



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 & (1) \\ yz = 4x + x^2 & (2) \\ zx = 4y + y^2 & (3) \end{cases}$$

Умножим (1) на (2) и поделим на xz . Это можно сделать т.к. $x, y, z \neq 0$ по усл:

$$y^2 = (4+z)(4+x)$$

$$y^2 = 16 + 4x + 4z + xz, \text{ подставим (3):}$$

$$x^2 = 16 + 4x + 4z + 4y + x^2$$

$$x + y + z = -4 \quad (*)$$

$$16 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z + 8xz + 8yz + 8zx = 3(x^2 + y^2 + z^2) + 8(x + y + z) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 32$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad (**)$$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16 =$$

$$= \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{(**)} + 8 \underbrace{(x + y + z)}_{(*)} + 48 = 16 - 32 + 48 = 32$$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \overbrace{99 \dots 9}^{25000} = 10^{25000} - 1$$

$$n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1 \quad (\equiv)$$

$$\begin{aligned} 1) \quad 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} &= \overbrace{100 \dots 0}^{75000} - \overbrace{3000 \dots 0}^{50000} = \overbrace{99 \dots 9}^{75000} - \overbrace{300 \dots 0}^{50000} + 1 = \\ &= \overbrace{999 \dots 9}^{24999} \overbrace{699 \dots 9}^{50000} + 1 = \overbrace{99 \dots 9}^{24999} \overbrace{700 \dots 0}^{50000} \end{aligned}$$

$$2) \quad \overbrace{999 \dots 9}^{24999} \overbrace{699 \dots 9}^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} = \overbrace{999 \dots 9}^{24999} \overbrace{699 \dots 9}^{50000} + \overbrace{300 \dots 0}^{25000} =$$

$$\begin{aligned} &= \overbrace{999 \dots 9}^{24999} \overbrace{700 \dots 0}^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} = \overbrace{999 \dots 9}^{24999} \overbrace{700 \dots 0}^{50000} + \overbrace{300 \dots 0}^{25000} = \\ &= \overbrace{99 \dots 9}^{24999} \overbrace{70 \dots 0}^{24999} \overbrace{30 \dots 0}^{25000} \end{aligned}$$

$$\quad (\equiv) \quad \overbrace{99 \dots 9}^{24999} \overbrace{70 \dots 0}^{24999} \overbrace{30 \dots 0}^{25000} - 1 = \overbrace{99 \dots 9}^{24999} \overbrace{70 \dots 0}^{24999} \overbrace{299 \dots 9}^{25000}$$

Ответ: 49999

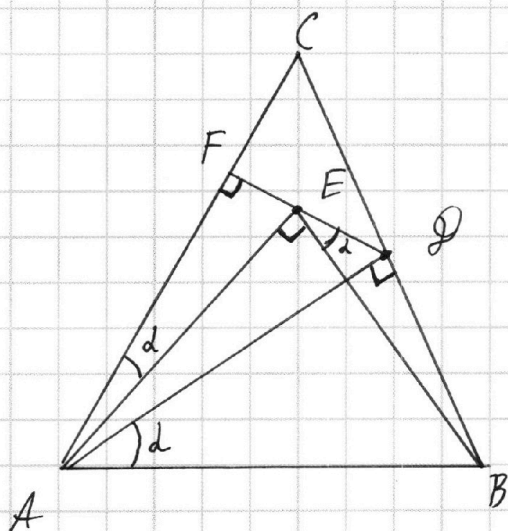


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



т. $A, B, D, E \in \omega$
 AB -диаметр
 $DF \perp AC$
 $AC = 20$
 $AB = 15$
 $BE = 10$
 $AF = ?$

пусть $AF = x$, тогда $FC = (20 - x)$ т.к. $AC = 20$

1) $\angle AEB = 90^\circ$ т.к. AB -диаметр; по т. Пифагора:

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{225 - 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

2) $\angle DAB = \angle DEB = \alpha$ т.к. они оба опираются на дугу BD .

$$\angle FEA = 180 - 90 - \angle DEB = 90 - \alpha$$

$$\angle FAE = 180 - 90 - \angle FEA = 90 - (90 - \alpha) = \alpha$$

$$\text{т.к. } \angle DAB = \angle FAE = \alpha$$

3) $\angle ADB = 90^\circ$ т.к. AB -диаметр $\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \triangle ADC$ -прямоуг.

