



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



- 4 1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

- † 2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

- † 3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.

- † 4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

- † 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.

- † 6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$ (по условию) $\sqrt{1}$

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 & (1) \\ yz = -6x + x^2 & (2) \\ zx = -6y + y^2 & (3) \end{cases}$$

Решение:

① (1)-(2): $xy - yz = 6x - 6z + z^2 - x^2$

$$y(x-z) = 6(x-z) + (z-x)(z+x)$$

$$(z-x)(x+z) - 6(z-x) + y(z-x) = 0$$

$$(z-x)(x+y+z-6) = 0 \Rightarrow (a) \begin{cases} z = x \\ x+y+z = 6 \end{cases}$$

Аналогично при (1)-(3) и (2)-(3) получим:

$$(b) \begin{cases} y = z \\ x+y+z = 6 \end{cases} \text{ и } (b) \begin{cases} x = y \\ x+y+z = 6 \end{cases}$$

② 4 случая, когда в (a), (b) и (b) верны 1 утверждение:

$$x = z; y = z; x = y \Rightarrow x = y = z$$

$\Rightarrow x^2 = -6x + x^2 \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0$, что противоречит условию $\Rightarrow$ не может быть.

③ Заметим, что если верны первые утверждения в двух совокупностях из (a), (b) и (b), то аналогично $x = y = z \Rightarrow$ аналогично п.② не может быть.

④ Если будет верна 1 верхняя и 2 нижние, то значения будут получаться одинаковыми, но для разных переменных. Тогда без ограничения общности рассмотрим $\begin{cases} x = y \\ x+y+z = 6 \end{cases}$:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подставим в первоначальную систему:

$$\begin{cases} x^2 = -6z + z^2 \\ xz = -6x + x^2 \\ xz = -6x + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \text{ чего не может быть} \\ z = -6 + x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} z &= x - 6 \\ x^2 &= -6(x-6) + (x-6)^2 \\ x^2 &= 36 - 6x + x^2 - 12x + 36 \\ 18x &= 36 \cdot 2; \quad x = \frac{36 \cdot 2}{18} = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = x = 4 \\ z = -6 + x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

В других случаях получим аналогично

$$(4; -2; 4) \text{ и } (-2; 4; 4), \text{ тогда: } (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (4-6)^2 + (4-6)^2 + (-2-6)^2 = 4 + 4 + 64 = 72$$

⑤ Рассмотрим случай, когда верно только $x+y+z=6$.

$$(1) + (2) + (3): xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z$$

$$3(xy + xz + yz) = (x+y+z)^2 - 6(x+y+z)$$

$$\Rightarrow \cancel{x+y+z} \quad xy + xz + yz = \frac{6^2 - 6 \cdot 6}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{x+y+z} \quad (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 6^2 = 36$$

$$\text{Тогда: } (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) + 36 \cdot 3 = 36 - 12 \cdot 6 + 36 \cdot 3 = 72$$

Рассмотрев все случаи, получим только 72.

Ответ: 72.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$n = \overbrace{999\dots 9}^{20001 \text{ раз}}$$

$$\Rightarrow n^3 = \overbrace{99\dots 9}^{20001 \text{ раз}}^3 = \left(\overbrace{100\dots 00}^{20001 \text{ раз}} - 1 \right)^3 = \overbrace{\left(10\dots 0 \right)^3}^{(1)} - 3 \cdot \overbrace{\left(10\dots 0 \right)^2}^{(2)} + 3 \cdot \overbrace{\left(10\dots 0 \right)}^{(2)} - 1 = (1) + (2) = \overbrace{9\dots 9}^{20000 \text{ раз}} \overbrace{70\dots 0}^{20001 \text{ раз}} \overbrace{9\dots 9}^{20001 \text{ раз}}$$

$$(1): \begin{array}{r} \overbrace{100\dots 00}^{20001 \text{ раз}} \overbrace{00\dots 00}^{40002 \text{ раз}} \\ - \overbrace{30\dots 00}^{20001 \text{ раз}} \overbrace{00\dots 00}^{40002 \text{ раз}} \\ \hline \overbrace{99\dots 99}^{20000 \text{ раз}} \overbrace{70\dots 00}^{40002 \text{ раз}} \end{array}$$

$$(2): \begin{array}{r} \overbrace{100\dots 00}^{20001 \text{ раз}} \\ - \overbrace{100\dots 00}^{20001 \text{ раз}} \\ \hline \overbrace{99\dots 99}^{20001 \text{ раз}} \end{array}$$

$$(1) + (2): \begin{array}{r} \overbrace{99\dots 99}^{20000 \text{ раз}} \overbrace{70\dots 00}^{20001 \text{ раз}} \overbrace{99\dots 99}^{20001 \text{ раз}} \\ + \overbrace{99\dots 99}^{20001 \text{ раз}} \\ \hline \overbrace{99\dots 99}^{20000 \text{ раз}} \overbrace{70\dots 00}^{20001 \text{ раз}} \overbrace{99\dots 99}^{20001 \text{ раз}} \end{array}$$

Значит ответ: $20000 + 20001 = 40001$ (шт.)

