p_1$ - вероятность того, что все 3 маркера

у нас в этих 5-ти коробках равна:

$$p_1 = \frac{q_1 \cdot q_2 \cdot q_3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3! \cdot (n-1)(n-2)n} = \frac{10}{n(n-1)(n-2)}$$

Во 2 ситуации у нас 8 коробок и 3 маркера

тогда $v_1 = \frac{8}{n}$; $v_2 = \frac{7}{n-1}$; $v_3 = \frac{6}{n-2}$; $p_2 = \frac{v_1 v_2 v_3}{3!}$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot (n-1)n(n-2)} = \frac{56}{n(n-1)(n-2)} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{56}{10} = 5,6 \text{ раза.}$$

Ответ: 5,6 раза.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

I $a=0$: подставим в 1 ур-е:

$$x^2 - 0 \cdot x + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \text{нет } \mathbb{R} \text{ корней}$$

II $a=1$: подставим в 1 ур-е:

$$x^2 - 0 \cdot x + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \text{нет } \mathbb{R} \text{ корней}$$

III $a=2$: подставим в оба уравнения:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0 & D = 4 + 8 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x - 148 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 74 = 0 & D = 4 + 74 \cdot 4 > 0 \end{cases} \quad (2)$$

у них есть корни тогда: по 2. Введем

$$(1) \quad k-d + k+d = 2k = 2$$

$$\boxed{k=1}$$

$$(1) \quad (k-d)(k+d) = k^2 - d^2 =$$

$$= 1 - d^2 = -2$$

$$\boxed{d^2 = 3}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$d_1 = -\sqrt{3} \quad d_2 = \sqrt{3}$$

$$(2) \quad k-5d + k+5d = 2k = 2$$

$$\boxed{k=1}$$

$$(k-5d)(k+5d) = k^2 - 25d^2 =$$

$$= 1 - 25d^2 = -74$$

$$\downarrow$$

$$25d^2 = 75$$

$$\boxed{d^2 = 3}$$

$$\downarrow$$

$$d_1 = +\sqrt{3} \quad d_2 = \sqrt{3}$$

Значит $a=2$ подходит.

Ответ: $a=2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть наша арифм. прогр. будет $\begin{matrix} 2d \neq 0 \\ d \neq 0 \end{matrix}$
такая: $a_1 = k - 7d$; $a_2 = k - 5d$; $a_4 = k - d$; $a_5 = k + d$; $a_7 = k + 5d$

$$\Rightarrow a_2 = k - 5d; a_4 = k - d; a_5 = k + d; a_7 = k + 5d$$

Т.к. они все корни уравнения,

то если мы подставим их в соотв. ~~уравнение~~ ~~функцию~~ уравнение

функции $\Rightarrow$ выражения будут равны 0.

Т.е. ~~получим~~ $\begin{cases} a_4^2 - (a^2 - a)a_4 + \frac{2-a^3}{3} = 0 \\ a_5^2 - (a^2 - a)a_5 + \frac{2-a^3}{3} = 0 \end{cases}$

с группами

Подставим a_4 и a_5 в 1 уравнение:

$$\begin{cases} (k-d)^2 - (a^2-a)(k-d) + \frac{2-a^3}{3} = 0 \quad (1) \\ (k+d)^2 - (a^2-a)(k+d) + \frac{2-a^3}{3} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

вычтем из (2)-(1):

$$(k+d)^2 - (k-d)^2 - (a^2-a)(k+d) + (a^2-a)(k-d) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4kd + (a^2-a)(-k-d+k-d) = 0 \Leftrightarrow 4kd - 2d(a^2-a) = 0$$

$$2kd \neq 0 \text{ по условию } (2d \neq 0 \Rightarrow d \neq 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{2k = a^2 - a}$$

