



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 10$ ,  $AB = 8$ ,  $BE = 6$ .
4. [4 балла] В телепередаче ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$  являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$  являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  по часовой стрелке. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DBC$ , если известно, что  $\angle BCA = 50^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и **суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА  
— А — ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} xy = -2z + z^2 \quad (1) \\ yz = -2x + x^2 \quad (2) \\ zx = -2y + y^2 \quad (3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z - 2 = \frac{xy}{z} \\ x - 2 = \frac{yz}{x} \\ y - 2 = \frac{xz}{y} \end{array} \right.$$

$$\cancel{\frac{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2}{xyz}} = \cancel{\frac{(yz)^2 + (xz)^2 + (xy)^2}{xyz}}$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{(yz)^2}{x^2} + \frac{(xz)^2}{y^2} + \frac{(xy)^2}{z^2}$$

T.K.  $x, y, z \neq 0$ .

$$I = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{(yz)^2}{x^2} + \frac{(xz)^2}{y^2} + \frac{(xy)^2}{z^2}$$

$$= x^2(y^2 - 4y + 4) + y^2(x^2 - 4x + 4) + z^2(z^2 - 4z + 4) = 12 + xy + xz + yz$$

$$= x^2y^2 - 4x^2y + 4^2 + y^2z^2 - 4y^2z + 4^2 + z^2x^2 - 4z^2x + 4^2 = yz + xz + xy + 12$$

$$= yz^2 + 2xy + 2xz + 3 - x^2y^2z^2 = \text{no calc. } z - \text{new problem}$$

$$I = \frac{yz^2}{x^2} + \frac{(xz)^2}{y^2} + \frac{(xy)^2}{z^2} = \frac{z^2}{x^2} \cdot \frac{(xy)^2}{z^2} \cdot \frac{(xz)^2}{y^2} = 823$$

$$\frac{(a+b)^2}{3} > 3abc$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(2)

$$n = 10^{30001} - 1 = \underbrace{9 \dots 9}_{30001} \quad ((a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$$

$$\begin{aligned} n^3 &= (10^{30001} - 1)^3 = 10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1 = \\ &= \underbrace{10^{60002}}_{\text{II}} \underbrace{(10^{30001} - 3)}_{\substack{\text{II} \\ 9 \dots 9700 \dots 0}} + \underbrace{3 \cdot 10^{30001}}_{\substack{\text{II} \\ 299 \dots 9}} - 1 = \\ &= \underbrace{9 \dots 9700 \dots 0}_{30000} + \underbrace{299 \dots 9}_{30000} = \underbrace{9 \dots 970 \dots 029 \dots 9}_{31000 \quad 30000} \end{aligned}$$

Ответ: 60000.

$$\underline{N_g = 60000}$$

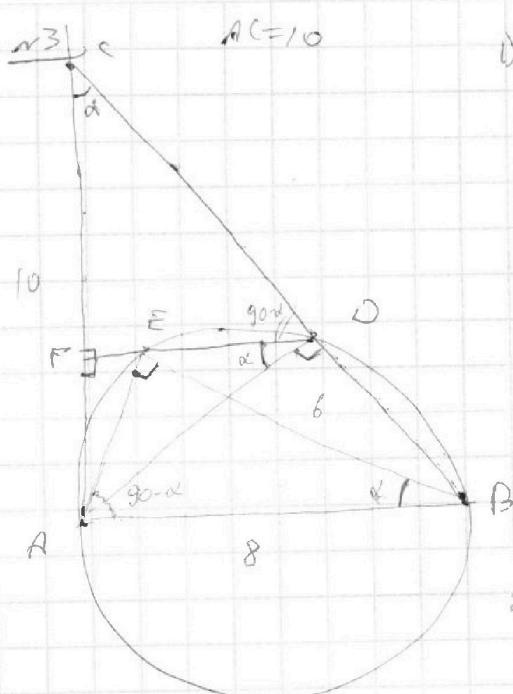


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Рисуя  $\angle FDB = \alpha$ .  
 $\angle AOB = 90^\circ$   
 т.к. опирается на диаметр

$$\angle FDC = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$$

$$\angle FCD = \alpha.$$

$\triangle FCD \sim \triangle AFD$   
 (по углам)

