



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 4)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 15$ ,  $BE = 10$ .
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$  являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$  являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  по часовой стрелке. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle DBC = 35^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 & (1) \\ yz = 4x + x^2 & (2) \\ zx = 4y + y^2 & (3) \end{cases}$$

Умножим (1) на (2) и подставим на  $xz$ . Это можно сделать т.к.  $x, y, z \neq 0$  по усл:

$$y^2 = (4+z)(4+x)$$

$$y^2 = 16 + 4x + 4z + xz, \text{ подставим (3):}$$

$$y^2 = 16 + 4x + 4z + 4y + y^2$$

$$x + y + z = -4 \quad (*)$$

$$16 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z + 8z + 8z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) + 8(x+y+z) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 32$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad (**)$$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16 =$$

$$= \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{(**)} + 8 \underbrace{(x+y+z)}_{(*)} + 48 = 16 - 32 + 48 = 32$$

Ответ: 32



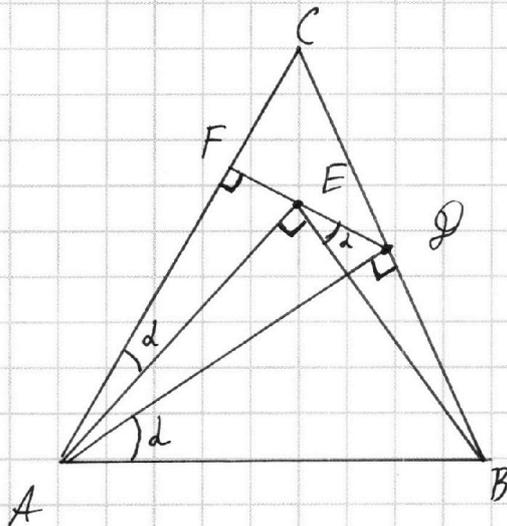


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



т.  $A, B, D, E \in \omega$   
 $AB$  - диаметр  
 $DF \perp AC$   
 $AC = 20$   
 $AB = 15$   
 $BE = 10$   
 $AF = ?$

пусть  $AF = x$ , тогда  $FC = (20 - x)$  т.к.  $AC = 20$

1)  $\angle AEB = 90$  т.к.  $AB$  - диаметр; по т. Пифагора:

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{225 - 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

2)  $\angle DAB = \angle DEB = 90$  т.к. они оба опираются на дугу  $BD$ .

$$\angle FEA = 180 - 90 - \angle DEB = 90 - \alpha$$

$$\angle FAE = 180 - 90 - \angle FEA = 90 - (90 - \alpha) = \alpha$$

$$\text{т.е. } \angle DAB = \angle FAE = \alpha$$

3)  $\angle ADB = 90$  т.к.  $AB$  - диаметр  $\Rightarrow \angle ADC = 90 \Rightarrow ADC$  - прямоугольный.

$$FD - \text{высота в } \triangle ADC \Rightarrow FD = \sqrt{AF \cdot FC} = \sqrt{x(20-x)} = \sqrt{20x-x^2}$$

4)  $\angle AFD = 90$  по усл.; по т. Пифагора:

$$AD = \sqrt{AF^2 + FD^2} = \sqrt{x^2 + 20x - x^2} = \sqrt{20x}$$

$$5) \cos \alpha = \cos \angle DAB = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{20x}}{15}$$

$$\cos \alpha = \cos \angle FAE = \frac{FA}{AE} = \frac{x}{5\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{20x}}{15} = \frac{x}{5\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 15x = \sqrt{20x} \sqrt{125}; 225x^2 = 2500x \quad | : x \neq 0; x = \frac{2500}{225} = \frac{100}{9}$$

Ответ:  $\frac{100}{9}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть было  $n$  шаров  
всего

всего способов выбрать 5 шаров =  $C_n^5$   
число способов выбрать 5 шаров с тремя

$$P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)! \cdot (n-5)! \cdot 5!}{2! \cdot (n-5)! \cdot n!} = \frac{(n-3)! \cdot 60}{n!} = \frac{60}{(n-2)(n-1)n}$$

2) всего способов выбрать 8 шаров =  $C_n^8$   
число способов выбрать 5 шаров с

$$P_2 = \frac{C_{n-3}^5}{C_n^8} = \frac{(n-3)! \cdot 8! \cdot (n-8)!}{5! \cdot (n-8)! \cdot n!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{(n-2)(n-1)n}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot (n-2)(n-1)n}{(n-2)(n-1)n \cdot 6 \cdot 10} = \frac{56}{10} = 5,6$$

