



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 10^{30002} - 1$$

$$n^2 = 10^{60006} - 3 \cdot 10^{60004} + 3 \cdot 10^{30002} - 1$$

Рассмотрим число $10^{60006} - 3 \cdot 10^{60004}$ - оно имеет вид $\overbrace{999 \dots 997000 \dots 00}^{30002 \text{ девяток}}$

Теперь прибавим к нему число $3 \cdot 10^{30002}$,

$$\begin{array}{r} \overbrace{999 \dots 99700 \dots 00300 \dots 00}^{30002 \text{ девяток}} \\ \underbrace{}_{30002 \text{ единиц}} \end{array}$$

И наконец вычтем 1:

$$\begin{array}{r} \overbrace{999 \dots 99700 \dots 00299 \dots 99}^{30002 \text{ девяток}} \\ \underbrace{}_{30002 \text{ единиц}} \\ -1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Ответ: 60002-двенадцать.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть не выбрали ни n коробок. Тогда возможных способов выбрать 5 коробок — C_n^5 , а выигрышных коробок C_{n-3}^2 (3 коробки зафиксированы, остаётся выбрать 2 из $n-3$) $\Rightarrow$ вероятность выигрыша $P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$. Аналогично вероятность выигрыша от выбора

7 коробок $P_2 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^7}$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^4 \cdot C_n^5}{C_n^7 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{7! \cdot 2! \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)^2(n-5)(n-6)}{4! \cdot 5! \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)^2(n-5)(n-6)} = \frac{6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: 3,5 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x_4, x_6, x_7 и x_9 — 4, 6, 7 и 9 члены арифм. прогрессии соответственно.

Тогда x_6 и x_7 равны $\frac{a^2 - 2a \pm \sqrt{(a^2 - 2a)^2 - 4a^2(a-7)}}{2}$

и x_4 и x_9 равны $\frac{a^3 - 2a^2 \pm \sqrt{(a^3 - 2a^2)^2 - 12(6-a^5)}}{6}$

Так как x_4, x_6, x_7 и x_9 члены арифм. прогрессии, то $x_9 - x_7 = x_6 - x_4$.

Тогда перепишем, учитывая, что у x_4 и x_6 , x_7 и x_9 одинаковые знаки перед корнями $\Rightarrow$ корни уничтожаются после переноса ($x_9 + x_4 = x_7 + x_6$):

$$a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \Rightarrow a^3 - 5a^2 + 6a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 5a + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

Ни при каком из этих a противоречия не возникают ~~и~~, т.е. нет контр. перед следующим шагом $\Rightarrow$ Ответ: $a = 0, a = 3, a = 2$.

При $a = 0$, $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 3x^2 + 6 = 0$, у такого ур-е решений нет $\Rightarrow a = 0$ не подходит.

При $a = 3$ и $a = 2$ ^{коэф. при} средний член равен 0, а свободный член $< 0 \Rightarrow$ противоречий нет.

Ответ: при $a = 2$ и $a = 3$.

Подставим $a = 2$: $x_6, x_7 = -\sqrt{5}, \sqrt{5}$, $x_4, x_9 = -\sqrt{\frac{26}{3}}, \sqrt{\frac{26}{3}} \Rightarrow$ арифм. прогрессии нет.

Подставим $a = 3$: $x_6, x_7 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$, $x_4, x_9 = \frac{3 - \sqrt{479}}{2}, \frac{3 + \sqrt{479}}{2}$

$\Rightarrow$ арифм. прогрессии тоже нет $\Rightarrow$ Ответ: таких a нет.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

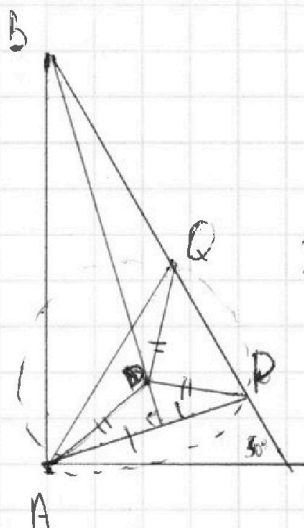
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle APQ = \frac{180 - \angle ABP}{2} = 70^\circ \quad (\text{т.к. } \angle ABP = \angle ACQ - \text{р/б})$$

$$\angle AQP = \frac{180 - \angle ACQ}{2} = 65^\circ$$

$$\angle QAP = 180 - \angle APQ - \angle AQP = 180 - 70^\circ - 65^\circ = 45^\circ$$