$$\frac{FD}{AF} = \frac{FC}{FD}$$

$$FD^2 = FC \cdot AF$$

$$FD = \sqrt{FC \cdot AF}$$

$$2) \angle AEB = 90^\circ$$

т.к. опирается  
на диаметр W;

$$\angle EBA = \angle EDA = \alpha.$$

$$\angle AEB = \angle AFD = 90^\circ$$

✓

$\triangle AFD \sim \triangle AEB$  (по 2ym углам)

$$3) AF + FC = AC = 10$$

$$AF + \frac{36}{28} AF = 10$$

$$AF \left(1 + \frac{9}{7}\right) = 10$$

$$AF \left(\frac{16}{7}\right) = 10$$

Ответ:  $AF = \frac{35}{8}$

$$(43 \text{ - th. Пицаро ртко } AEB) \quad \frac{AE}{AF} = \frac{BE}{FD}$$

$$AE = \sqrt{AB^2 - EB^2} = \sqrt{28^2 - 6^2}$$

$$\frac{\sqrt{28}}{AF} = \frac{6}{\sqrt{FC \cdot AF}}$$

$$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{AF}} = \frac{6}{\sqrt{FC}}$$

$$\sqrt{\frac{AF}{FC}} = \frac{\sqrt{28}}{6}$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{28}{36} \quad AF = \frac{28}{36} FC$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Рулет всего  $n$  коробок

$P_1$  - вероятность победы при начальных усл

$P_2$  - вер. победы при 2-х условиях

1-ые усл-ши: Кол-во способов выбрать всичграческий набор из  $n$  коробок, где должны лежать 3 подбдных маркированных коробок, которые т.e. 6 которых лежат шариков)

710  $C_n^2$ , т.к. 3 коробки обязательно должны быть в этом наборе, а оставшиеся 2 - произвольные из оставших

Кол-во всевозможных наборов из 5 коробок:  $C_n^5$

$$P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)(n-4) \cdot 5!}{2(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

2-ое условие:

Из аналогичных соображений (из 1го случая)

Кол-во всичграческих наборов коробок =  $C_{n-3}^4$

Кол-во всевозможных наборов =  $C_n^4$

$$P_2 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^4} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{24} \cdot \frac{7!}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)} = \frac{7!}{24 n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{7!}{24 \cdot 60} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{60} = \frac{7 \cdot 5}{10} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ раза}$$

Отв: в 3,5 раза

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) (1)  $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ . Корни:  $x_1, x_2$

(2)  $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$  Корни:  $x_3, x_4$

Решение  $a_1$  - первый элемент прогрессии

Тогда без отр. обобщений:  $x_1 = a_1 + 3d$

Тогда из теоремы

Бугра газ (1):

$$x_1 + x_2 = -(-(a^2 - 2a))$$

$$x_2 = a_1 + 6d$$

$$x_2 = a_1 + 3d$$

$$x_4 = a_1 + 8d.$$

$$x_1 + x_2 = a^2 - 2a$$

$$\underline{2a_1 + 11d = a^2 - 2a}.$$

Аналогично для т. Бугра газ (2):

$$x_3 + x_4 = a^3 - 2a^2$$

Заметим, что  $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$   $\underline{2a_1 + 11d = a^3 - 2a^2}$

Тогда  $a^2 - 2a = a^3 - 2a^2$

$$a^2 - 2a - a(a^2 - 2a) = 0.$$

$$(a^2 - 2a)(1 - a) = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a^2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \\ a = 0. \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим, если значение  $a = 0$   $\begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$  условие.

①  $a=0$ .

$$(1) : x^2 - 4 = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{4}$$

$$x_2 = \sqrt{4}$$

$$(2) : 3x^2 + 6 = 0$$

$$x^2 = -2 - \emptyset \quad a=0 \text{ не удовл. условию}$$

②  $a=1$

$$(1) : x^2 + x - 4 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 4 = 29$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2} \Rightarrow d = \sqrt{29}$$

$$(2) : 3x^2 + x + 5 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 5 < 0 \Rightarrow \emptyset - \text{не удовл. условию}$$