Подставим a_2 и a_7 во 2 уравнение:

$$\begin{cases} 2(k-5d)^2 - (a^3-a^2)(k-5d) - 2a^6 - 8a - 4 = 0 \quad (1) \\ 2(k+5d)^2 - (a^3-a^2)(k+5d) - 2a^6 - 8a - 4 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(k-5d)^2 - (a^3-a^2)(k-5d) - 2a^6 - 8a - 4 = 0 \quad (1) \\ 2(k+5d)^2 - (a^3-a^2)(k+5d) - 2a^6 - 8a - 4 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

вычтем из (2)-(1):



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2(k+5d)^2 - 2(k-5d)^2 - (a^3 - a^2)(k+5d) + (a^3 - a^2)(k-5d) = 0$$

$$40kd + (a^3 - a^2)(-k - 5d + k - 5d) = 0$$

$$40kd - (a^3 - a^2) \cdot 10d = 0 \quad \text{так как } d \neq 0 \Rightarrow 4k = a^3 - a^2$$

$$4k = 2k \cdot 2, \quad a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-1) - a(a-1) = 0 \Leftrightarrow a(a-1)(a^2-a-a+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 a = 0 \Rightarrow \text{либо } \begin{cases} a=1 & \text{II} \\ a=0 & \text{I} \end{cases}$$

I $a=0$ подставим в исходные ур-е:

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0$$

$$2x^2 - 4 = 0$$

← нет действительных корней, так как $a=0$ не подходит

II $a=1$ подставим в исход. ур-е:

$$40kd - (a^3 - a^2) \cdot 10d = 0 \quad \text{Так как } d \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4k = a^3 - a^2 \quad \text{так как } 4k = 2k \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 - a^2 = 2(a^2 - a) \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow \text{либо } \begin{cases} a=0 & \text{I} \\ a=1 & \text{II} \\ a=2 & \text{III} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 6$$

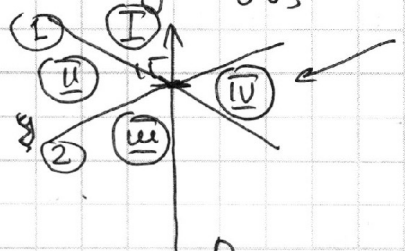
①

②

уравнение прямых. ~~касательных~~

① $y = -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15$

② $y = \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15$



неточный рисунок

Прямые разделили всю плоскость на 4 области.

Рассматриваем случай попадания $z(x_0, y_0)$ в $\forall$ из каждой из областей поотдельности.

① Заметим, что в этой области (x_0, y_0) точка лежит

выше обеих прямых $\Rightarrow \begin{cases} y_0 - 15 + \frac{x_0}{6\sqrt{3}} \geq 0 \\ y_0 - 15 - \frac{x_0}{6\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ наше пер-во превр. в $2y - 30 \leq 6$ для

$\forall$ точки в I области. $2y \leq 36 \Rightarrow \boxed{y \leq 18}$

② (x_0, y_0) лежит ниже обеих прямых $\Rightarrow \begin{cases} y_0 - 15 + \frac{x_0}{6\sqrt{3}} \leq 0 \\ y_0 - 15 - \frac{x_0}{6\sqrt{3}} \leq 0 \end{cases}$

$15 - y \leq -\frac{x}{6\sqrt{3}} \Rightarrow -y + 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \Rightarrow 30 - 2y \leq 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 24 \leq 2y \Rightarrow \boxed{y \geq 12}$ $\leftarrow$ для $\forall$ точки, лежащей в II области.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Осталось заметить, что в нам
прямую коллинеарность точек замечаем
часть
кольца где радиус малой окр. это OK ,
а радиус большой окр. это OB . + еще упр-
-близ
Пусть S_1 - площадь малой; S_2 - площадь
большой $\Rightarrow S_1 = \pi \cdot OK^2 = \pi \cdot 144$
 $S_2 = \pi \cdot OB^2 = \pi \cdot 1296$
так у $B(18\sqrt{2}; 18) \Rightarrow OB^2 = (18^2 \cdot (\sqrt{2}+1)) = 36^2 = 1296$