Ответ: 40001.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°3.

Дано: $AC=20$
 $AB=10$; $BE=9$.

Решение:

① $\angle BDA$ и $\angle BEA$ - впис, опираются на дугу $AB \Rightarrow \angle BDA = \angle BEA = 90^\circ$
 $\angle CDA = 180^\circ - \angle BDA = 90^\circ$ (линей)

② Пусть $\angle BAE = \alpha$, тогда

$BDEA$ - впис 4-х уг

$\Rightarrow \angle BDE + \angle BAE = 180^\circ$

(по впис 4-х уг)

$\Rightarrow \angle BDE = 180^\circ - \alpha$;

$\angle CDE = 180^\circ - \angle BDE = \alpha$ (линей)

③ $\triangle CFD$ и $\triangle BEA$:

$\angle CDF = \angle BAE = \alpha$;

$\angle CDF = \angle BEA = 90^\circ$;

$\Rightarrow \triangle CFD \sim \triangle BEA$ по 2-м.

$\Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{BA}{CD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CD}{CF} = \frac{BA}{BE} = \frac{10}{9}$;

пусть $CF = 9x$, тогда $CD = 10x$.

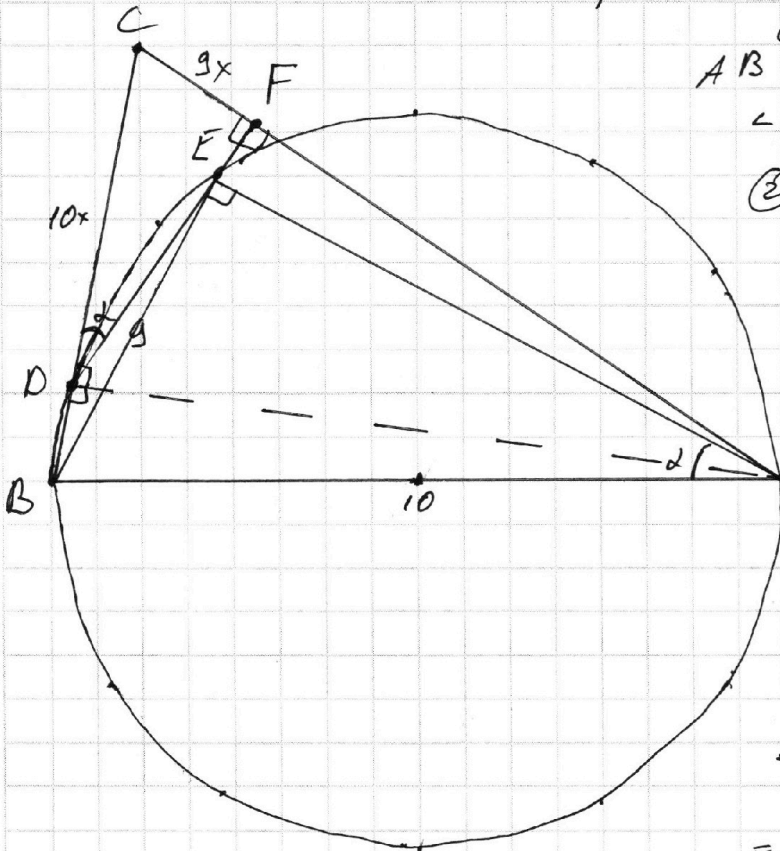
④ $\triangle CFD$ и $\triangle CDA$: $\angle CDF = \angle CDA = 90^\circ$
 $\angle DCF$ - общий $\Rightarrow \triangle CFD \sim \triangle CDA$ по 2-м.

$\Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CD^2}{CF} = \frac{(10x)^2}{9x} = \frac{100x}{9}$

⑤ $AC = \frac{100x}{9}$ (из п. 4)
 $AC = 20$ (по усл) $\Rightarrow \frac{100x}{9} = \frac{20}{1} \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 9}{100} = \frac{9}{5}$.

⑥ $AF = AC - CF = \frac{100x}{9} - 9x = \frac{100x - 81x}{9} = \frac{19x}{9} = \frac{19 \cdot 9}{9 \cdot 5} = 3,8$.

Ответ: $AF = 3,8$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°4.

Без ограничения общности пусть коробок будет

n , при этом $n \geq 9$, так как максимально будет

3 порохов. Тогда всего вариантов положить 3

шара в n порохов: C_n^3 - кол-во сочетаний 3 из n .