③  $a=2$

$$(1) : x^2 - 5 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{5}$$

$$x_1 = -\sqrt{5} \stackrel{a \neq 0}{=} \quad d = 2\sqrt{5}$$

$$x_2 = \sqrt{5} = a_2$$

$$d = \frac{a_6 - a_4}{2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{\frac{26}{3}}}{2}$$

$$(2) : 3x^2 - 26 = 0$$

$$x^2 = \frac{26}{3}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{26}{3}} = a_3$$

$$d = -\frac{\sqrt{26}}{3} - \frac{\sqrt{26}}{3} = \frac{-2\sqrt{26}}{3}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{26}{3}} = a_4$$

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{\frac{26}{3}}}{2} \neq -\frac{2\sqrt{26}}{3}$$

Ответ: не существует таких  $a$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{5}{-} \quad (1) \quad |x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}| + |x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}| \leq 4$$

Рассмотрим случаи:

1) + + - (одна скобка  
с оба выражения  $+ (+ > 0)$ )

$$\begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} > 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > -2\sqrt{3}x + 20\sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\left( \text{Прямые } y = 20\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x \right. \\ \left. y = 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} \right)$$

Пересекаются в  
в точке  $x = 10$

$$x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} + x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4$$

$$2x - 20 \leq 4$$

$$x \leq 12$$

2) (1) : - ; (2) : -

$$\begin{cases} y < -2\sqrt{3}x + 20\sqrt{3} \\ y > 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} \end{cases}$$

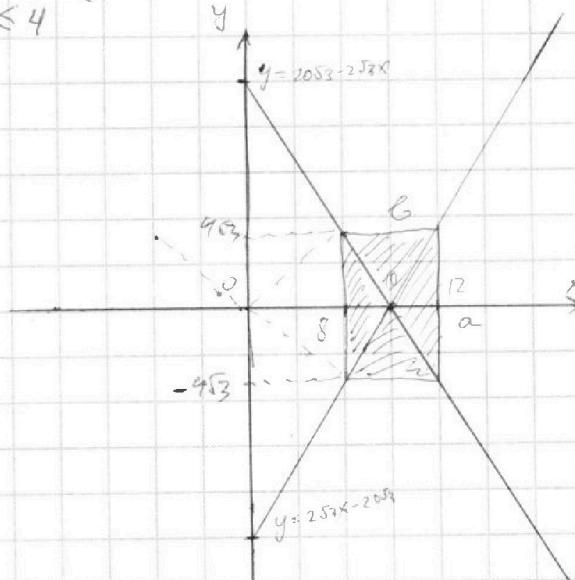
$$-x + 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} - x + 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4$$

$$x \geq 8$$

Рисунок  $\varphi$  - Прямоугольник.  
 $a, b$  - стороны прямоугольника.

$$a = 8\sqrt{3}, b = 4$$

(~~1+1=2~~-100%)



3) (1) : + ; (2) : -

$$\begin{cases} y > -2\sqrt{3}x + 20\sqrt{3} \\ y > 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} - x + 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4$$

$$\begin{array}{l} \text{Заменим,} \\ 20\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x = 4\sqrt{3} \\ (x=8) \end{array} \quad \frac{y}{\sqrt{3}} \leq 4 \quad (y \leq 4\sqrt{3})$$

4) (1) - ; (2) +

$$\begin{cases} y < -2\sqrt{3}x + 20\sqrt{3} \\ y > 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} \end{cases}$$