Значит ответ на задачу будет $S = S_2 - S_1 =$
 21653π

Ответ: 1152π

S - площадь полукольца $\hat{=} S = \frac{S_2 - S_1}{2} = \frac{1152\pi}{2} =$
 576π

у нас будет часть
кольца вида:

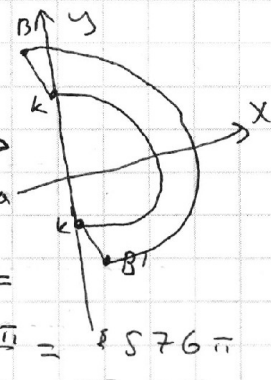
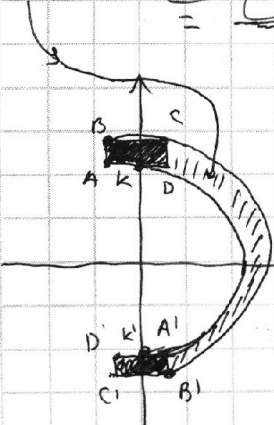
и еще надо
прибавить

если что
это половина

$+ S_{\triangle ABK} + S_{\triangle B'C'D'K'} = 1$ кольца.
 $= S_{ABCD} = AB \cdot AD = 1$ это $S = S_2 - S_1 =$
 $= 6 \cdot 36\sqrt{3} = 216\sqrt{3}$ $\Rightarrow \frac{1296 - 144\pi}{2} = 576\pi$

Ответ: $S = 576\pi + 216\sqrt{3}$

Можно так





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

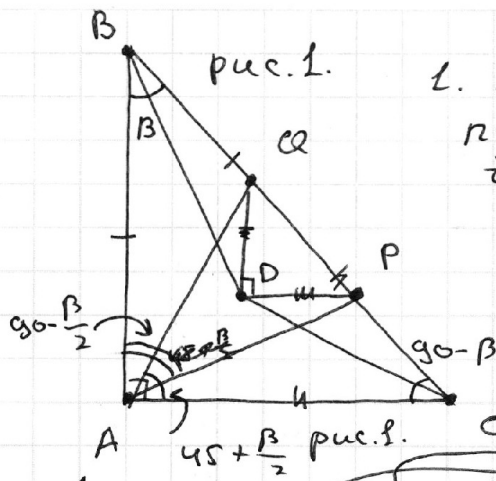


рис. 1: $\angle DBC = 435^\circ$

1. Рассмотрим угол:

$$\begin{aligned} \text{пусть } \angle ABC = \beta &\Rightarrow \angle ACB = 90 - \beta \\ \text{т.к. } AB = BP &\Downarrow \\ \angle BAP = \frac{180 - \beta}{2} &= 90 - \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{т.к. } AC = CQ &\Downarrow \\ \angle QAC = \frac{180 - 90 + \beta}{2} &= 45 + \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

$$\text{т.к. } \angle BAC = 90^\circ$$

$$\angle BAP = 90 - \frac{\beta}{2}$$

$$\angle PAC = \frac{\beta}{2}$$

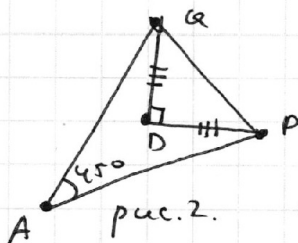
$$\angle QAP = \angle QAC - \angle PAC = 45^\circ$$

(точки ~~Q~~ на B и P равны, или же в таком расположении AB AC

порядке т.к. если $BP \leq CQ \Rightarrow BC \geq BP + CQ = k$

Значит $\angle QAP = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle ACP$ с пер-вом Δ остроу.



