



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В теленгрире ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases} \quad x, y, z \text{ не равны } 0.$$

$$1) (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16 = \\ = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z + 48$$

2) Сложим 3 ур-ия из системы.

Получим, что $xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z$

Тогда заметим, что $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z + 48 = \\ = xy + yz + zx + 4x + 4y + 4z + 48.$

3) Перемножим 3 ур-ия из системы.

Получим, что $xy \cdot yz \cdot zx = (x^2 + 4x)(y^2 + 4y)(z^2 + 4z) = \\ = x^2y^2z^2 + 4x^2y^2z + 4x^2z^2y + 16x^2yz + 4y^2z^2x + 16y^2xz + \\ + 16z^2xy + 64xyz$

То есть:

$$(xyz)^2 = (xyz)^2 + 4xyz(xy + xz + yz) + 16xyz(x + y + z) + 64xyz$$

$$0 = 4xyz(xy + xz + yz + 4(x + y + z) + 16)$$

Мы знаем, что $x, y \text{ и } z \text{ не равны } 0$. Тогда множитель



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy + xz + yz + 4(x+y+z) + 16 = 0$$

Значит, $xy + xz + yz + 4x + 4y + 4z = -16$

Значит, $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z + 48 = xy + yz + xz + 4x + 4y + 4z + 48 = -16 + 48 = 32$.

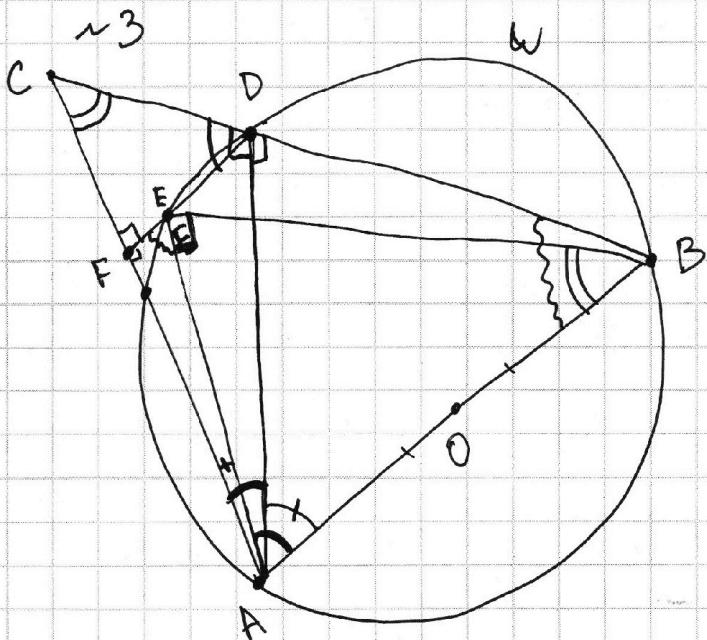
Ответ: 32.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$AB = 15, AC = 20, BE = 10$$

$DF \perp AC$, $EE' \parallel W$, AB -диаметр.

O -центр W .

Найти: AF

1) Так как AB -диаметр W , то $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$.
(Эти углы опираются на диаметр) Тогда $\angle ADC = 90^\circ$ как смежный с $\angle ADB$.

2) $\angle ABD = \angle AEF$, так как $AEDB$ -вписанный четырехугольник ($\angle ABD + \angle AED = 180^\circ$), а $\angle AEF + \angle AED = 180^\circ \Rightarrow \angle ABD = \angle AEF$)

Тогда $\triangle AEF \sim \triangle ABD$ по 2-м углам - $\angle ABD = \angle AEF$ и

$\angle AFE = 90^\circ = \angle ADB$. Значит

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB}$$

(но $\overline{AF} \perp \overline{AC}$)

Также отсюда следует равенство углов: $\angle FAE = \angle DAB$.

3) $\angle FAD = \angle FAE + \angle EAD$, $\angle EAB = \angle FAD + \angle DAB$.

Отсюда следует, что $\angle FAD = \angle EAB$.

