



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E – точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телегре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 10^{30002} - 1$$

$$n^3 = 10^{90006} - 3 \cdot 10^{60004} + 3 \cdot 10^{30002} - 1$$

Рассмотрим число $10^{50006} - 3 \cdot 10^{60004}$ - оно имеет вид $\underbrace{999\dots99}_{30002\text{ единиц}} \underbrace{700\dots00}_{2 единицы}$

Теперь прибавив к нему число $3 \cdot 10^{30002}$,

$\underbrace{999\dots99}_{30002\text{ единиц}} \underbrace{700\dots00}_{2 единицы} + 3 \cdot 10^{30002}$

И получим выражение 1:

$$\underbrace{999\dots99}_{30002\text{ единиц}} \underbrace{700\dots00}_{2 единицы} + \underbrace{2999\dots99}_{30002\text{ единиц}} \Rightarrow \text{Одн. } 30002\text{-значное}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

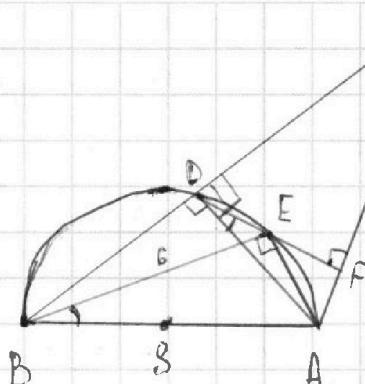
5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle BDA = 90^\circ$, т.к лежит на диаметре и отражается на противолежащий $\angle ADE = 90^\circ$, как смежный к $\angle BDA$.
 $\angle ADE = \angle ABE$ т.к отражаются на одну и ту же дугу EA.
 $\angle ABE = \angle ADF = \angle DCA$ (вспомогают $\angle DAF$ до 180°)
Следовательно $\triangle AFD$ и $\triangle BEA$ подобны ($\angle BAE = 90^\circ$
т.к лежит на диаметре и отражается на противолежащий) по двум
углам. Тогда $CD = \frac{6}{8} \cdot 10 = 7,5$ и по т. Пир $\angle ADC$:

$DA = \sqrt{10^2 - 7,5^2}$. Теперь обозначим AF за x, тогда DF по т. Пицца. В $\triangle ADF$ рабен $\sqrt{DA^2 - x^2}$, а также DF рабен $\sqrt{x(10-x)} \cdot \sqrt{x(AC-x)}$, т.к $DF \perp AC$.

и $\angle ADF = 90^\circ$. $DA^2 - x^2 = x(AC-x) \Rightarrow 10^2 - 7,5^2 - x^2 = 10x - x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{10^2 - 7,5^2}{10} = \frac{175}{40} = \frac{35}{8} = \frac{4\frac{3}{8}}{6\frac{1}{8}} : \text{Ответ: } AF = 6\frac{7}{8} \cdot 4 \frac{3}{8}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть на выбор есть n коробок. Множество возможных способов выбрать 5 коробок — C_n^5 , а выигрышных коробок C_{n-3}^2 (3 коробки зафиксированы, оставшиеся выбрать 2 из $n-3$) \Rightarrow вероятность выигрыша

 $P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$. Аналогично вероятность выигрыша для выбора 2 коробок $P_2 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^7}$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^4 \cdot C_n^5}{C_n^7 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{7! \cdot 2! n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)^3(n-5)(n-6)}{4! \cdot 5! n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)^3(n-5)(n-6)} = \frac{6 \cdot 7}{21 \cdot 4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: 63,5 раз



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x_4, x_6, x_7 и $x_9 = 4, 6, 7$ и α - члены арифм. прогрессии соотвественно.

$$\text{Могда } x_6 \text{ и } x_7 \text{ равны} \quad \frac{\alpha^2 - 2\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha)^2 - 4(\alpha^2 - \alpha - 7)}}{2}$$

$$\text{и } x_4 \text{ и } x_9 \text{ равны} \quad \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \sqrt{(\alpha^3 - 2\alpha^2)^2 - 12(\alpha^2 - \alpha - 7)}}{6}$$

Так как x_4, x_6, x_7 и x_9 члены арифм. прогрессии, то $x_9 - x_7 = x_6 - x_4$.

Могда переменные, учитываю, что у x_4 и x_6 , x_7 и x_9 одинаковые знаки перед корнями \Rightarrow корни уничтожаются после сложения ($x_9 + x_4 = x_7 + x_6$):

$$\alpha^2 - \alpha\alpha = \frac{\alpha^3 - \alpha\alpha^2}{3} \Rightarrow \alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 3 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

Но при каждом из этих α противоречия возникают \Rightarrow нет

корн. перед стиранием \Rightarrow Отбрасываем $\alpha = 0, \alpha = 3, \alpha = 2$.