$$y \geq -4\sqrt{3}$$

аналогично

$$2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$$

$$(x=8)$$

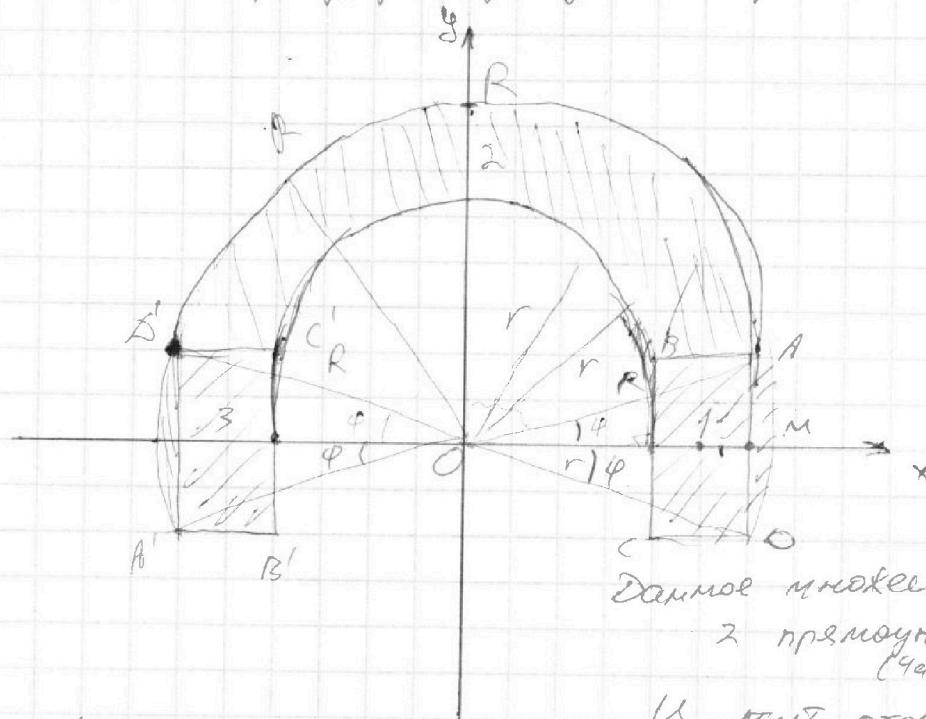
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим фигуру, полученную при вращении  $\varphi$  на  $\pi$ .



Данное множество:

2 прямогольника  $\varPhi$   
(части 1 и 3)

и овал ограниченный  
двумя дугами окр.  
 $\omega(O,0), r$  и  $\Omega(O,0), R$

$r$ -крайнее  
расстояние от  $(0,0)$   
до прямогольника  
а  $R$ -наибольшее

т.к. Если рассмотреть  
какуюто точку по  
отдельности, то она  
(точка A) замечает дугу.

с радиусом  $(0,0), A$ )

Значит границы  
мн-ва - дуги  
с наиб.  $R$  и  
наиб.  $r$ .

Малая дуга (с радиусом  $r$ )  
(угол) имеет величину  $\pi + 2\varphi$  т.к.  
тогда выше либо  
ниже либо  
гранича нашего мн-ва  
при  $y < 0$ , стояла прямая.

Большая дуга имеет  
(угол) величину  $\pi + 2\varphi$  т.к.  
 две точки фигуры  $\varPhi$  будут  
замечать дуги с радиусом  $R$ .

Найдем  $\varphi$ : В силу сим.

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{AM}{OM} = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &\Rightarrow \varphi = 30^\circ \end{aligned}$$

$$\varphi = 30^\circ \Rightarrow R = 2AM = 8\sqrt{3}, r = 8.$$

тогда получаем такую машину;

$$S^i = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(64\sqrt{3} - 64) = 128\pi\sqrt{3} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

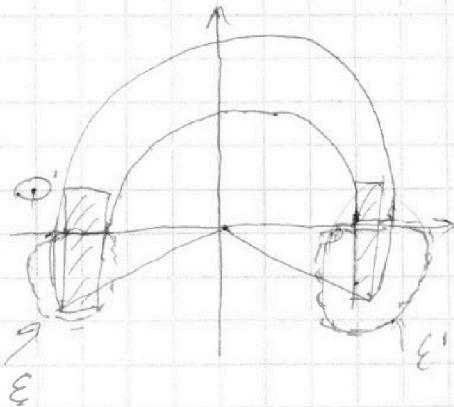


- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА

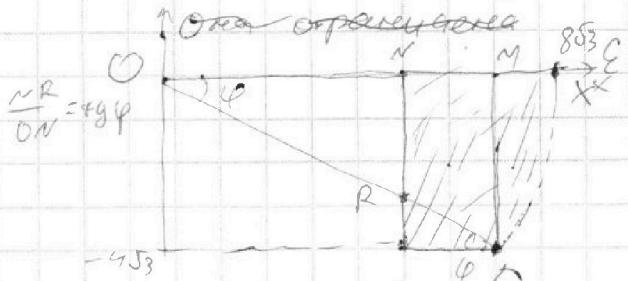
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Теперь подсчитаем