Тогда $\triangle ADC \sim \triangle AEB$ по 2-м углам:

$$\angle FAD = \angle EAB \text{ и } \angle ADC = 90^\circ, \angle AEB = 90^\circ.$$

Тогда

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

4) ΔAEB по Т. Пифагора $AE^2 + BE^2 = AB^2$

$$\text{т.е. } AE^2 + 100 = 225 \Rightarrow AE = 5\sqrt{5}$$

Тогда $\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

~~A также~~ $\frac{AC}{AB} = \frac{20}{15} \quad \frac{AE}{AD} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$

~~также~~ $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}, \text{ т.е. } \frac{20}{15} = \frac{5\sqrt{5}}{AD}$

~~Отсюда~~ $10 \cdot AD = 15 \cdot 5\sqrt{5}$

~~- 4AD~~

~~A также~~ $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{20}{15} = \frac{5\sqrt{5}}{AD}$

~~Отсюда~~ $3AD = 4 \cdot 5\sqrt{5}$

$$AD = \frac{20\sqrt{5}}{3}$$

~~A тк~~ $\frac{AF}{AD} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ т.о. } AF = \frac{\sqrt{5}}{3} AD = \frac{20 \cdot 5}{3} = \frac{100}{3}$

~~Ответ:~~ $AF = \frac{100}{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~5

$$1) x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$$

Пусть корни этого уравнения - x_1 и x_2 (если они есть)

Тогда по т. Виетта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - a \\ x_1 x_2 = \frac{2-a^3}{3} \end{cases}$$

$$2) 2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

$$x^2 - \frac{a^3 - a^2}{2}x - a^6 - 4a - 2 = 0$$

Пусть корни этого уравнения - x_3 и x_4 (если они есть)

Тогда по т. Виетта:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2} \\ x_3 x_4 = -a^6 - 4a - 2 \end{cases}$$

Такие же для x_1, x_2, x_3, x_4 делают выводы:

$$x_1 = a_0 + 3d, x_2 = a_0 + 4d, x_3 = a_0 + d, x_4 = a_0 + 6d$$

Что значит, что они являются членами некоторой арифм. прогрессии с первым членом a_0 и разностью d . Тогда $x_1 + x_2 = 2a_0 + 7d$, $x_3 + x_4 = 2a_0 + 7d$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

То есть $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, а значит $a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2}$

При $a \neq 0$: скрываем a на $a^2 - a$

$$(a^2 - a) = \frac{a(a^2 - a)}{2}$$

$$\frac{a(a^2 - a)}{2} - (a^2 - a) = 0$$

$$\frac{a(a^2 - a) - 2(a^2 - a)}{2} = 0$$

$$\frac{(a-2)(a^2 - a)}{2} = 0 \Rightarrow a(a-2)(a-1) = 0$$

Тогда корни этого уравнения $a = 0, 1, 2$

Из этого уравнения a может быть 0, 1 или 2

При $a=0$:

Уравнение принимает вид 1) $x^2 + \frac{2}{3} = 0$, 2) ~~$x^2 - 2 = 0$~~

У первого уравнения в таком случае корней нет,

а значит, $a=0$ нам не подходит.

При $a=1$:

Уравнение принимает вид 1) $x^2 + \frac{1}{3} = 0$, 2) $x^2 - 7 = 0$

У первого уравнения здесь нет корней $\Rightarrow a=1$ не подходит.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При $a=2$:

Ур-ие принимает вид 1) $x^2 - 2x - 2 = 0$

$$2) \quad x^2 - 2x - 74 = 0$$

У первого ур-ия: $x^2 - 2x - 2 = 0$

$$D = 4 + 4 \cdot 2 = 12$$

~~Это корни - это~~ $\frac{2+2\sqrt{3}}{2} \quad \sqrt{1+3}$

Корни такого ур-ия - это $1+\sqrt{3}$ и $1-\sqrt{3}$.

У второго:

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 74 = 4 \cdot 75 = 4 \cdot 25 \cdot 3$$

Корни этого ур-ия - это $1+5\sqrt{3}$ и $1-5\sqrt{3}$

Заметим, что ~~все~~ полученные корни составляют арифметическую прогрессию:

$$a_0 = 1+7\sqrt{3}, \quad d = -2\sqrt{3}$$

Тогда $a_1 = 1+5\sqrt{3}$, ~~а~~ $a_3 = 1+\sqrt{3}$, $a_4 = 1-\sqrt{3}$,

$$a_6 = 1-5\sqrt{3}$$

Такие члены серии являются вторым, четвертым, шестым и седьмым членами арифм. прогр. ~~всего~~ в ~~семи~~ членами ~~всех~~ по порядку.

Тогда а может быть d .