Обратимся к рис. 2. Заметим, что

$$\text{т.к. } QD = PD$$

т. D лежит на середине к QP и $\angle QDP =$

$\angle QAP$ остроугольный с внешн. $= 90^\circ$

Рассм. серию к QP:

$$\angle QD_1P + \angle D_1QD_2 + \angle D_2PD_1$$



Заметим, что $\angle QD_2P < \angle QD_1P \Rightarrow$ при движении точки D по серии в одном

направлении $\angle QDP$ монотонно изменяется,

$\Rightarrow$ т.к. т. D лежит внутри $\Delta ABC \Rightarrow \exists$ 1 исключение при котором $\angle PDQ = 90^\circ$ и т.к. $\angle QAP = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow D$ - центр описанн. окруж. (APQ). $\Rightarrow D$ лежит на серии к AP и AQ.



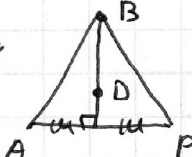
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\left\{ \begin{array}{l} \text{т.к. } D \text{ лежит на биссектрисе к } AP \\ \text{т.к. } BA = BP \Rightarrow B \text{ тоже лежит на биссектрисе к } AP \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~тоже~~ B  $\Rightarrow \angle BD$ - биссектриса $\angle ABP$
(или BD - биссектриса к AP) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle DBP = \angle DBC = 35^\circ = \frac{\angle ABC}{2} \Rightarrow \boxed{\angle ABC = 70^\circ}$$

Аналогично CD - бисс. $\angle ACB \Rightarrow \boxed{\angle DCB = \frac{\angle ACB}{2}}$

$$\text{и } \angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - \angle ABC = 20^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\angle DCB = 10^\circ} \quad \angle PAC$$

Ответ: $\angle DCB = 10^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{ccc} (k-5d) & (k+5d) & \leftarrow 2 \\ k-d & k+d & \leftarrow 1 \end{array}$$

$$k+d-k+d$$

$$k^2 + d^2 - 2kd - (a^2 - a)(k-d) + \frac{2-a^3}{3} = 0$$

$$k^2 + d^2 + 2kd - (a^2 - a)(k+d) + \frac{2-a^3}{3} = 0$$

$$-k-d+k-d$$

$$4kd + (a^2 - a) \cdot 2d = 0$$

$$k+5d-k+10d$$

$$2k + a^2 - a = 0$$

$$a - a^2 = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$x^2 - \frac{(a^3 - a^2)}{2}x - 2a^6 - 4a - 2 = 0$$

$$(k+5d)^2 - \frac{a^3 - a^2}{2} \cdot (k+5d) - \dots = 0$$

$$(k-5d)^2 - \frac{a^3 - a^2}{2} (k-5d) - \dots = 0$$

$$20kd - \frac{a^3 - a^2}{2} \cdot 10d = 0$$

$$2k - \frac{a^3 - a^2}{2} = 0$$

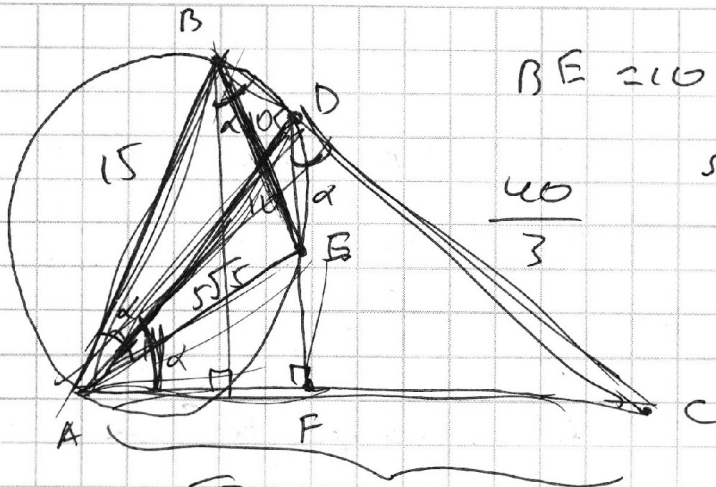


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BE = 10 \quad AB = 15 \quad AC = 20$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3}$$