1) Когда он взял 5 порохов, то благоприятных вариантов, когда 3 шара были в 5 пороках: C_5^3
Значит вероятность была: $P_0 = \frac{C_5^3}{C_n^3}$

2) Когда он взял 9 порохов, то благоприятных вариантов, когда 3 шара были в этих 9 коробках стало C_9^3 , значит вероятность:
 $P_1 = \frac{C_9^3}{C_n^3}$

3) Найдём во сколько раз вероятность увели-

чилась: $P_1 : P_0 = \frac{C_9^3}{C_n^3} : \frac{C_5^3}{C_n^3} = \frac{C_9^3 \cdot C_n^3}{C_5^3 \cdot C_n^3} =$

$$= \frac{9!}{3!6!} : \frac{5!}{3!2!} = \frac{9! \cdot 3! \cdot 2!}{3! \cdot 6! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 8^3}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{21 \cdot 4}{10} = \frac{84}{10} = 8,4.$$

Ответ: 8,4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°5.

$$(1) x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

x_1, x_2 - корни, где

$$x_1 = a_6; x_2 = a_4,$$

$$(2) 5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$$

$$x^2 - \frac{a^3 - 4a^2}{5}x - \frac{2a^3 + 6a + 15}{5} = 0 \quad | \cdot 5$$

x_3, x_4 - корни, где

$$x_3 = a_5; x_4 = a_8$$

где $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ - арифметическая прогрессия. Тогда:

$$(a) \begin{cases} x_1 = a_6 = a_5 + d, \text{ где } d - \text{разность прогрессии.} \\ x_2 = a_4 = a_5 - 2d. \\ x_3 = a_5 \\ x_4 = a_8 = a_5 + 3d. \end{cases}$$

По Т. Виета для (1) и (2) имеем:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - 4a \quad (3) \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 - 6a + 4 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_3 + x_4 = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \quad (4) \\ x_3 \cdot x_4 = -\frac{2a^3 + 6a + 15}{5} \end{cases}$$

Подставим в (3) и (4) (a), получим:

$$\begin{cases} a_5 + d + a_5 + 2d = a^2 - 4a \\ a_5 + a_5 + 3d = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_5 + 3d = a^2 - 4a \\ 2a_5 + 3d = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \cdot 5; \quad 5a^2 - 20a - a^3 + 4a^2 = 0.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5a(a-4) - a^2(a-4) = 0$$

$$(5a - a^2)(a-4) = 0; \quad a(5-a)(a-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-4=0 \\ 5-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=5 \end{cases}$$

Подставим данные значения в первоначаль-
ные уравнения (1) и (2):

$$I) a=0: (1): x^2 - (0-0)x + 0 - 0 + 4 = 0.$$

$x^2 + 4 = 0$; $x^2 = -4$, ~~что не~~
~~имеет корней~~, значит $a=0$ не подходит, т.к.
по условию 2 корня.

$$II) a=4: (1) \quad x^2 - (16-16)x + 16 - 6 \cdot 4 + 4 = 0.$$

$$x^2 + 20 - 24 = 0; \quad x^2 - 4 = 0; \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \text{ (пог. Виета)}$$

$$(2): 5x^2 - (4^3 - 4 \cdot 4^2)x - 2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4 - 15 = 0.$$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0; \quad x^2 = \frac{164}{5}; \quad \begin{cases} x_3 = \sqrt{\frac{164}{5}} \\ x_4 = -\sqrt{\frac{164}{5}} \end{cases}$$

По условию корни первого - это a_6 и a_4 , тогда:

$$\begin{cases} a_6 = 2 \\ a_4 = -2 = a_6 + d \end{cases}$$

$$-d = 4; \quad d = -4.$$

$$\Rightarrow a_5 = a_6 - d = 6, \text{ но}$$

$$\begin{cases} x_3 \neq 6 \\ x_4 \neq 6 \end{cases} \Rightarrow \text{не может быть}$$

$$\begin{cases} a_6 = -2 \\ a_6 + d = a_4 = 2 \end{cases}$$

$$-d = -4; \quad d = 4$$

$$\Rightarrow a_5 = a_6 - d = -2 - 4 = -6, \text{ но}$$

$$\begin{cases} x_3 \neq -6 \\ x_4 \neq -6 \end{cases} \Rightarrow \text{не может быть}$$

$$\Rightarrow a \neq 4.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III) $a=5$; (1): $x^2 - (5^2 - 4 \cdot 5)x + 5^2 - 6 \cdot 5 + 4 = 0$.

$$x^2 - 5x + 25 - 30 + 4 = 0.$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0.$$

$$D = 25 - 4 \cdot (-1) = 29; \begin{cases} x_1 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \\ x_2 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

(2): $5x^2 - (5^2 - 4 \cdot 5^2)x - 2 \cdot 5^3 - 6 \cdot 5 - 15 = 0$. $/:5$

$$x^2 - (5^2 - 4 \cdot 5)x - 2 \cdot 5^2 - 6 - 3 = 0.$$

$$x^2 - 5x - 50 - 9 = 0; \quad x^2 - 5x - 59 = 0.$$

$$D = 25 - 4 \cdot (-59) = 261 = (3\sqrt{29})^2$$

$$x_3 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

$$x_4 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}$$

По укл. найдем x_1 и x_2 - это a_6 и a_4 :

$$a_6 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$a_4 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$a_6 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$a_4 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$-d = \frac{5 + \sqrt{29} - 5 + \sqrt{29}}{2} = \sqrt{29}$$

$$d = -\sqrt{29}$$

$$-d = \frac{5 - \sqrt{29} - 5 + \sqrt{29}}{2} = -\sqrt{29} \Rightarrow d = \sqrt{29}$$

$$\Rightarrow a_5 = a_6 - d = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} = x_4$$

$$\Rightarrow a_5 = a_6 + d = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} + \sqrt{29} = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2} = x_3$$

$$a_8 = a_4 + d = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} + \sqrt{29} = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2} = x_3$$

$\Rightarrow a = 5$ - подходит.

$$x_3 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2} = a_5$$

$$a_8 = a_4 + d = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}$$

$$x_4 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} = a_8$$

Таким образом, подходит только $a = 5$.