площадь фигуры  $E$ :



$$S_{\text{omr}} = \frac{\phi}{2\pi} \cdot \pi R^2 = \frac{1\pi \cdot 04}{8\pi} = \frac{16\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{omn}} &= \frac{1}{2} ON \cdot NR = \\ &= \frac{1}{2} \cdot ON \cdot ON \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{orm}} &= \frac{1}{2} RC \cdot CD = \\ &= \frac{1}{2} (NR - NR) \cdot CD = \\ &= \frac{1}{2} \left( 4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} \right) \cdot 4 = \\ &= 2 \left( \frac{4\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{8\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$S_E = \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi \approx 22$$

$$S_E = \frac{16\pi - 32\sqrt{3} + 8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\pi - 24\sqrt{3}}{3}$$

Очевидно т.к.  $S_E = S_E'$  (из симметрии)

$$\text{Общий: } S = 2S_E + S' = \underline{\underline{\frac{2(16\pi - 24\sqrt{3})}{3} + 128\pi}}$$

$$\begin{aligned} S_E &= S_{\text{omr}} - S_{\text{omn}} + S_{\text{orm}} \quad S_E = S_{\text{omr}} - S_{\text{omn}} \\ S_{\text{omr}} &= \frac{\phi}{2\pi} \cdot 2\pi R = \frac{\phi R}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \\ S_{\text{omn}} &= \text{последний сектора высечено} \\ &\text{второй ход окружности} \\ S_{\text{orm}} &= \frac{\phi}{2\pi} \cdot 2\pi R = \frac{\phi R}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$S_{\text{omr}} = \frac{\phi}{2\pi} \cdot 2\pi R = \frac{\phi R}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{omn}} &= \frac{1}{2} ON \cdot NR = \frac{1}{2} \cdot ON \cdot ON \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$S_{\text{orm}} = \frac{ON \cdot NR}{2} = \frac{ON \cdot NR}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{\text{omn}} = 32\sqrt{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.







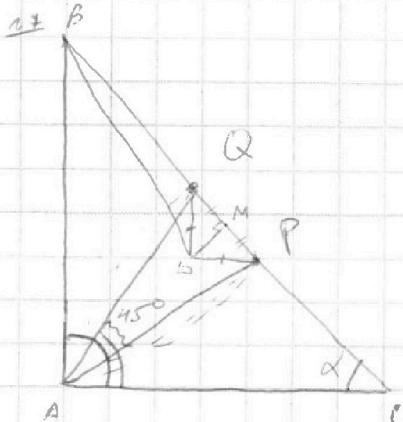






СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Рассмотрим  $\angle BCA = \alpha$

$$\text{т.к. } \triangle AQC - \text{rt}\delta, \angle QAC = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{т.к. } \triangle ABP - \text{rt}\delta, \angle ABC = 90 - \alpha.$$

$$\angle BAP = \frac{180 - 90 + \alpha}{2} = 45 + \frac{\alpha}{2}$$

2) Рассмотрим  $\angle QAP = \theta$

$$\text{тогда } \angle BAP + \angle QAC - \theta = 90^\circ$$

т.к. углы  $\angle BAP$  и  $\angle QAC$  находятся между друг

и другим на величину угла  $\theta$

(они точно находятся по периметру  $\triangle$ :

$$AB + AC > BC$$

$$AQ + BP > BC$$

и

$\angle BAP$  и  $\angle QAC$

находятся между

другими

сторонами

точкой  $D$ -центр описаной

окружности  $\triangle AQP$ .

значит середина

отрезка  $AP$ , проходит

через точку  $D$ ,

но т.к.  $\triangle BAP - \text{rt}\delta$ , то

середина  $AP$  проходит

через вершину  $B$

$\Rightarrow BD$ -биссектриса, высота и медиана

$$\angle ABP \Rightarrow \angle ABP = \frac{180^\circ - 90^\circ - \alpha}{2} = \frac{90 - \alpha}{2} =$$