Теперь проведем окружность через точки A, P и Q, тогда точка D окажется для нее центром, т.к. равна половине вписанного угла, опирающегося на ту же хорду PQ и $QD = PD \Rightarrow DP = DA$ равен радиусу этой окружности. Тогда точка D лежит на сеп. пер-е к AP, а также B лежит на сеп. пер-е к AD (т.к. $AD = DP$ и $AB = BP$) $\Rightarrow BD$ всего лежит на этом сеп. пер-е. А в р/б $\triangle$ медиана совпадает и с высотой и с биссектрисой $\Rightarrow BD$ - бисс. $\angle ABP \Rightarrow \angle PBC = \frac{\angle ABP}{2} = 20^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

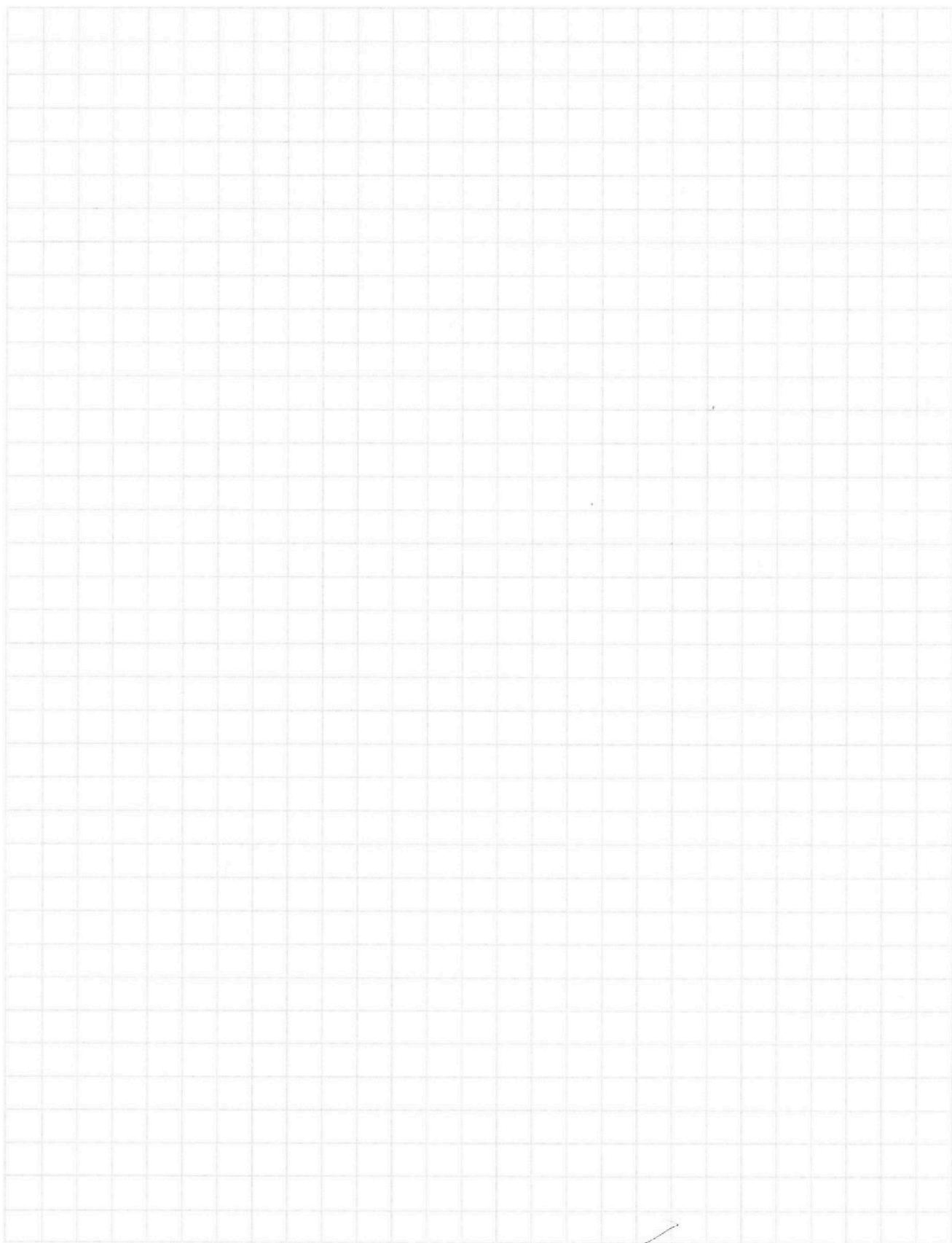
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \Leftrightarrow \\ 2x = -2y + y^2 \end{cases} \begin{cases} xy = 2(z-2) \\ yz = x(x-2) \\ 2x = y(y-2) \end{cases}$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$3x^2 - 9x + 8 - \frac{8}{13} = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 - \frac{81}{13} = 0$$