Ответ: 5.

$\Rightarrow a = 5$ - подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

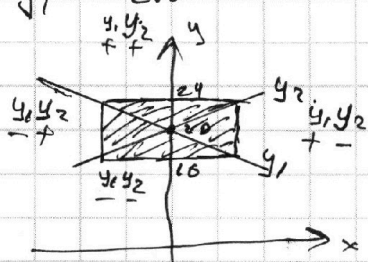
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°6.

$$\left| y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 8.$$

$$y_1 = -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$y_2 = \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20.$$



① Построим график:

$$1) \begin{cases} y_1 \geq 0; \\ y_2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8 \\ y - 20 \leq 4 \\ y \leq 24. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y_1 < 0; \\ y_2 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -y + 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} - y + 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8 \\ -y + 20 \leq 4 \\ 16 \leq y \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y_1 \geq 0; \\ y_2 < 0; \end{cases}$$

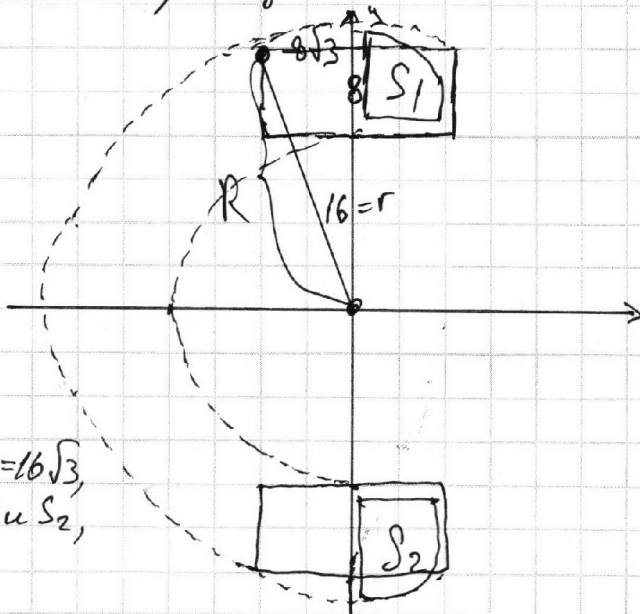
$$y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} - y + 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8. \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8; \quad x \leq 8\sqrt{3}$$

$$4) \begin{cases} y_1 < 0; \\ y_2 \geq 0; \end{cases} \quad -y + 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8; \quad -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8 \\ x \geq -8\sqrt{3}$$

Заметим, что у нас получится прямоугольник со сторонами 8 и $16\sqrt{3}$.

② Построим множество M , получаемое при повороте P на π против часовой стрелки:

Заметим, что площадь данной фигуры — половина. Фигура между окружностями, радиусов 16 и R , где R по теореме $R = \sqrt{2^2 + 16^2} = 8\sqrt{3+3} = 16\sqrt{3}$, не считая при этом S_1 и S_2 , то есть $S_M = \frac{(\pi R^2 - \pi r^2)}{2} + S_1 + S_2$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7