$$= 20^\circ.$$

Ответ:  $20^\circ$

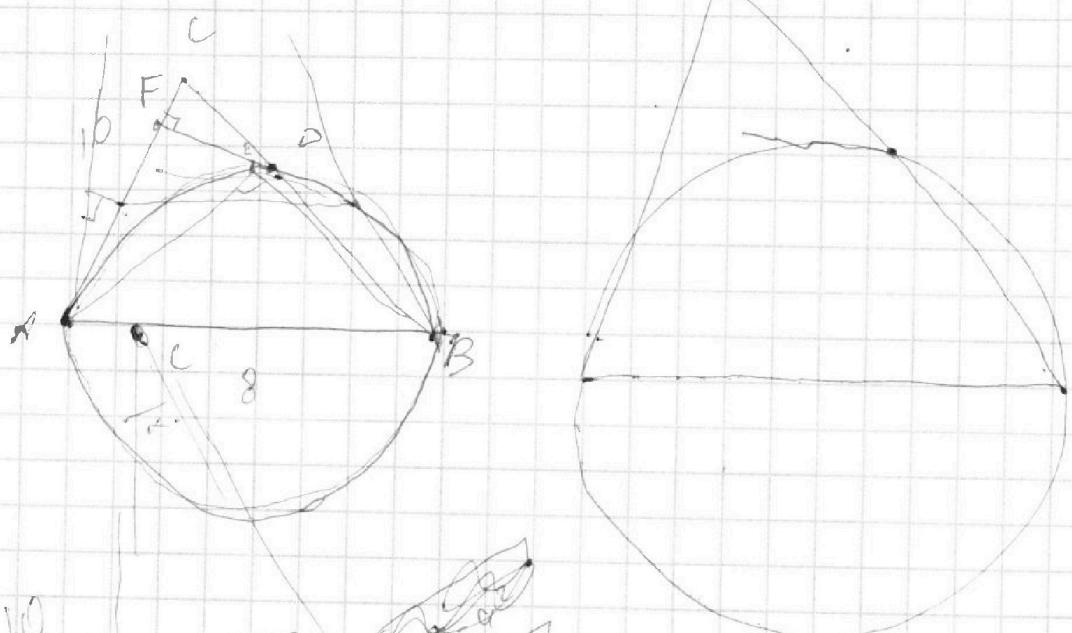


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



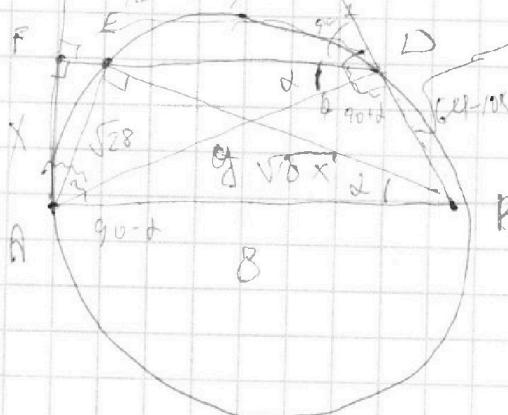
10

$10x$

$$\sqrt{2x-x^2-y^2}$$

$$100-y^2-100+2x-x^2$$

$$\sqrt{100-y^2} AF = ?$$



$$64 - 36 = 28$$

$$y^2 - x^2 = (100 - y^2) - (10 - x^2)$$

$$y^2 - x^2 = 100 - y^2 - 100 + 20x - x^2$$

$$2y^2 = 20x$$

$$\frac{FD}{AF} = \frac{CF}{FD}$$

$$CF + GF = 10$$

$$y = \sqrt{10x}$$

$$FD^2 = CF \cdot AF$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \quad \text{4} \quad \text{5} \quad \text{6} \quad \text{7} \quad \text{СТРАНИЦА} \\
 & \text{_____ из _____}
 \end{aligned}$$