$$DC = \frac{40}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$x = -4 - y - z$$

$$\frac{20\sqrt{5}}{3}$$

$$x < 0$$

$$y < 0$$

$$x + y + z = -4$$

$$xy + yz + xz = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

$$AF = \frac{28 \cdot 20}{4\sqrt{5}} = \frac{140}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{AF}{20\sqrt{5}} = \frac{1}{15}$$

$$16 + z^2 + y^2 + 8y + 2yz + 8z + 4z^2 + 4y^2 = 16$$

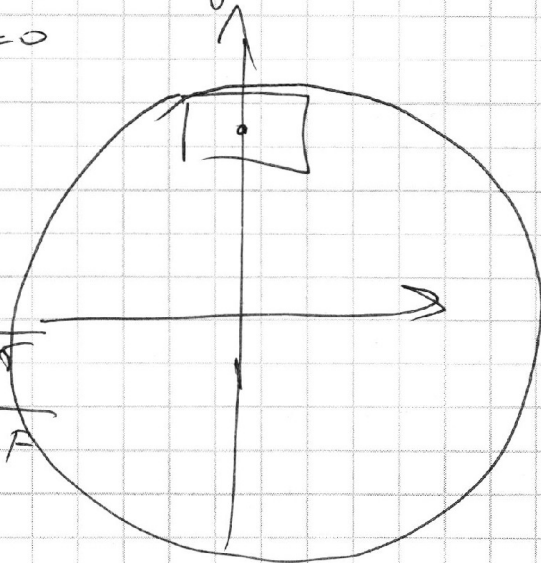
$$z^2 + y^2 + 4z + 4y + yz = 0$$

$$-128 - (16 - 4)$$

$$144$$

$$\frac{45}{20\sqrt{5}} = \frac{9}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{AF}$$

$$AF = \frac{100}{9}$$



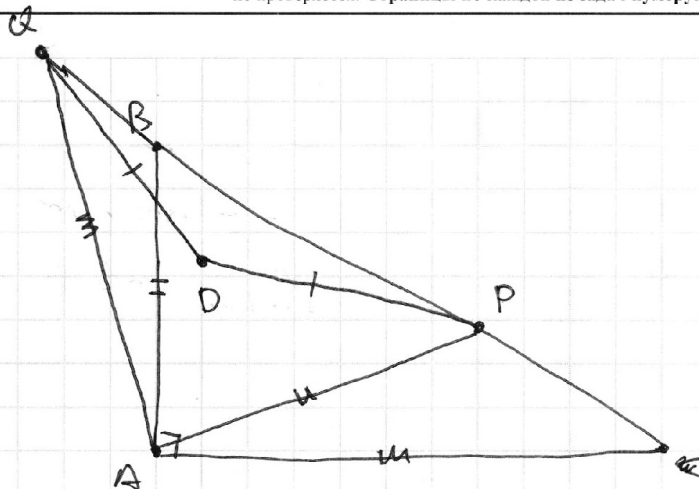


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

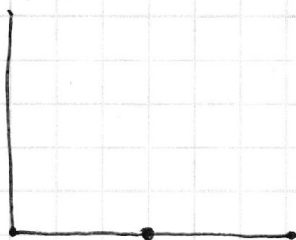
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

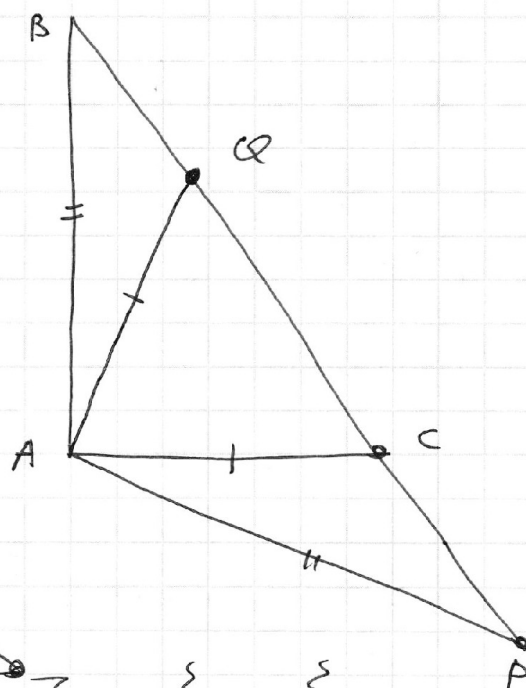
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$-\frac{5}{19} = \frac{5}{28}$$