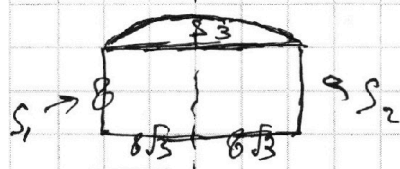


СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

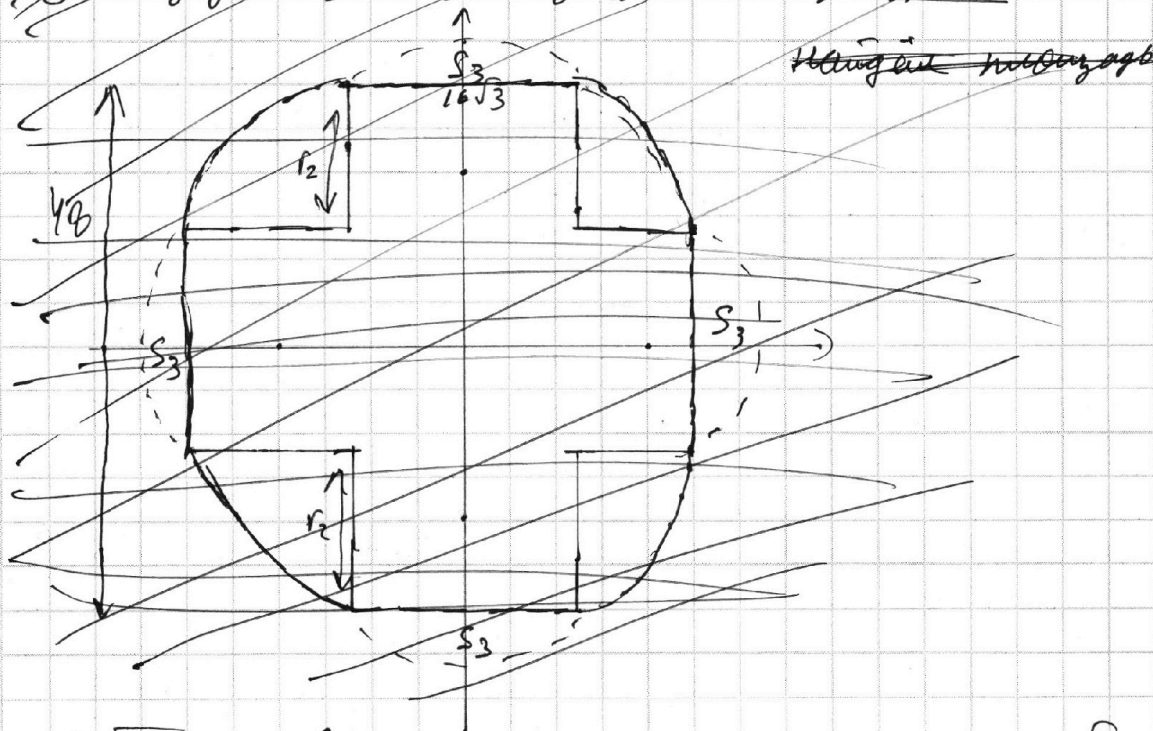
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② Найдём $S_1 + S_2$, как площадь прямоугольника и S_3 :

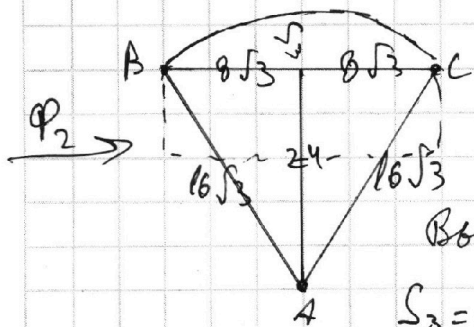


$$\Rightarrow S_1 + S_2 = 8 \cdot 16\sqrt{3} + S_3$$

~~③ Площадь S_3 найдём из формулы:~~



③ Площадь S_3 найдём из части $\omega \subset R = 16\sqrt{3}$:



Заметим что $\triangle ABC$ - $\triangle$
т.к. $AB = AC = BC = 16\sqrt{3} \Rightarrow \angle A = 60^\circ$
т.е. это $\frac{1}{6}$ от всех ω , т.к. $60^\circ \cdot 6 = 360^\circ$

$$\Rightarrow S_{\varphi_2} = \frac{1}{6} \cdot \pi (16\sqrt{3})^2 = \frac{16^2 \cdot 3 \pi}{6} = 128\pi$$

Вычтем из этого $S_{\triangle ABC}$ и получим S_3 :

$$S_3 = 128\pi - \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16\sqrt{3} = 128\pi - 192\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \text{ Чз п.2: } S_1 + S_2 = 8 \cdot 16\sqrt{3} + 128\pi - 12 \cdot 16\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = 128\pi - 4 \cdot 16\sqrt{3}$$

Тогда вернёмся в пункт 2.

$$S_{\text{ш}} = \frac{\pi \cdot (16\sqrt{3})^2 - \pi \cdot 16^2}{2} + 128\pi - 4 \cdot 16\sqrt{3} =$$

$$= \frac{\pi}{2} (16^2 \cdot 3 - 16^2) + 128\pi - 4 \cdot 16\sqrt{3} = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 16^2 + 128\pi - 64\sqrt{3} =$$

$$= 256\pi + 128\pi - 64\sqrt{3} = 384\pi - 64\sqrt{3}$$

Ответ: $384\pi - 64\sqrt{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$$AB = BP$$