$$x^2 - 3x - \frac{79}{13} = 0 \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 79}}{2}$$

$$\textcircled{a} \quad \begin{array}{r} 9999980000100 \\ 999980000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9999980000100 \\ 9999800001 \\ \hline 999980000099 \end{array}$$

$$\frac{26}{3} - \sqrt{5}; \sqrt{5}; \frac{26}{3}$$

$$\textcircled{a} \quad \begin{matrix} C_n^5 & C_{n-3}^2 & P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} \\ C_n^7 & C_{n-3}^4 & P_2 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} \end{matrix}$$

$$= \frac{(n-3)(n-4)}{2! \cdot 5!} \quad = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4! \cdot 7!}$$

$$= \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{7}{30}$$

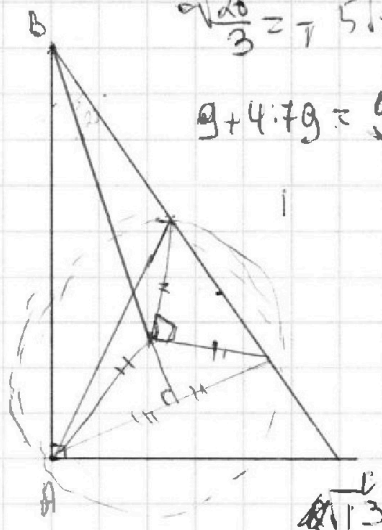
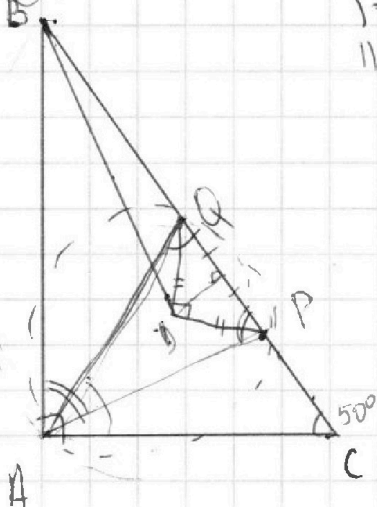
$$3x^2 - 26 = 0 \quad x = \pm \sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$\begin{matrix} \angle = 65^\circ \\ \angle = 70^\circ \end{matrix}$$

$$\sqrt{\frac{26}{3}} = 2.55$$

$$9 + 4 \cdot 79 = 9 \cdot 13$$



$$\sqrt{9 + 4 \cdot 79} = \sqrt{13}$$

$$\frac{3 - \sqrt{9 + 4 \cdot 79}}{2}$$

$$\frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{3 + \sqrt{9 + 4 \cdot 79}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