$$\frac{5}{28}$$



$$98-$$

$$+\frac{5}{91} = \frac{5}{28}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{91}$$

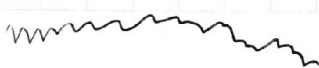
$$+$$

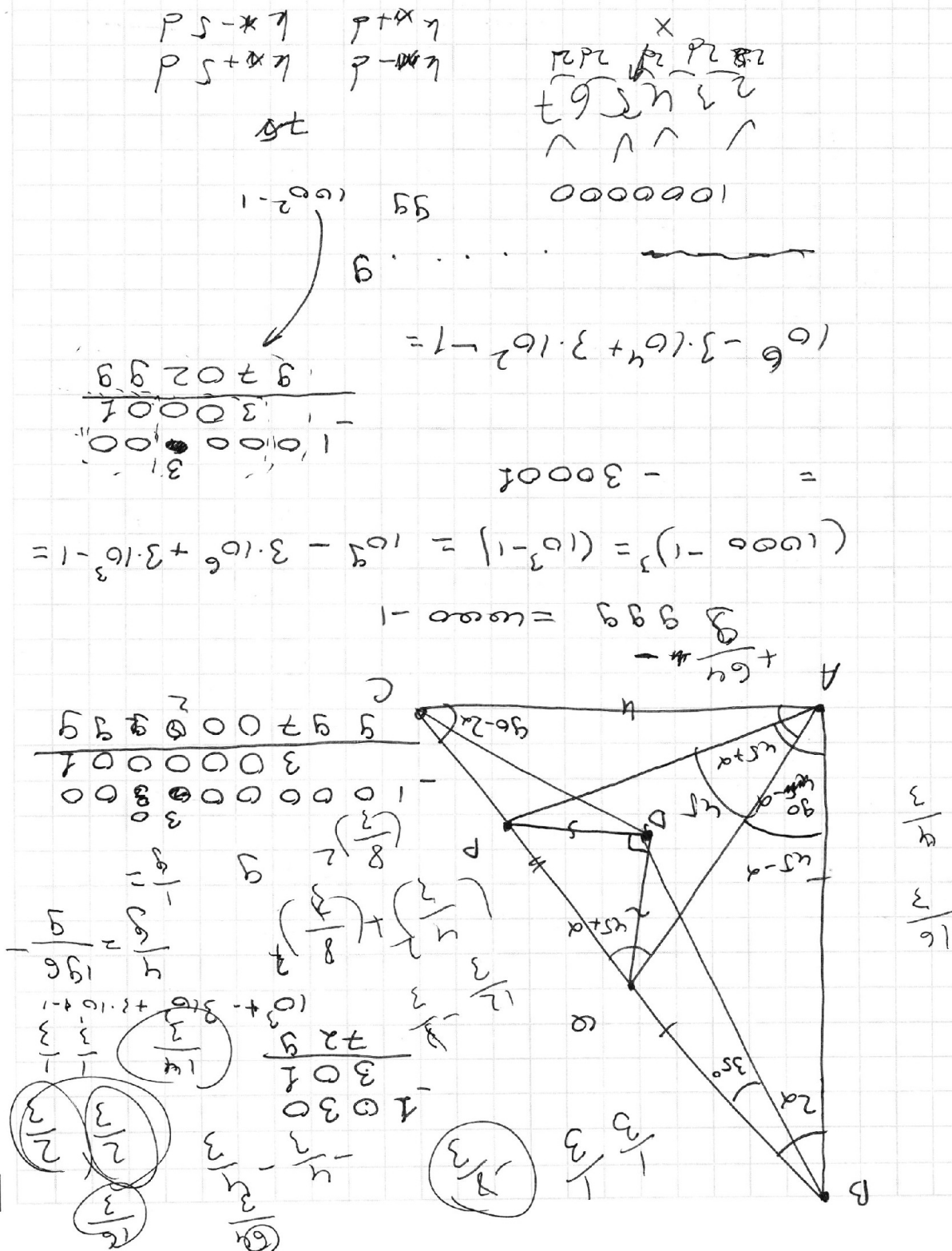
$$\frac{5}{28} + \frac{5}{8}$$

$$\frac{5}{8}$$

$$\frac{5}{8}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{91}$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = z^3 + 4z^2 \\ xyz = 4x^3 + 4x^2 \\ xyz = y^3 + 4y^2 \end{cases}$$

$$\cancel{z^3 + 4z^2} \quad x^3 + 4x^2 = y^3 + 4y^2$$

$$x^3 - y^3 + 4x^2 - 4y^2 = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 4(x+y)(x-y) = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 4x + 4y) = 0$$

$$y^2 + (x+4)y + x(x+4) = 0$$

$$x^2 = yz - 4x$$

$$\begin{matrix} x^2 + 8x + 16 + \\ + y^2 + 8y + 16 + \\ + z^2 + 8z + 16 \end{matrix}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 4x + 4y) = 0$$

$$y^2 + (x+4)y + x(x+4) = 0$$

$$\cancel{D = x^2 + 8x + 16 - 4x^2 - 16x = -3x^2 - 8x + 16}$$

$$(x-y)(yz + xy + zx) = 0$$

$$k^2 = 4k + k^2$$

$$x = y = z = k \quad x + y + z = ?$$

$$k^2 = 4k + k^2 \Rightarrow \text{н.п.}$$