$(y = -2z + z^2)$   
 $y^2 = -2xz + x^2$   
 $xz = -2y + y^2$   
 $x(x-2) = y^2$   
 $(x-2)^2 = y^2(x-2)$   
 $y^2 \cancel{x} \quad (xy^2)^2 = xy^2(x-2)(y-2)(z-2)$   
 $(y^2)^2 \cancel{x} \quad x(x-2) \cancel{x} \quad x^2(y^2)^2 = x^2(y-2)(z-2)$   
 $\left(\frac{yz}{x}\right)^2 = \frac{x^2(x-2)x^2(x-2)}{(y-2)(z-2)x^2}$   
 $(x-2)^2 = \frac{(x-2)^2 x^2}{(y-2)(z-2)}$   
 $x = \frac{x(x-2)}{y}$   
 $x = \frac{x^2(y-2)}{y}$   
 $x^2 = (y-2)(z-2)$   
 $x = \frac{xy(y-2)}{y}$   
 $x^2(x-2) = y^2(y-2)$   
 $y^2(y-2) = z^2(z-2) = x^2(x-2)$   
 $x^2 = -2x + x \quad 1-2z=1+xy-z^2$   
 $y = z \quad x = 1 \quad x^2-2x-x^2+x^2$   
 $(x-2)^2 = x^2-4x+4 \quad x^3-2x^2$   
 $y = 1 \cdot x + 1 = 2 + \frac{x^2y}{x} + \frac{y^2z}{x} \quad x^2-2x-2x+4$   
 $y^2 = \frac{x^2}{x} + \frac{y^2z}{x} \quad x^2-2x-2x+4$   
 $+y(z-2) = xz-2y + 12 \quad x^2-2x-2x+4$   
 $+z(y-2)+12 \quad x^2-2x-2x+4$