При $\alpha = 0, 3x^2 - (\alpha^3 - 2\alpha^2)x + 6 - \alpha^5 = 3x^2 + 6 = 0$, у этого ур-я

решений нет $\Rightarrow \alpha = 0$ - не подходит.

При $\alpha = 3$ и $\alpha = 2$ средний член равен 0, а свободный член $< 0 \Rightarrow$

противоречий нет.

Отбрасываем: при $\alpha = 2$ и $\alpha = 3$.

Подставим $\alpha = 2$: $x_6, x_7 = -\sqrt{5}, +\sqrt{5}$, $x_4, x_9 = -\sqrt{\frac{26}{3}}, +\sqrt{\frac{26}{3}}$ \Rightarrow арифм прогрессии нет.

Подставим $\alpha = 3$: $x_6, x_7 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $x_4, x_9 = \frac{3-\sqrt{479}}{2}, \frac{3+\sqrt{479}}{2}$

\Rightarrow Арифм прогрессии тоже нет \Rightarrow Отбрасываем оба случая.

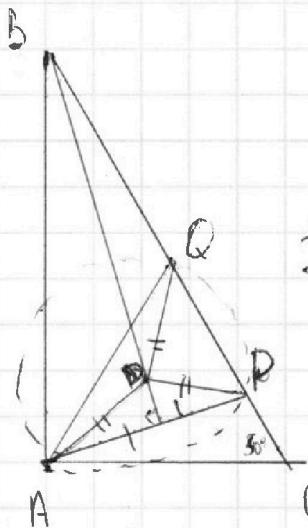


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle APQ = \frac{180 - \angle ABP}{2} = 70^\circ \quad (\text{т.к. } \angle ABP = \angle ACQ - 50^\circ)$$

$$\angle AQP = \frac{180 - \angle ACQ}{2} = 65^\circ$$

$$\angle QAP = 180 - \angle APQ - \angle AQP = 180^\circ - 70^\circ - 65^\circ = 45^\circ$$

Теперь проведем окружность через точки

A, P и Q, тогда точка D лежит на

данной окружности, т.к. радиусы одинаковые

Впишенному углу, опирающемуся на с

тупую хорду PQ и $QP = PD \Rightarrow DP = DA$ радиусы этой окружности.

Могла точка D лежать на сер. перп. к AP, а также B лежит

на сер. перп. к AD (т.к. $AD = DP \text{ и } AB = BP \Rightarrow BD$ биссектриса на

этот сер. перп.). А т.к. $\angle ABD = \angle CBD$ совпадают и с высотой и

с биссектрисой $\Rightarrow BD - бисс. \angle ABD \Rightarrow \angle BDC = \frac{\angle ABD}{2} = 20^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2x + z^2 \\ y^2 = -2x + x^2 \Leftrightarrow y^2 = x(x-2) \\ 2x = -2y + y^2 \\ 2x = y(y-2) \end{cases}$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$3y^2 - 9x + 6 - 3\sqrt{13} = 0$$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 - 83 &= 0 \\ x^2 - 3x - 79 &= 0 \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 119}}{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \quad 9999980000100 \\ 999980000$$

$$\begin{array}{r} 99998000000000 \\ 99998000000000 \\ \hline 99998000000000 \end{array}$$

$$4 \quad C \quad 1 \cdot 9$$

$$\frac{26}{13} = \sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{26}$$

$$3 \quad 2 \quad \frac{26}{13}$$

$$3 \quad 2 \quad \frac{26}{$$

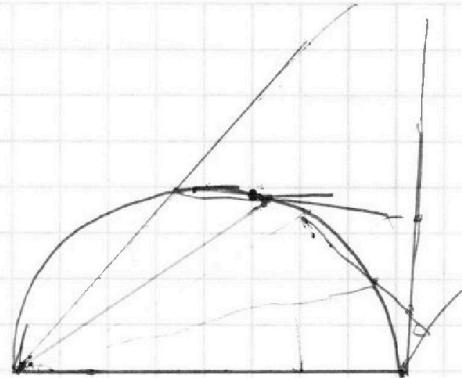


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 75 \\ \hline 375 \\ 525 \\ \hline 5625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 400 \\ - 225 \\ \hline 175 \end{array}$$