$$FD - \text{высота } \triangle ADC \Rightarrow FD = \sqrt{AF \cdot FC} = \sqrt{x(20 - x)} = \sqrt{20x - x^2}$$

4) $\angle AFD = 90^\circ$ по усл.; по т. Пифагора:

$$AD = \sqrt{AF^2 + FD^2} = \sqrt{x^2 + 20x - x^2} = \sqrt{20x}$$

$$5) \cos \alpha = \cos \angle DAB = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{20x}}{15}$$

$$\cos \alpha = \cos \angle FAE = \frac{FA}{AE} = \frac{x}{5\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{20x}}{15} = \frac{x}{5\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 15x = \sqrt{20x} \sqrt{125}; 225x^2 = 2500x \quad | : x \neq 0; x = \frac{2500}{225} = \frac{100}{9}$$

Ответ: $\frac{100}{9}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- 1) Пусть было n породок
всего

всего способов выбрать 5 породок = C_n^5
число способов выбрать 5 породок с тремя

$$P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)! \cdot (n-5)! \cdot 5!}{2! \cdot (n-5)! \cdot n!} = \frac{(n-3)! \cdot 60}{n!} = \frac{60}{(n-2)(n-1)n}$$

- 2) всего способов выбрать 8 породок = C_n^8
число способов выбрать 5 породок с тремя породами = C_{n-3}^5

$$P_2 = \frac{C_{n-3}^5}{C_n^8} = \frac{(n-3)! \cdot 8! \cdot (n-8)!}{5! \cdot (n-8)! \cdot n!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{(n-2)(n-1)n}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{(n-2)(n-1)n} \cdot \frac{(n-2)(n-1)n}{6 \cdot 10} = \frac{56}{10} = 5,6$$

Ответ: 5, 6.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть b_i - i -ый член арифметической прогрессии,
тогда $b_4; b_5$ - корни $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ (1)

$$b_2; b_7 - \text{корни } 2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0. \quad (2)$$

1) из условия следует, что у (1) и (2) есть по 2
корня. т.е.

$$\begin{cases} D_1 = a^4 - 2a^3 + a^2 - 4 \cdot \frac{2-a^3}{3} > 0 \\ D_2 = a^6 - 2a^5 + a^4 + 16a^6 + 64a + 32 > 0 \end{cases}$$

2) заметим, что:

$$b_7 - b_5 = b_4 - b_2 \Rightarrow b_2 + b_7 = b_4 + b_5.$$

по 1. Виета:

$$b_2 + b_7 = \frac{a^3 - a^2}{2} \quad b_4 + b_5 = a^2 - a$$

$$a^3 - a^2 = 2a^2 - 2a$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$a(a-1)(a-2) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

(I) $a=0$

(I) $a=0$

$$\begin{cases} x^2 + \frac{2}{3} = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} b_4 = x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ b_5 = x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{matrix}$$

$$D_1 = -\frac{8}{3} < 0 - \text{противоречие.}$$

(II) $a=1$

$$D_1 = 1 - 2 + 1 - 4 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} < 0 - \text{противоречие}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III a=2

$$D_{(1)} = 16 - 16 + 4 - 4 \cdot \frac{-6}{3} = 4 + 8 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$D_{(2)} = 64 - 64 + 16 + 16 \cdot 64 + 64 \cdot 2 + 32 = 1024 + 128 + 32 = 1184$$
$$= 32(2 + 32 + 4 + 1) = 32 \cdot 39$$
$$= 1040 + 160 = 1200 = 400 \cdot 3 = 20^2 \cdot 3$$

$$x_{3,4} = \frac{4 \pm 20\sqrt{3}}{4} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$

тогда:

$$b_2 = 1 - 5\sqrt{3} \quad b_4 = 1 - \sqrt{3} \quad b_5 = 1 + \sqrt{3} \quad b_7 = 1 + 5\sqrt{3}$$

Это действительно члены арифметической прогрессии, например:

$(1 - 7\sqrt{3})$ - первый член прогрессии

$(2\sqrt{3})$ - разность прогрессии

Ответ: 2

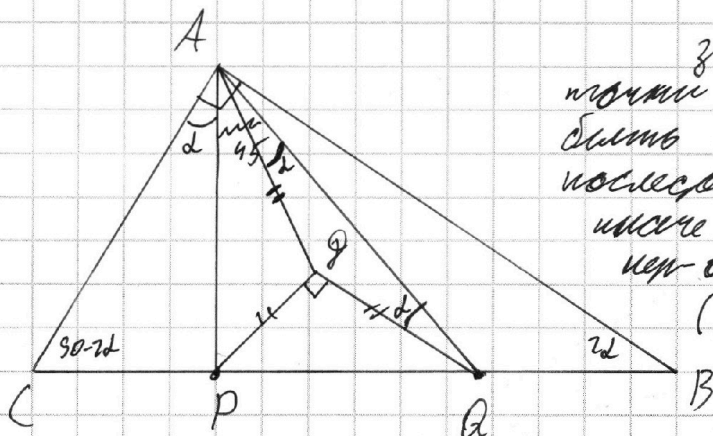


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

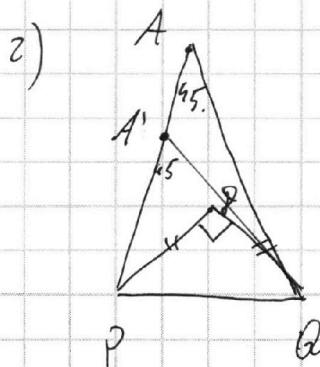


заметьте, что
точки P и Q должны
быть именно в такой
последовательности,
иначе не вытекается
нер-вс 1-го
($CQ + QP + PB = BC < AB + AC$)
на верш.

1) пусть $\angle ABC = 2\alpha$, тогда $\angle PAB = 90 - \alpha$ т.к. $\triangle ABP$ - р/б
 $\Rightarrow \angle CAP = \alpha$ т.к. $\angle A = 90$.

$\angle ACB = 90 - 2\alpha \Rightarrow \angle CAQ = \frac{180 - 90 - 2\alpha}{2} = 45 + \alpha$ т.к. $\triangle ACQ$ - р/б

4 $\angle PAQ = \angle CAQ - \angle CAP = 45 + \alpha - \alpha = 45$.



заметьте, что Q - центр опр. PAQ.
пусть это не так
заметьте, что A ∈ опр(P; PQ)
пусть это не так, тогда опр.
пересекает прямую AP в т. A', значит
 $\angle PA'A = \frac{1}{2} \angle PQA = \frac{1}{2} \angle PQP = 45$, не тогда
 $A'Q \parallel AQ$, не они пересекаются
в т. Q - противоречие

3) $\angle QAP = 45$ т.к. $\triangle PQA$ - р/б
 $\angle CQA = \angle CAQ = 45 + \alpha$ т.к. $\triangle ACQ$ - р/б $\Rightarrow \angle QCA = \angle CAQ - \angle CQA = 45 + \alpha - 45 = \alpha$

тогда $\angle PAQ = \angle QCA = \alpha$ т.к. $\triangle PAQ$ - р/б (AP = PQ по условию)

4) $\angle CAP = \angle CAP + (\angle PAQ - \angle QAP) = \alpha + 45 - \alpha = 45$
 $\angle BAP = 90 - \angle CAP = 45$.



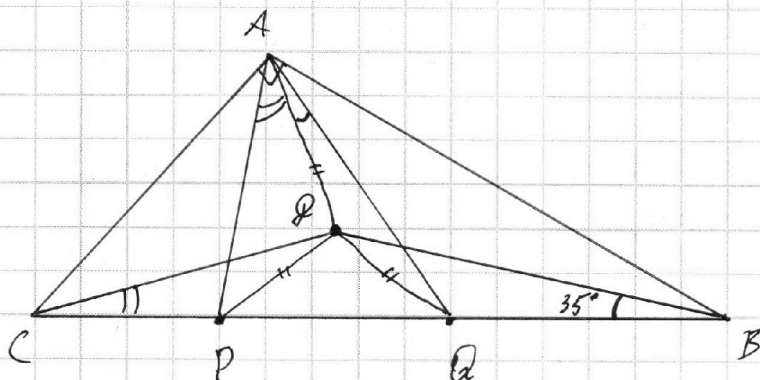
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) $\angle CAD = \angle DPQ = 45^\circ \Rightarrow \triangle CPD - \text{впис}$ (1)
 $\angle BAP = \angle DAP = 45^\circ \Rightarrow \triangle BAP - \text{впис}$ (2)