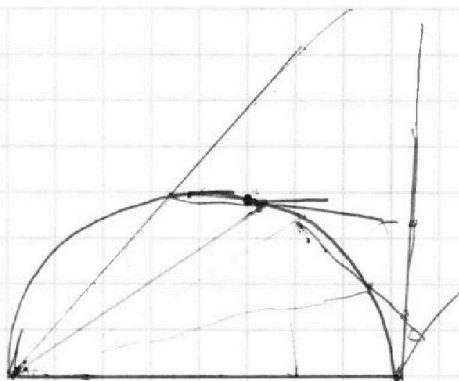
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 75 \\ \hline 375 \\ 525 \\ \hline 5625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 400 - 225 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ 100 - 225 \\ \hline 175 \\ 4 \end{array}$$

$$x + y = 2$$

$$\frac{2-2}{x-2}$$

$$\sum \frac{x^2}{x^2} = \frac{2-2}{x-2}$$

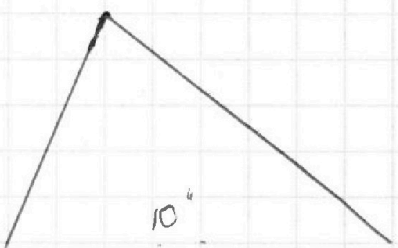
$$x^3 - 2x^2 = 2^3 - 2 \cdot 2^2$$

$$(x-2)(x^2 + x + 2) - 2(x-2)(x+2)$$

$$(x-2)(x^2 + x + 2 - 2x - 4) = 0$$

$$x = -\frac{2x + 2^2}{y}$$

$$2 - \frac{-2x + x^2}{y}$$



$$\begin{array}{r} 10^4 \\ - 10000 \\ 3000 \\ \hline 9700 \\ 99 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ 30 \\ \hline 970 \end{array}$$

$$(100 - 1)^3 = 99(100 + 100 + 1) = 9900 + 9900 + 99$$

$$\begin{array}{r} 9900 \\ 990 \\ 99 \\ \hline 10989 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times 99 \\ \hline 88209 \\ + 88209 \\ \hline 980199 \end{array}$$

$$100^3 - 3 \cdot 100^2 + 3 \cdot 100 + 1$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$1000000$$

$$10000003000$$

$$1000$$

$$9937000999$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = xz(z-2) \\ yz = x(x-2) \\ zx = y(y-2) \end{cases} \Rightarrow (z-2)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 =$$

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(z-2)(x-2)(y-2) \quad x^2 y^2 z^2 = (z-2)^2 (x-2)^2 (y-2)^2$$

$$xyz = (z-2)(x-2)(y-2) \quad xyz = 2xyz(2x-2x+2z+4)(y-2) =$$

$$= xyz(2x-2x+2z+4)(y-2) =$$

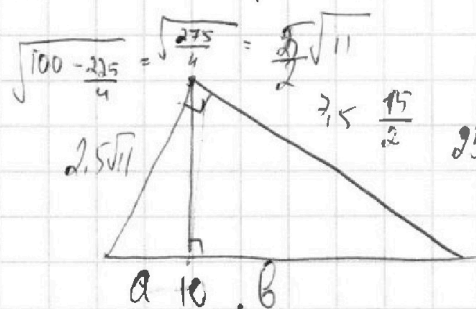
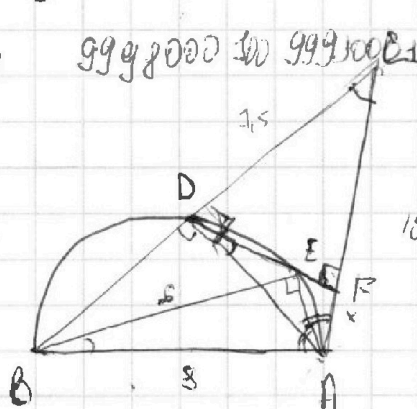
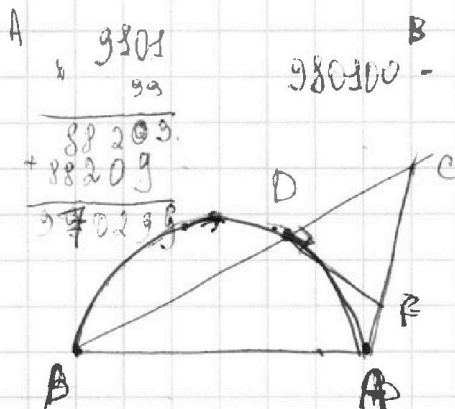
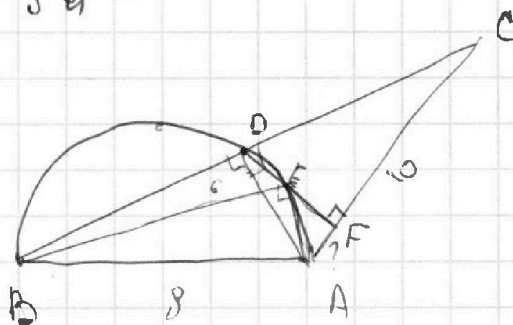
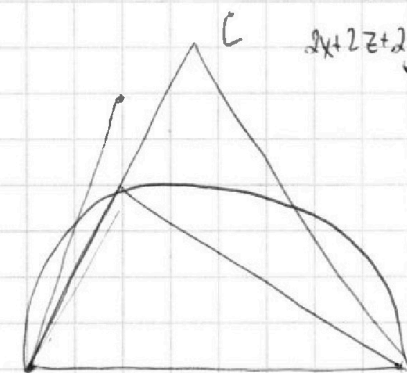
$$4x+4z+4y-2zx-2xy-2zy-8=0$$