Ответ: 5,6.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

пусть  $b_i$  -  $i$ -ый член арифметической прогрессии,  
тогда  $b_4; b_5$  - корни  $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$  (1)

$b_2; b_7$  - корни  $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ . (2)

1) из условия следует, что у (1) и (2) есть по 2  
корня. т.е.

$$\begin{cases} D_{(1)} = a^4 - 2a^3 + a^2 - 4 \cdot \frac{2-a^3}{3} > 0 \\ D_{(2)} = a^6 - 2a^5 + a^4 + 16a^6 + 64a + 32 > 0 \end{cases}$$

2) заметим, что:

$$b_7 - b_5 = b_4 - b_2 \Rightarrow b_2 + b_7 = b_4 + b_5$$

по 7. Виета:

$$b_2 + b_7 = \frac{a^3 - a^2}{2} \quad b_4 + b_5 = a^2 - a$$

$$a^3 - a^2 = 2a^2 - 2a$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$a(a-1)(a-2) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

Ⓘ  $a=0$ .

Ⓙ  $a=0$ .

$$\begin{cases} x^2 + \frac{2}{3} = 0 \\ ax^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b_4 = x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ b_5 = x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$D_{(1)} = -\frac{8}{3} < 0 - \text{противоречие.}$$

Ⓚ  $a=1$ .

$$D_{(1)} = 1 - 2 + 1 - 4 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} < 0 - \text{противоречие}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

IV)  $a=2$

$$D_{(1)} = 16 - 16 + 4 - 4 \cdot \frac{-6}{3} = 4 + 8 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

16

$$D_{(2)} = 64 - 64 + 16 + 16 \cdot 64 + 64 \cdot 2 + 32 = \cancel{64} + 1024 + 128 + 32 =$$
$$= \cancel{1024} 32(2 + 32 + 4 + 1) = 32 \cdot 39$$
$$= 1040 + 160 = 1200 = 400 \cdot 3 = 20^2 \cdot 3$$

$$x_{3,4} = \frac{4 \pm 20\sqrt{3}}{4} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$

тогда:

$$b_2 = 1 - 5\sqrt{3} \quad b_4 = 1 - \sqrt{3} \quad b_5 = 1 + \sqrt{3} \quad b_7 = 1 + 5\sqrt{3}$$

Это действительно члены арифметической прогрессии, например:

~~$b_2$~~   $(1 - 7\sqrt{3})$  - первый член прогрессии

$(2\sqrt{3})$  - разность прогрессии

Ответ: 2

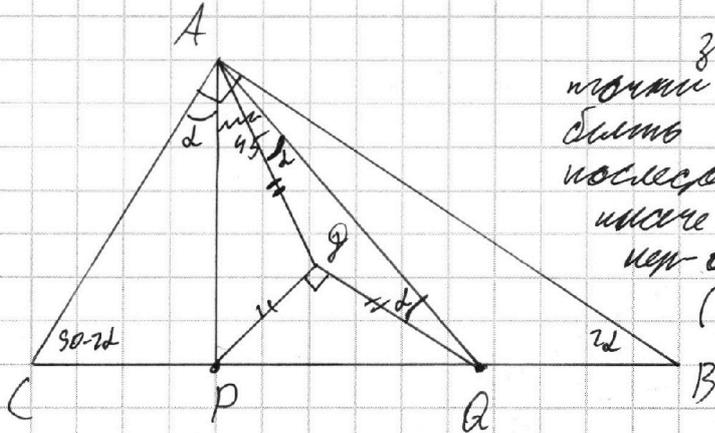


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

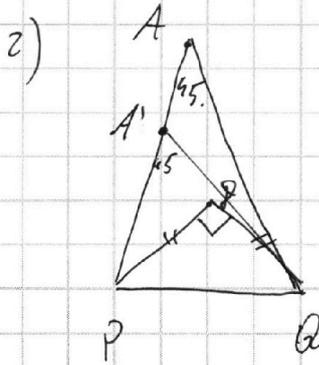


заменим, что  
точки P и Q должны  
быть именно в такой  
последовательности,  
иначе не выделаются  
пер-во 1-го  
( $CQ + QP + PB = BC < AB + AC$ )  
не выис.

1) пусть  $\angle ABC = 2\alpha$ , тогда  $\angle PAB = 90 - 2\alpha$  т.к.  $\triangle ABP$  - п.б  
 $\Rightarrow \angle CAP = \alpha$  т.к.  $\angle A = 90$ .