$$yz + xy + zx = 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 + 4y + z^2 + 4z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2$$

$$-4(\dots) = (\dots)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{2} = 0$$

4, 5

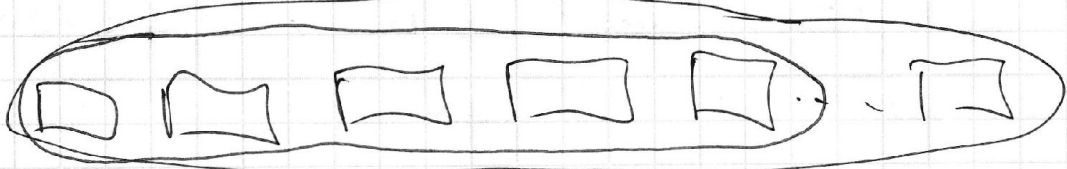
~~$$2x^2 - (a^3 - a^2)x + \frac{2 - a^3}{2} - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$~~

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

2, 7

~~$$b = a^6 - 2a^5 + a^4 + 16a^6 - 8a$$~~

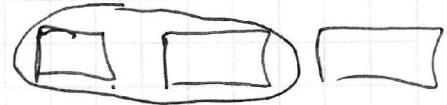
$$2x^2 - 2(a^2 - a)x + 2 - a^3 = 0$$



и ии.

1 2 3

6!



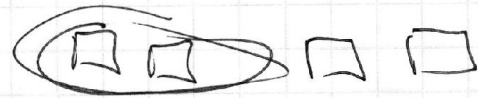
1 2

$$\frac{5}{n} \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n} = p$$

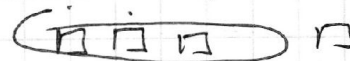
$$\frac{\frac{5}{n} \cdot \frac{4}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2}}{6!} = p_2$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6^2}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{28}{5}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6! \cdot (n-1)n(n-2)} = p_2$$



$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$