Отв: 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

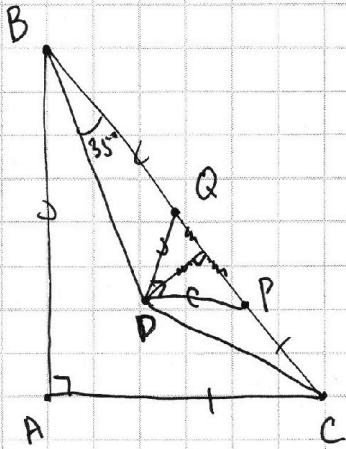


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

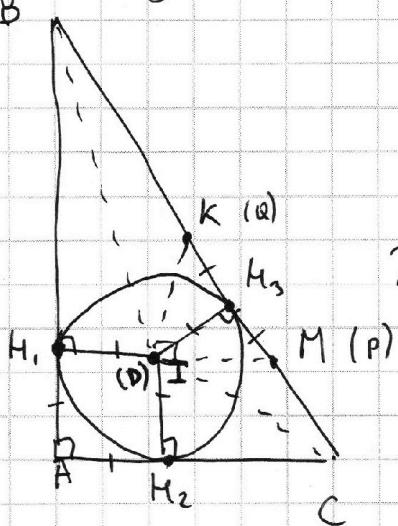
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7



Замечаем, что D лежит на сегм. перп. к QP (такти $\angle DQ = \angle DP$ по условию)

Давайте возьмем данный треугольник $\triangle ABC$ и впишем в него окружность.



Рассмотрим впис. окр. - I,

а точки касания - H_1 , H_2 и H_3 , соотв.

Тогда замечаем, что $AH_1 \approx H_1I \approx IH_2 = AH_2$, т.к. $\triangle ABC$ -примо-

гл.

(тогда AH_1, IH_2 - параллелограммы $IH_2 \perp AH_1$, а тогда $AH_1 \parallel IH_2$)

аналогично $IH_1 \parallel AH_2$,

значит $AH_1 = IH_2 = AH_2 = IH_1$,

а $IH_1 = IH_2$ равна как радиусу)

Отложим на BC отрезки

H_3K и H_3M такие, что они равны радиусу впис. окр.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда заметим, что $AB = BM$, так как $BH_1 = BH_3$ как отрезки насыпелых, а $AH_1 = H_3M$ по построению. Аналогично, $CK = CBAC$. Тогда получаем, что точки K и M совпадают с точками Q и P соответственно, т.к. на BC может быть только одна такая точка, что $AB = BM$ и $CK = AC$ соответственно. Теперь заметим, что Терь посмотрим на I. Заметим, что Γ равнобедренная от K и M по построению, а также $\angle KIM = 90^\circ$ (т.к. т.к. медиана IM_3 равна KM_3 и MH_3 соответственно.) (опис. окр. вокруг $\triangle KIM$ тогда на диаметре $KM \Rightarrow \angle KIM = 90^\circ$)
В таком случае, D совпадает с I (т.к. D и I обе равнобедренные от K и M \Rightarrow D и I на сер. пер. KMK), а также $\angle KIM = \angle RIQ = 90^\circ$ (KQ, PR и M сообр.). Но в таком случае A т.к. на сер. пер. KMK в данной полуоси может быть только одна такая точка, то D совпадает с I).
Аб также случаи - D - центр опис. окр. $\triangle ABC$, q значит 20 градусов пересечение биссектрис $\angle ABC \Rightarrow BI$ - бисс. $\Rightarrow \angle ABC = 35^\circ \cdot 2 = 70^\circ \Rightarrow \angle BCA = 20^\circ \Rightarrow \angle BCD = 10^\circ$ т.к. BD - бисс. \Rightarrow Ответ: 10°