из (2) $\Rightarrow \angle DBA = \angle DAB = 35^\circ$

из (1) $\Rightarrow \angle DCP = \angle DAP = 45^\circ - 2 = 10^\circ$

Ответ: 10°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

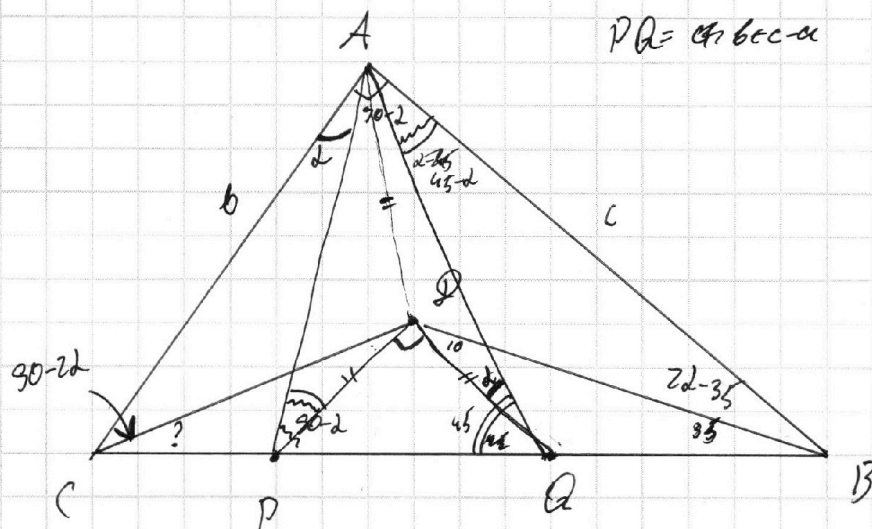
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

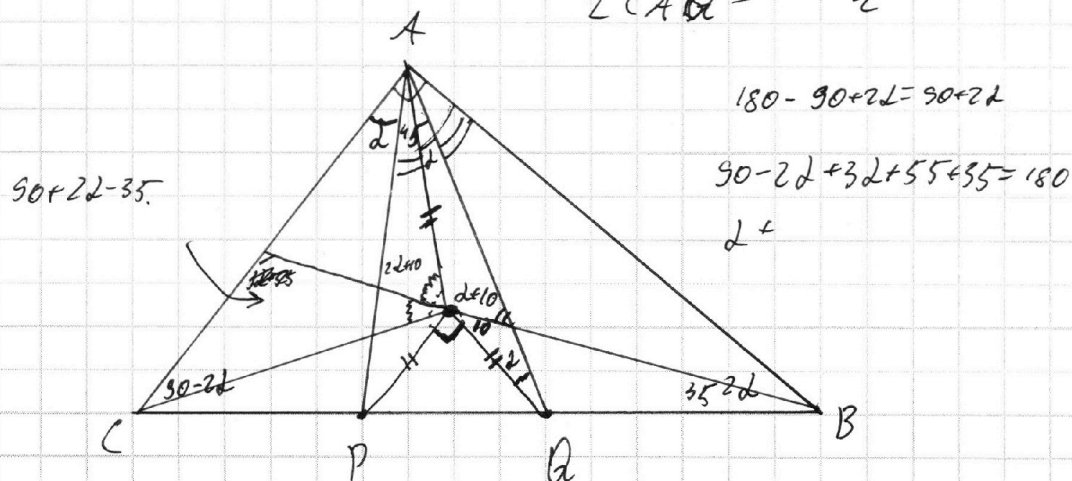
черновик

$BC=a$

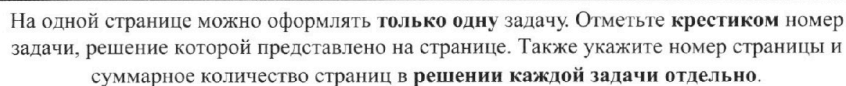
$PQ = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}$



$$\angle CAQ = \frac{180 - 90 + 2d}{2} = 45 + d$$



$\triangle APC$ - впис.