$\angle ACB = 90 - 2\alpha \Rightarrow \angle CAQ = \frac{180 - 90 - 2\alpha}{2} = 45 + \alpha$  т.к.  $\triangle ACQ$  - п.б

$\angle PAQ = \angle CAQ - \angle CAP = 45 + \alpha - \alpha = 45$ .



докажем, что D - центр опр PAQ.  
пусть это не так  
докажем, что  $A' \in \text{опр}(D; PQ)$   
пусть это не так, тогда опр.  
пересекает прямую AP в т. A', значит  
 $\angle PA'Q = \frac{1}{2} \angle PQ = \frac{1}{2} \angle PPQ = 45$ , не тогда  
 $A'Q \parallel AQ$ , но они пересекаются  
в т. Q - противоречие

3)  $\angle PQR = 45$  т.к.  $\triangle PQR$  - п.б  
 $\angle CQA = \angle CAQ = 45 + \alpha$  т.к.  $\triangle ACQ$  - п.б  $\Rightarrow \angle QCA = \angle CAQ - \angle PQR$   
 $= 45 + \alpha - 45 = \alpha$

тогда  $\angle PAQ = \angle QCA = \alpha$  т.к.  $\triangle PAQ$  - п.б ( $AP = PQ$  по рисунку)

4)  $\angle CAD = \angle CAP + (\angle PAQ - \angle QAD) = \alpha + 45 - \alpha = 45$   
 $\angle BAD = 90 - \angle CAD = 45$ .



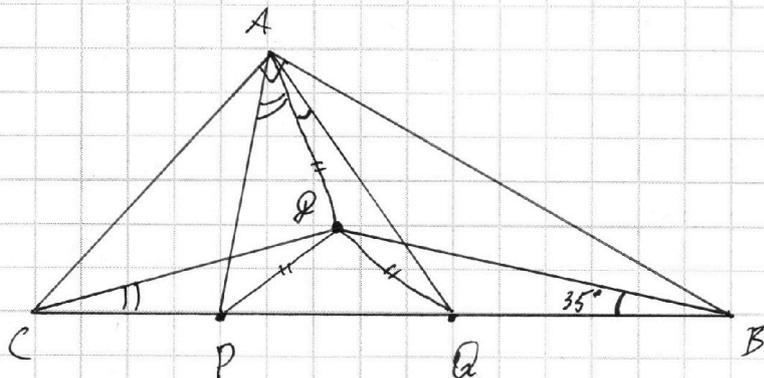
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5)  $\angle CAD = \angle DPQ = 45 \Rightarrow \triangle CPQ - \text{впис}$  (1)  
 $\angle BAP = \angle DAP = 45 \Rightarrow \triangle BAP - \text{впис}$  (2)