$$AC = CQ$$

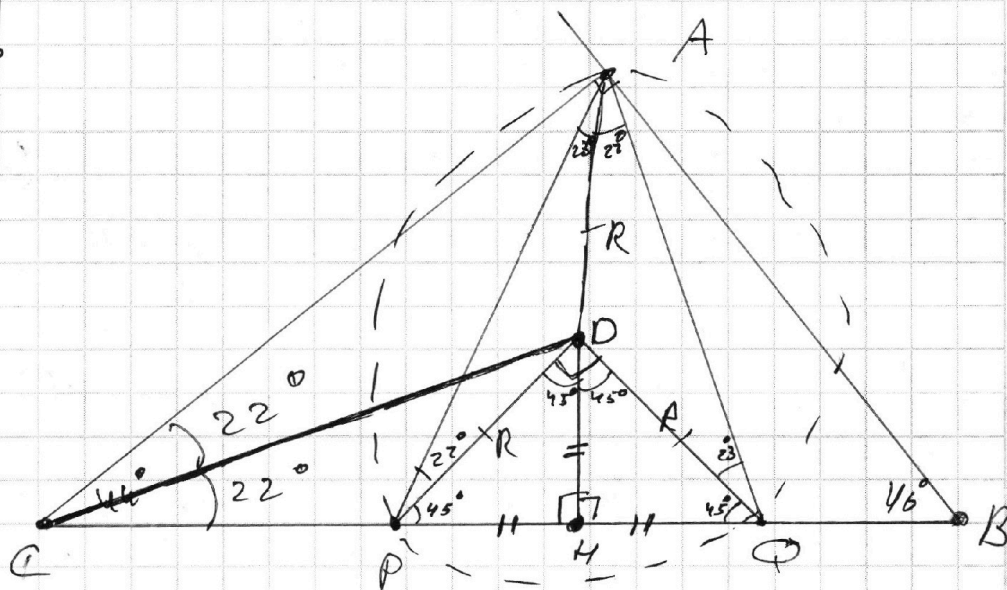
$$DP = DQ$$

$$\angle PDQ = 90^\circ$$

$$\angle CBA = 46^\circ$$

$$\angle DCB = ?$$

Решение:



$$① DP = DQ \Rightarrow \triangle PDQ - \text{пр } \triangle (\text{по гипотенузе})$$

$$\Rightarrow \angle DPQ = \angle DQP = \frac{180^\circ - \angle PDQ}{2} = 45^\circ (\text{по св. пр. } \triangle)$$

$$\Rightarrow \text{Проведем } DH - \text{выс.} \Rightarrow DH - \text{мед. к } \triangle PDQ$$

$$PDQ (\text{по св. пр. } \triangle) \Rightarrow \angle PDH = \angle QDH = 45^\circ$$

$$② \angle ACB = 90^\circ - \angle CBA = 44^\circ (\text{по т. о. } \angle \text{ в } \triangle \text{ с } \angle \text{ в } \triangle)$$

$$1) AB = BP (\text{по усл.}) \Rightarrow \triangle ABP - \text{пр } \triangle (\text{по гипотенузе}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - \angle PBA}{2} = 67^\circ \Rightarrow \angle DPA = 67^\circ - 45^\circ = 22^\circ$$

$$2) \text{аналогично } \angle BQA = 23^\circ \text{ тогда по т. о. } \angle \text{ в } \triangle APQ:$$

$$\angle PAQ = 45^\circ, \text{ тогда можем построить } \triangle APQ$$

$$\triangle APQ, \text{ а } D - \text{будет центром, т.к. } \angle PDQ = 2\angle PAQ, \text{ как центральный } \triangle$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и $\angle$ делит на ср. перп. отк $PQ \Rightarrow$
(сегментное расположение)
 $\Rightarrow DP = DQ = DA = R$

② $\triangle DCA$ и $\triangle DCQ$:

$$AD = QD = R.$$

CD - осев

$CQ = CA$ (по условию)

$$\left. \begin{array}{l} AD = QD = R \\ CD - \text{осев} \\ CQ = CA \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle DCA = \triangle DCQ \text{ по трём сторонам.}$$

$$\Rightarrow \angle ACD = \angle QCD = \frac{\angle ACQ}{2} = 22^\circ$$

Ответ: 22°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 = ?$$

$$x \neq 0 \quad y \neq 0 \quad z \neq 0.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z - xy - yz - zx = 0.$$

$$(x+y+z)^2 - 3(xy+xz+yz) - 6(x+y+z)$$

$$xy - yz = 6x - 6z + z^2 - x^2$$

$$y(x-z) = 6(x-z) + (z-x)(x+z)$$

$$(z-x)(x+z) - 6(z-x) + y(z-x) = 0.$$

$$(z-x)(x+z-6+y) = 0.$$

$$z=x$$

$$x=y$$

$$y=z$$

$$x+y+z=6$$

$$x+y+z=6.$$

$$x+y+z=6.$$

$$x^2 = x^2 - 6x$$

$$\cancel{x}$$

$$x = x - 6.$$

$$y \cdot y =$$

$$2$$

$$1 \quad 36$$

$$4$$

$$144$$

$$x \quad 12$$

$$6$$

$$42$$

$$42$$

$$144$$

$$42$$

$$42$$

$$I) x^2 = x^2 - 6x, x=0 \quad \emptyset.$$

$$II) z=x=y \rightarrow \emptyset.$$

$$x=z$$

$$x+y+z=6$$

$$y \cdot y = -6 \cdot y + y^2 = y(y-6).$$

$$xy = -6x + x^2$$

$$xy = -6x + x^2 \rightarrow y = -6 + x.$$

$$x^2 = -6y + y^2$$

$$x^2 = -6(-6+x) + (x-6)^2$$

$$x^2 = 36 - 6x + x^2 - 12x + 36$$

$$18x = 36 \cdot 2 \quad | :18$$

$$x=4$$

$$y \cdot y = -2.$$

$$16 = 12 + y^2$$

$$y \cdot y = -6 \cdot (-2) + 2^2 =$$

$$2=4$$

$$y = -6 + 4 = -2.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n паровозов - 3 марша.