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l} 5x + 4z = 16 \\ b + d \end{array} \quad \begin{array}{l} b + 4d \\ b + 4d \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x + 4z + 16 = 0 \\ x + z = -4 \end{array}$$

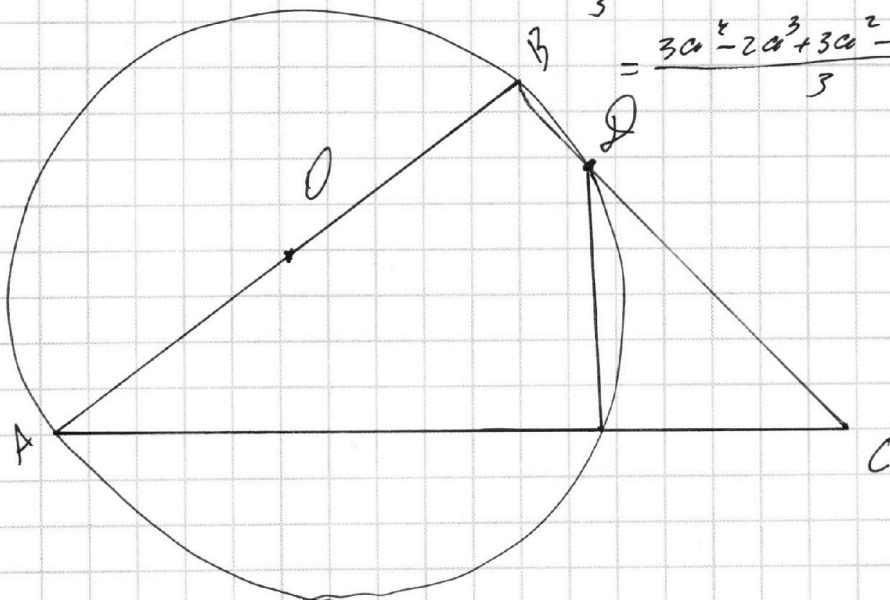
$$n^3 = 10 \quad 75000 \quad 50000 \quad 25000$$

$$h = 10 \quad \begin{matrix} 25000 \\ 25000 \\ -1 \end{matrix}$$

$$x^2 y^2 z^2 = \pm xyz(4+x)(4+y)(4+z)$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \quad D = a^4 - 2a^3 + a^2 - \frac{8}{3} + \frac{4a^3}{3} = \frac{3a^4 - 6a^3 + 3a^2 - 8 + 4a^3}{3}$$

$$= \frac{3a^4 - 6a^3 + 3a^2 - 8a + 8}{3}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$y^2 = (4+z)(4+x)$ черновик

$y^2 = 16 + 4x + 4z + xz$

$A = x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 48$

$xz = \frac{xz(4+x)(4+z)}{y^2}$

$y^2 = \dots$

$\frac{x}{y} = \frac{y(y+4)}{x(x+4)}$

$(x+4)x^2 = y^2(y+4)$

и наоборот

$P_8 \quad P_4^5 \neq C_4^5$

$\frac{C_5^3}{C_4^5}$

$\frac{C_8^3}{C_4^8} \cdot \frac{C_4^3}{C_5^3} = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{4!}{5!(4-5)!} = \frac{8!}{8!(4-8)!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{8!8!(4-8)!3!2!}{5!5!(4-5)!3!5!} = \frac{8!8!2!}{5!5!5!(4-7)(4-6)(4-5)}$

$\frac{C_8^3}{C_4^8} \cdot \frac{C_4^3}{C_5^3} = \frac{C_5^3}{C_4^5} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5!}{3!2!}$

$\frac{x}{z} = \frac{z(z+4)}{x(x+4)}$

$x^2 = z^2 \frac{z+4}{x+4}$

$z(x+y) = 4(x+y) + x^2 + y^2$

$z(x-y) = 4(y-x) + (y-x)(y+x)$

$-z = 4 + x + y$

$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2 + 16$

$x^2 + y^2 + z^2 = (x+1)(y+1)(z+1) + 16 - xyz - 1$