225

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 225 \\ \hline 775 \end{array}$$

$$x + y = 2$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 2 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2^2 \\ \times 72 \\ \hline 144 \\ - 144 \\ \hline 0 \end{array}$$

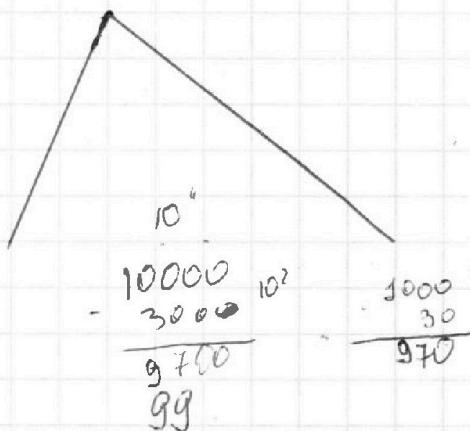
$$x^3 - 2x^2 = z^3 - 2z^2$$

$$(x-2)(x^2 + xz + z^2) - 2(x-2)(x+z)$$

$$(x-2)(x^2 + xz + z^2 - 2xz) = 0$$

$$x = -\frac{z^2 + z^2}{y}$$

$$z_2 = \frac{-x + z^2}{y}$$



$$(100 - 1)^3 = 99(100 + 10 + 1) = 99000 + 99000 + 9900 + 99$$

$$\begin{array}{r} 9900 \\ - 990 \\ \hline 900 \\ - 90 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ - 99 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100^3 - 3 \cdot 100^2 + 3 \cdot 100 - 1 \\ \times 99 \\ \hline 9801 \\ - 99 \\ \hline 88209 \\ + 88209 \\ \hline 90299 \end{array}$$

8000000

10000000000

1000

99970000 999999

$$\begin{aligned} & (a+b)^3 - (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ & \therefore a^3 - b^3 = a \cdot b / (a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \left\{ \begin{array}{l} xy = -2z + z^2 \\ y^2 = -2x + x^2 \\ z^2 = -2y + y^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} xy = 4z(z-1) \\ y^2 = x(x-2) \\ z^2 = y(y-2) \end{array} \right. \Rightarrow (z-2)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{xy}{2}\right)^2 + \left(\frac{y^2}{x}\right)^2 + \left(\frac{z^2}{y}\right)^2 = \\ & x^2 y^2 z^2 = xy^2 (z-2)(x-2)(y-2) \quad x^2 y^2 z^2 = 4z^2 (x-2)^2 (y-2)^2 \\ & xy^2 = (z-2)(x-2)(y-2) \quad xy^2 = 2x^2 y^2 (x-2)(x+2+4)(y-2) = \\ & \textcircled{2} \quad \begin{array}{c} 9999 \\ \times 9993 \\ \hline 9999 \end{array} \quad 3 \quad :3 \quad = xy^2 = 2x^2 y^2 - 2x^2 - 2xy + 4x^2 + 22y^4 + 47y^2 - \end{aligned}$$

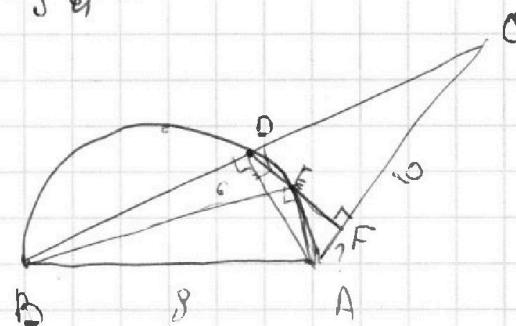
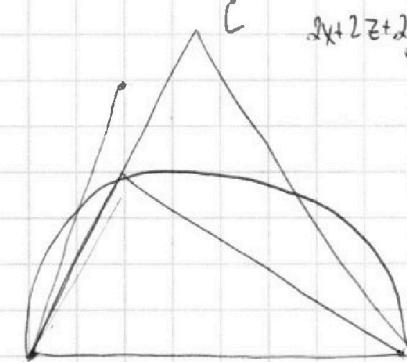
$$\begin{array}{r} 9999 \\ \times 9993 \\ \hline 89991 \\ + 39991 \\ \hline 999880001 \end{array}$$