из (2)  $\Rightarrow \angle PBQ = \angle PAQ = 35 = \alpha$

из (1)  $\Rightarrow \angle DCP = \angle DAP = 45 - \alpha = 10$

Ответ:  $10^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

*черновик*

$$y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} < 0$$

$$y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} < 0$$

$$\geq 2\sqrt{y^2 - 30y + 225} - \frac{108}{x^2}$$

$$|2y - 30| \leq 6$$

$$|y - 15| \leq 3$$

$$-3 \leq y - 15 \leq 3$$

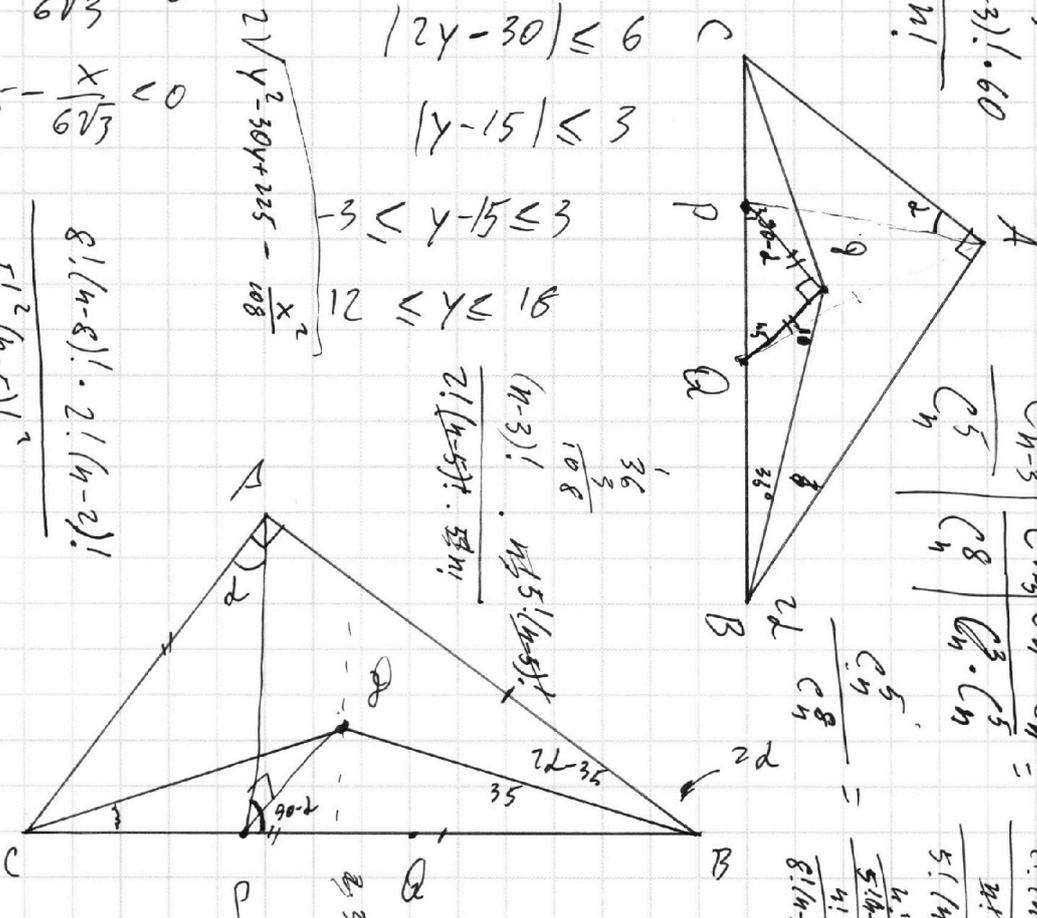
$$12 \leq y \leq 18$$

$$\frac{16/31}{n!} \cdot 60$$

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} \cdot \frac{C_{n-3}^3}{C_n^8} \cdot \frac{C_n^2}{C_n^2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{5!(n-5)!}{2!(n-2)!}$$

$$\frac{8!(n-8)! \cdot 2!(n-2)!}{5!^2 (n-5)!}$$

$$\frac{3! \cdot (n-3)! \cdot n!}{(2-n)! \cdot (n-7)! \cdot (n-8)! \cdot (n-5)! \cdot \dots \cdot (n-2)!}$$



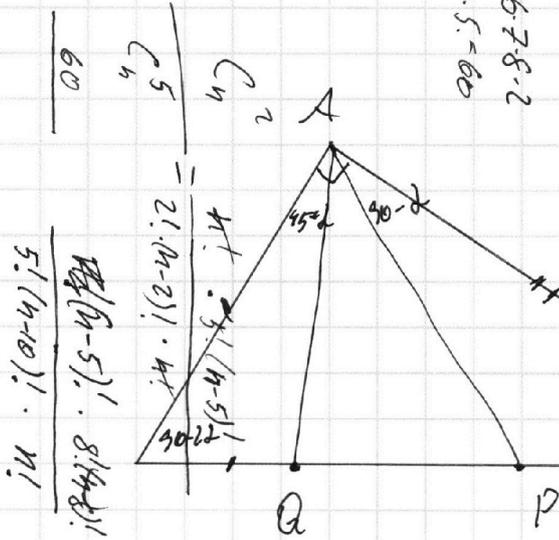
$$\frac{180 - 90 + 22}{2} = 45 + 2 = 47$$

$$BC < AC + AB$$

$$BC < CQ + BP + \dots$$

$$\frac{8!(n-8)!}{5!(n-5)!} \cdot \frac{5!(n-5)!}{2!(n-2)!} = \frac{5!(n-5)!}{2!(n-2)!}$$

$$\frac{C_5^2}{C_5^5} = 1$$



$$\frac{60}{C_n^5} \cdot \frac{C_n^2}{C_n^2} = \frac{5!(n-5)! \cdot 2!(n-2)!}{n!}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