$$\frac{C_5^3}{C_n^3} = \frac{5!}{3!2!} : \frac{n!}{3!(n-3)!} - \text{было.}$$

$$\frac{C_9^3}{C_n^3} = \frac{9!}{3!6!} \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} - \text{стало.}$$

$$\begin{aligned} \frac{9!n!}{3!6!3!(n-3)!} : \frac{5!n!}{3!2!3!(n-3)!} &= \frac{9!n!8!2!3!(n-3)!}{8!6!3!(n-3)!5!n!} = \\ &= \frac{9!2!}{6!5!} = \frac{4 \cdot \cancel{6}^2 \cdot 3}{\cancel{8} \cdot \cancel{4} \cdot 3} = \frac{42}{5} = 8,4. \end{aligned}$$

$$= \frac{19}{9} \cdot \frac{5}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

x_1, x_2

" "

a_6, a_4

$$a_6 \cdot a_4 = a^2 - 6a + 4$$

$$a_6 + a_4 = a^2 - 4a$$

$$a_5 + d = a_5 + 2d$$

$$2a_5 + 3d = a^2 - 4a$$

$$a_6(a_6 + d) = 4 - 4$$

$$(a_6 - d)(a_6 + 2d) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \quad | :5$$

$$5a^2 - 4a - a^3 + 4a^2 = 0$$

$$5a(a - 4) - a^2(a - 4) = 0$$

$$a(a - 4)(5 - a) = 0$$

$$a = 0$$

$$a - 4 = 0$$

$$a = 4$$

$$5 - a = 0$$

$$a = 5$$

$$a = 0: x^2 + 4 = 0$$

$$a = 4:$$

$$x^2 + 16 - 24 + 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2$$

$$x = 2$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0 \quad | :5$$

$$x^2 - \frac{(a^3 - 4a^2)}{5}x - \left(\frac{2a^3 + 6a + 15}{5}\right) = 0$$

4

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 8 \\ \hline 128 \end{array}$$

x_3, x_4

" "

a_5, a_8

$$128 + 24 + 15$$

$$a_5 \cdot a_8 = -\frac{2a^3 + 6a + 15}{5}$$

$$a_5 + a_8 = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$$a_5 + 2d$$

$$2a_5 + 3d = \frac{a^3 - 4a^2}{5} + \frac{128}{5} + \frac{24}{5} + \frac{15}{5}$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 4 \\ \hline 64 \\ \hline 128 \\ \hline 24 \\ \hline 15 \\ \hline 164 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 59 \\ 4 \\ \hline 236 \\ \hline 25 \\ \hline 261 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ 9 \\ \hline 261 \end{array}$$

$$5x^2 - (4^3 - 4^2)x - 2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4 - 15 = 0$$

$$x^2 = \frac{164}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

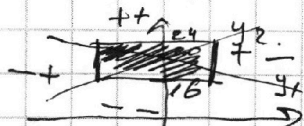
7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8.$$

$$y = 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$$



$$y_2 = 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$++: y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$2y - 40 \leq 8$$

$$y - 20 \leq 4; y \leq 24$$

$$--: -y + 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} - y + 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$-2y + 40 \leq 8$$

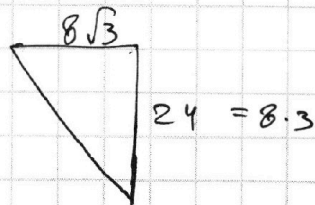
$$-y + 20 \leq 4$$

$$16 \leq y$$

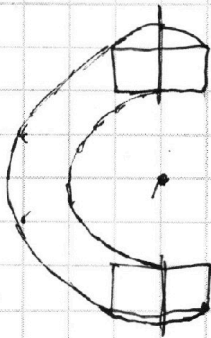
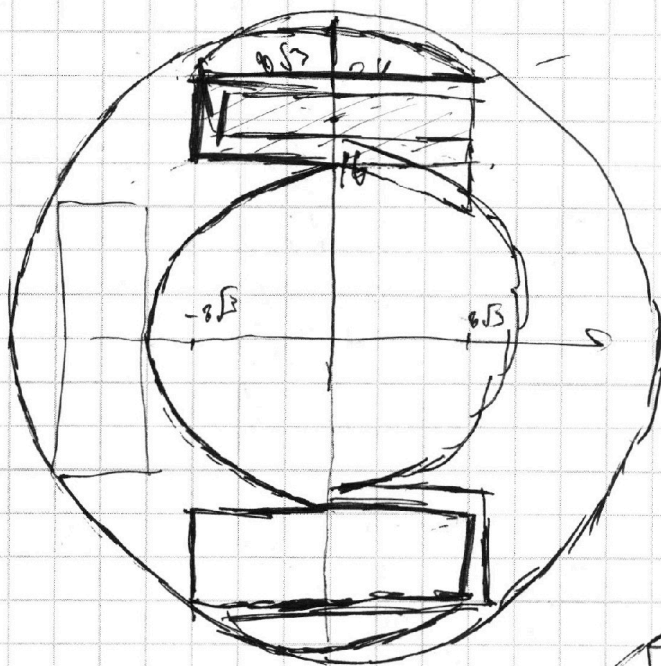
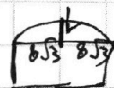
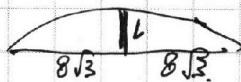
$$+-: y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} - y + 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8; x \leq 8\sqrt{3}$$

$$5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 8$$



$$\sqrt{8^2 \cdot 3 + 24^2 \cdot 3^2} = 8\sqrt{3+9} = 16\sqrt{3} \quad 24 : 3 = 8$$