3 43

$$= xy^2 - 2xy^2 - 2x^2y + 4x^2y^2 + 4y^2 - 8$$

$$4x + 4y^2 - 2z^2 - 2xy - 2zy - 8 = 0$$

$$2x + 2z^2 + 2y - 2x^2y - 2zy - 8 = 0$$

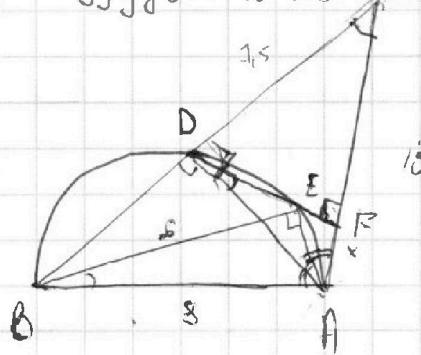
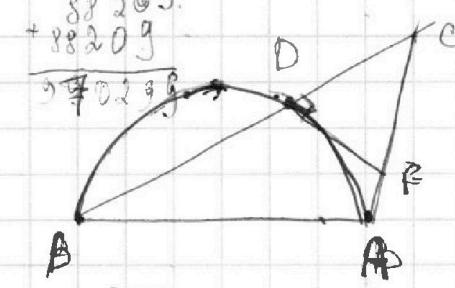


$$\begin{array}{r} & \text{A} & & \text{B} \\ & 9801 & & 9801 \\ 99 & \underline{\quad} & 99 & \underline{\quad} \\ & 980100 - 9801 \end{array}$$

9998000 100 999000

$$\begin{array}{r}
 & 99 \\
 & \underline{- 89} \\
 & 10 \\
 + & 88203 \\
 \hline
 & 88203
 \end{array}$$

B
980.900 - 980.1



$$\sqrt{\frac{100 - 275}{4}} = \sqrt{\frac{275}{4}} = \frac{5\sqrt{11}}{2}$$

$$\Delta \text{AEB} \sim \Delta \text{ADC}$$

$$\frac{25}{4} - x^2 = x(10-x) \Rightarrow 10x = \frac{25}{4}$$

$$x = \frac{d5 - 13}{40} = \frac{4}{x} = \boxed{\frac{55}{8}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ Пусть n коробок, тогда вероятность получить три шарика.

$$\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$⑤ x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

$$x_1, x_2 = \frac{a^2 - 2a \pm \sqrt{(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7)}}{2}$$

$$3x^2 - (6^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$$

$$x_3, x_4 = \frac{a^3 - 2a^2 \pm \sqrt{(a^3 - 2a^2)^2 - 12(6 - a^5)}}{6}$$

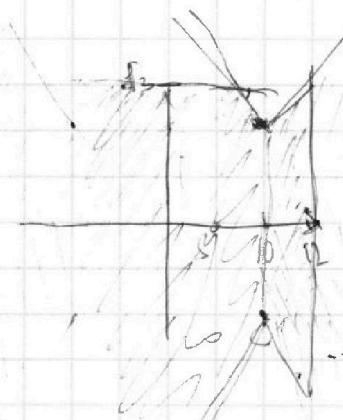
$$x_5 - x_6 = x_9 - x_7$$

$$\frac{a^2 - 2a \pm \sqrt{D_3}}{2} - \frac{a^3 - 2a^2 \pm \sqrt{D_4}}{6} = \frac{a^2 - 2a^2 + \sqrt{D_2}}{6} - \frac{a^2 - 2a + \sqrt{D_1}}{2}$$

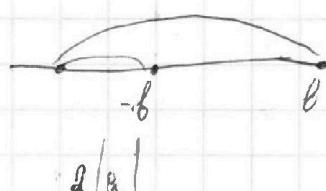
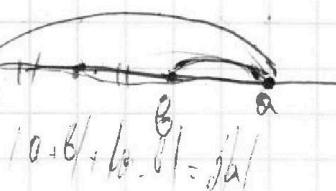
$$a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \Rightarrow 3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2 \Rightarrow a^3 - 5a^2 + 6a = 0, a=0 \\ a^2 - 5a + 6 = 0$$

$$\boxed{a = 3 \text{ или } 2 \text{ и } a \neq 0}$$

$$⑥ |x-10| = a \quad \frac{y}{2\sqrt{3}} = b \quad |a+b| + |a-b| \leq a$$



$$|b - (-b)| \geq |b| \quad |x-10| \leq \frac{|y|}{2\sqrt{3}} \quad \frac{|y|}{2\sqrt{3}} \leq 4 \quad |y| \leq 8\sqrt{3}$$



$$|x-10| > \frac{|y|}{2\sqrt{3}}$$

$$2|x-10| \leq 4$$

$$|x-10| < 2 \quad |y| < 8\sqrt{3} \approx 17.8$$

$$|x-10| \leq 2 \quad 8 \leq |y| \leq 17.8$$