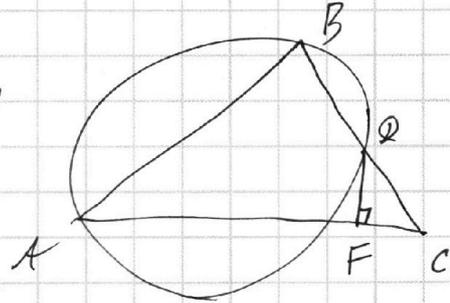
черновики

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 & (1) \\ yz = 4x + x^2 & (2) \\ xz = 4y + y^2 & (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1)/(2)}{(3)} = \frac{z(4+z)x(4+x)}{xz} = 16 + 4x + 4z + xz$$

$$\begin{aligned} xz + 4z + z^2 &= b+d & b+d &= 4x + 4z + 16 = 0 \\ b+d &= b+d & b+d &= x+z = -4 \end{aligned}$$

$$x^2 = 16 + 4x + 4z + 4y + y^2$$



$$n = \underbrace{99 \dots 9}_{25000}$$

$$n = 10^{25000} - 1$$

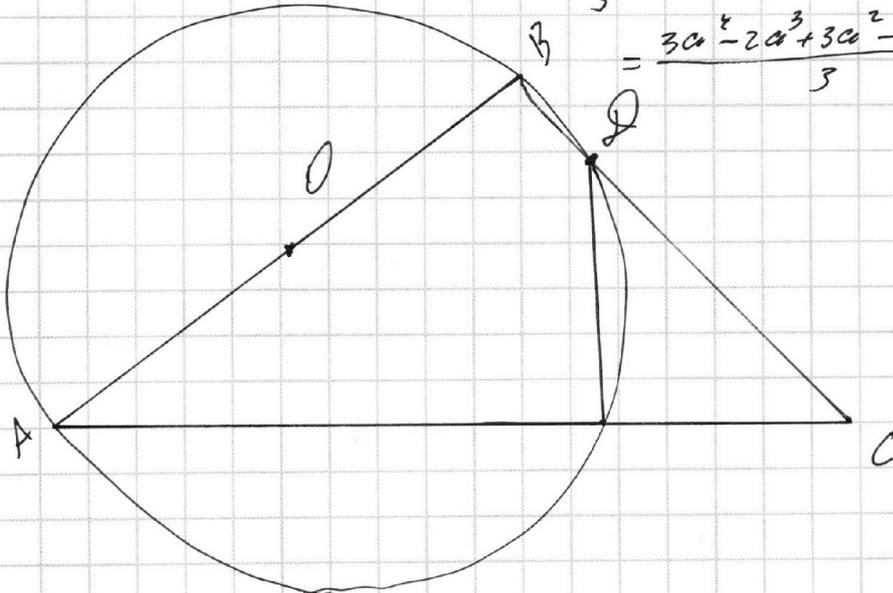
$$n^3 = 10^{75000} - 10^{50000} + 10^{25000} - 1 =$$

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(4+x)(4+y)(4+z)$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$$

$$D = a^4 - 2a^3 + a^2 - \frac{4}{3} + \frac{4a^3}{3} = \frac{3a^4 - 6a^3 + 3a^2 - 4 + 4a^3}{3}$$

$$= \frac{3a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4}{3}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 = (4+z)(4+x)$$

$$y^2 = 16 + 4x + 4z + xz$$

черновик  
4y = xz

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 48$$

$$yz = \frac{xyzx}{xz}$$

$$x=y$$

$$xz = \frac{xz(4+x)(4+z)}{y^2}$$

$$y^2 = \dots$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y(4+z)}{x(4+x)}$$

$$(4+z)x^2 = y^2(4+x)$$

и наоборот

$$P_8 \quad P_n^5 \neq C_n^5$$

$$\frac{C_5^3}{C_n^5}$$

$$1) \quad +++- \quad C_5^2$$

$$\frac{C_8^3}{C_n^8} \quad x^2 = y^2 \cdot \frac{4+z}{4+x}$$

$$= \frac{C_8^3 \cdot C_n^2 \cdot C_n^5}{C_n^8 \cdot C_5^3} = \frac{8! \cdot n!}{3! \cdot 5! \cdot 5!(n-5)!} = \frac{n!}{8!(n-8)! \cdot 3! \cdot 2!}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{z(z+4)}{x(x+4)}$$

$$= \frac{8! \cdot 8! \cdot (n-8)! \cdot 3! \cdot 2!}{5! \cdot 5! \cdot (n-5)! \cdot 3! \cdot 5!} = \frac{8! \cdot 8! \cdot 2!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot (n-7)(n-6)(n-5)} \quad x^2 = z^2 \cdot \frac{z+4}{x+4}$$

$$z(x+y) = 4(x+y) + x^2 + y^2$$

$$z(x-y) = 4(y-x) + (y-x)(y+x)$$

$$-z = 4 + x + y$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2 + 16$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+1)(y+1)(z+1) + 16 - xyz - 1$$