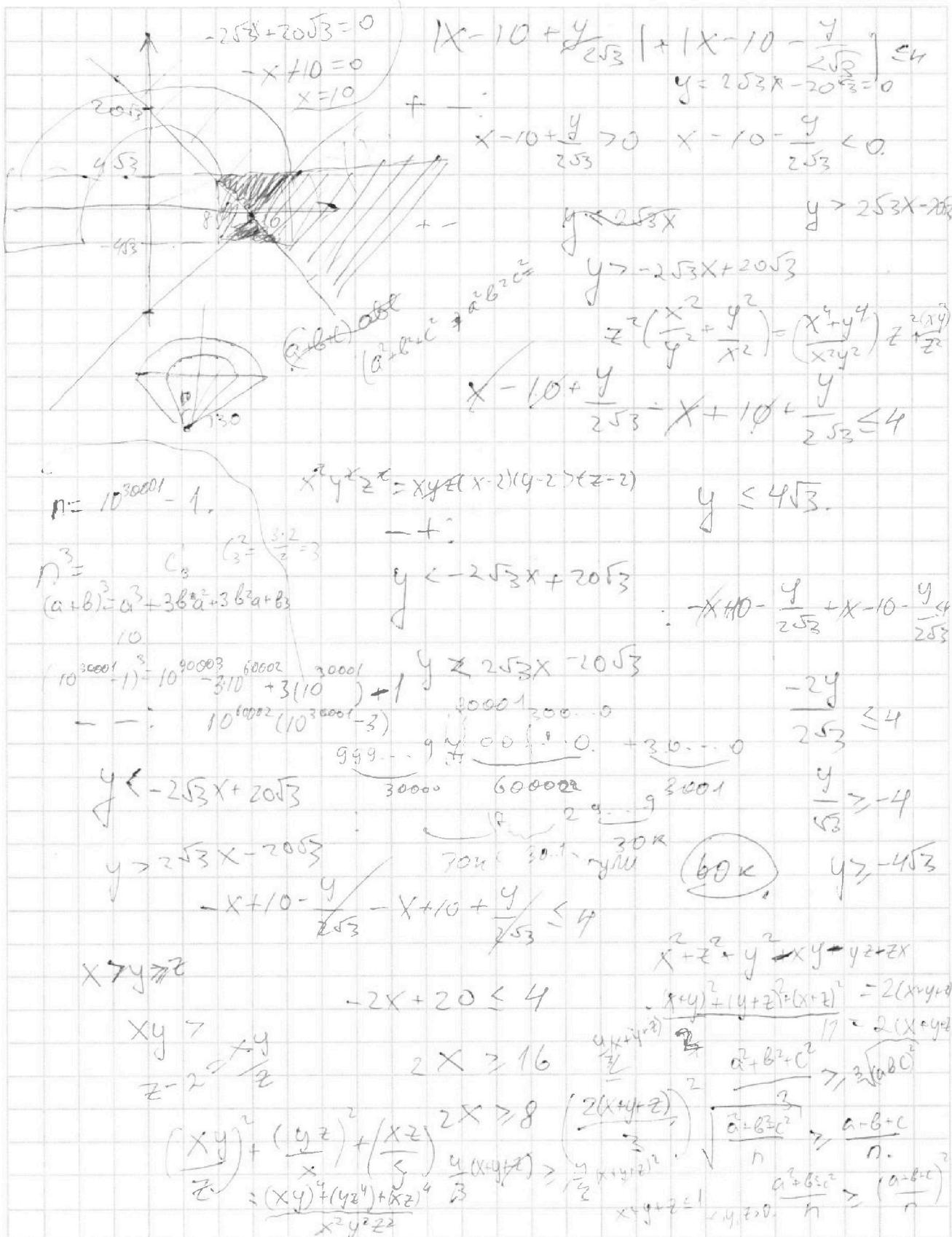


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



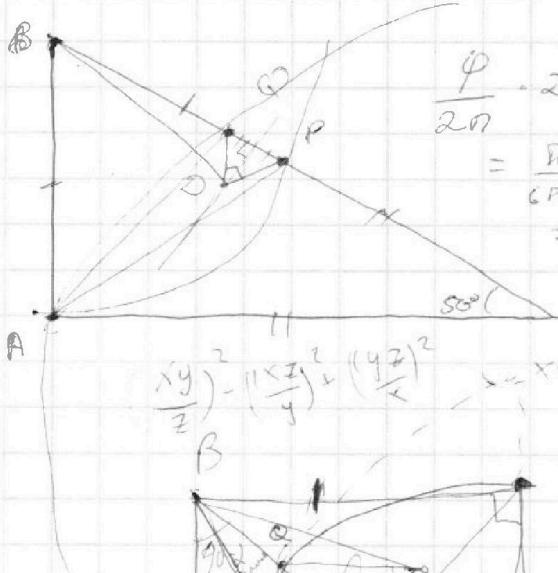


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

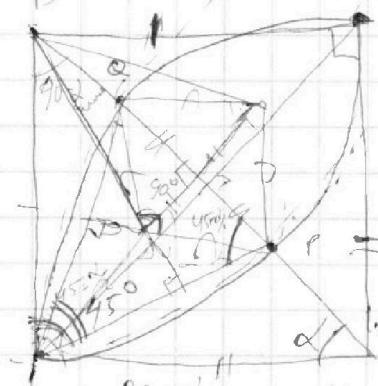


$$\frac{\varphi}{2n} \cdot 2nR = \\ = \frac{R}{6P} \cdot 16\pi\sqrt{3} \\ = \frac{16\pi\sqrt{3}}{6}$$

$$16\pi\sqrt{3} \approx 94$$

$$S_{ONR} = \frac{1}{2} ON \cdot NR = \\ = \frac{64 \cdot \sqrt{3}}{6} \\ ON = 8.$$

$$\left(\frac{xy}{2}\right)^2 - \left(\frac{xz}{2}\right)^2 - \left(\frac{yz}{2}\right)^2 > x^2y^2z^2$$



$$\frac{180 - 90 + 2}{2} = 90 \quad 45 + \frac{2}{2}$$

$\alpha_1$

$$x_1, x_2 \in \alpha_1 + (n-1)d,$$

$$x_1 = \alpha_1 + 5d$$

$$x_2 = \alpha_1 + 6d.$$

$$135 - 90 = \theta$$

$$x_3 = \alpha_1 + 3d$$

$$x_4 = \alpha_1 + 8d$$

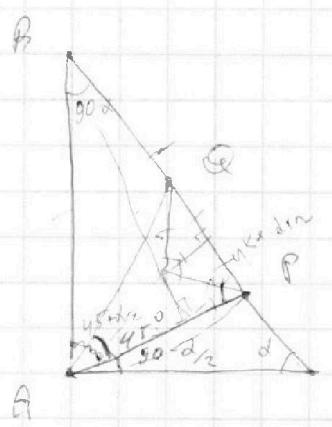
$$x^2 - (\alpha - 2a) x + a^2 a - y$$

$$\Delta = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a + 4$$

$$= a^4 - 4a^3 + 4a + 4$$

$$a^4 + 4 - 4a(a^2 - 1)$$

$$a^4 - 1 + 8 - 4(a^2 - 1) \\ (a^2 - 1)(a^2 + 1 - 4) + 8$$



$$135 - \theta = 90$$

$$\theta = 95^\circ$$