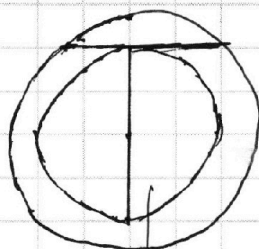
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

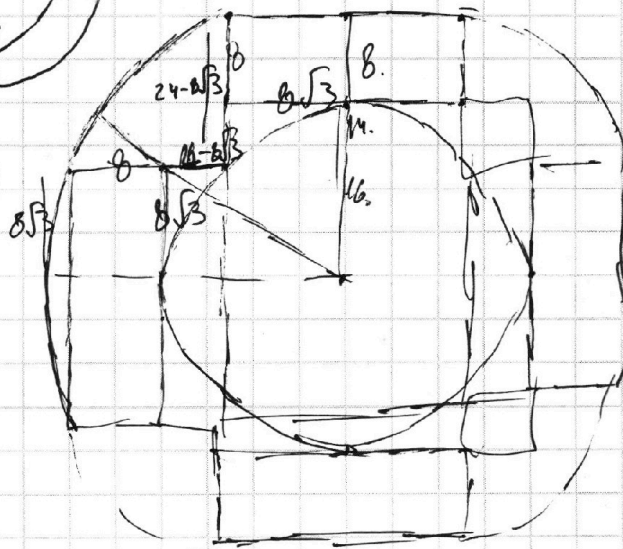
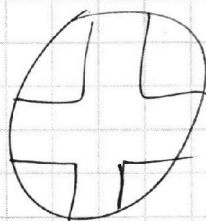
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 48 \\ + 96 \\ \hline 144 \\ + 256 \\ \hline 400 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 16 \\ \hline 64 \\ + 128 \\ \hline 192 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 16\sqrt{3} \quad 24 \quad 16\sqrt{3} \\ \times 128 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.128 \\ \times 122 \\ \hline 384 \end{array}$$



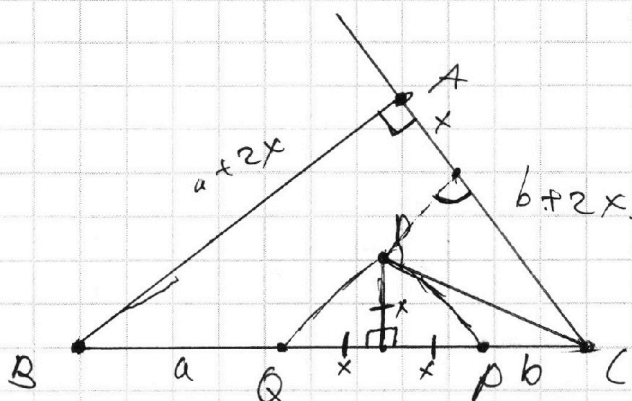
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

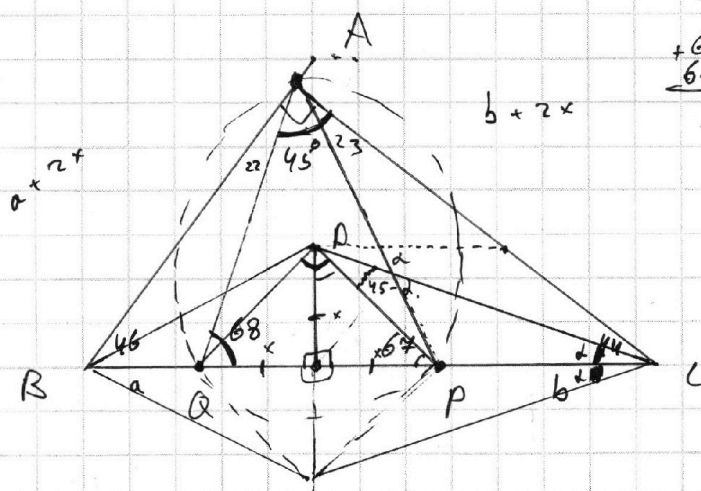
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle B = 46^\circ$
 $AB = BP$
 $AL = CQ$
 $DP = DQ$
 $\angle PDQ = 30^\circ$
 $\angle CBA = 46^\circ$
 $\angle DCB = ?$



4
 2
 (5)
 4
 10
 (5)
 (6)
 31
 26

$$a+b - \sqrt{a^2+b^2} = DP$$



$$\frac{180-44}{2} = \frac{90-22}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

$$\frac{68}{5} = 13.6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