$$2x+2z+2y-2x-xy-zy-8=0$$

$$\begin{array}{r} 9999 \\ + 9999 \\ \hline 89998 \\ + 89998 \\ \hline 399991 \\ + 399991 \\ \hline 999982 \end{array}$$

3 11

②



$$\frac{25 \cdot 11}{4} - x^2 = x(10-x) \Rightarrow 10x = \frac{25 \cdot 11}{4}$$

$$x = \frac{25 \cdot 11}{40} = x = \sqrt{\frac{55}{8}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ Пусть n коробок, тогда вероятность получить три шарика.

9999980000001

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdot n}$$

$$\begin{array}{r} 9998000100 \\ - 99980001 \\ \hline 999800009 \end{array}$$

⑤ $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$

$$x_{6,7} = \frac{a^2 - 2a \pm \sqrt{(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7)}}{2}$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$$

$$x_{4,5} = \frac{a^3 - 2a^2 \pm \sqrt{(a^3 - 2a^2)^2 - 12(6 - a^5)}}{6}$$

$$x_6 - x_4 = x_7 - x_5$$

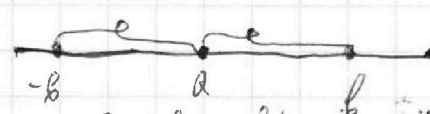
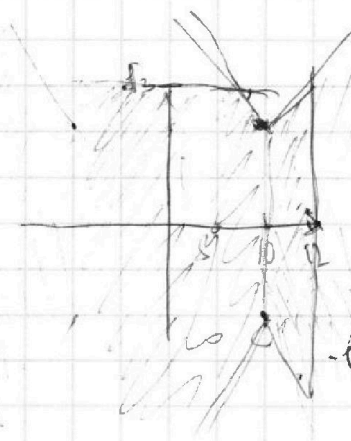
$$\frac{a^2 - 2a + \sqrt{D_1}}{2} - \frac{a^3 - 2a^2 - \sqrt{D_2}}{6} = \frac{a^2 - 2a + \sqrt{D_2}}{6} - \frac{a^2 - 2a + \sqrt{D_1}}{2}$$

$$a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \Rightarrow 3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2 \Rightarrow a^3 - 5a^2 + 6a = 0, a = 0$$

$$a^2 - 5a + 6 = 0$$

$$a = 2 \vee a = 3 \vee a = 0$$

⑥ $1 - 10 > a$ $\frac{y}{\sqrt{3}} = b$ $|a+b| + |a-b| \leq 4$



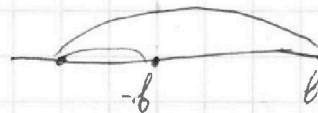
$$|b - (-b)| = 2|b|$$

$$|x - 10| \leq \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{3}} \leq 4 \quad y \leq 4\sqrt{3}$$



$$|a+b| + |a-b| = 2|a|$$



$$2|a|$$

$$x - 10 > \frac{y}{\sqrt{3}}$$

$$y = \sqrt{3}x - 10$$

$$2|x-10| \leq 4$$

$$|x-10| \leq 2 \quad 8 \leq x \leq 12$$