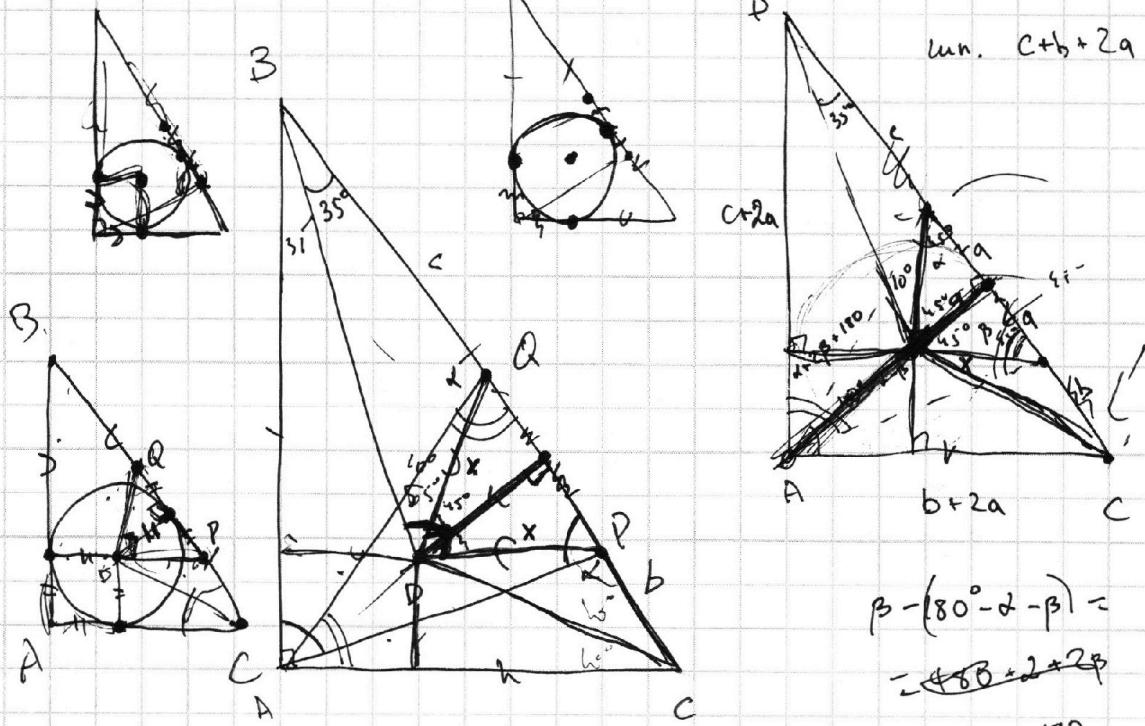
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



ин. $c+2a + 2a$

$$\beta - (80^\circ - \alpha - \beta) =$$

$$= 40^\circ + 2\beta$$

$$\angle + 2\beta + 190^\circ$$

$$BD^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cos 135^\circ$$

$$DC^2 = b^2 + x^2 -$$

$$\frac{c+2a}{b+2a} = \frac{c+a}{b+a}$$

$$(b+a)(c+2a) = (b+2a)(c+a)$$

$$bc + ac + 2ab + 2a^2 = bc + ab +$$

$$+ 2a^2 + 2ac$$

$$BD^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cdot \cos 135^\circ$$

$$ac + ab = ac$$

$$\frac{x}{\sin 35^\circ} = \frac{b}{\sin 10^\circ}$$

$$\frac{x}{\sin 35^\circ} = \frac{c}{\sin 10^\circ}$$

$$x = \frac{c \cdot \sin 35^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$CD^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cdot \cos 135^\circ$$

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

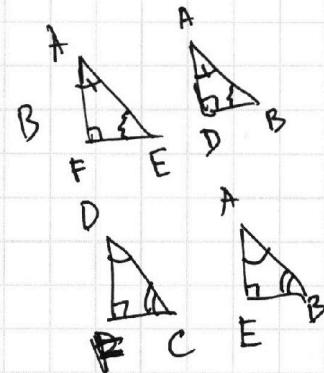
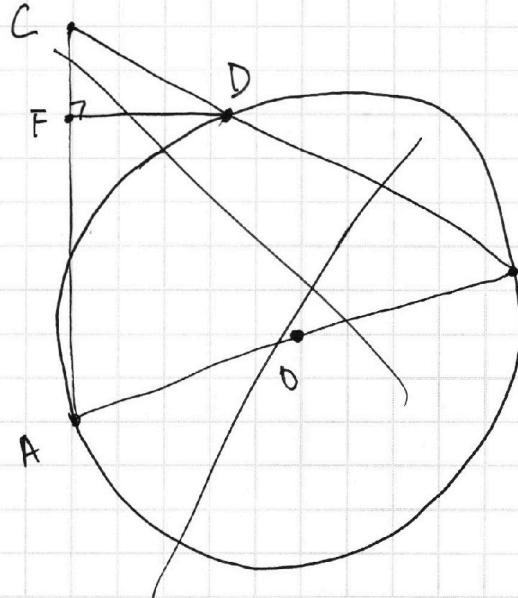


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

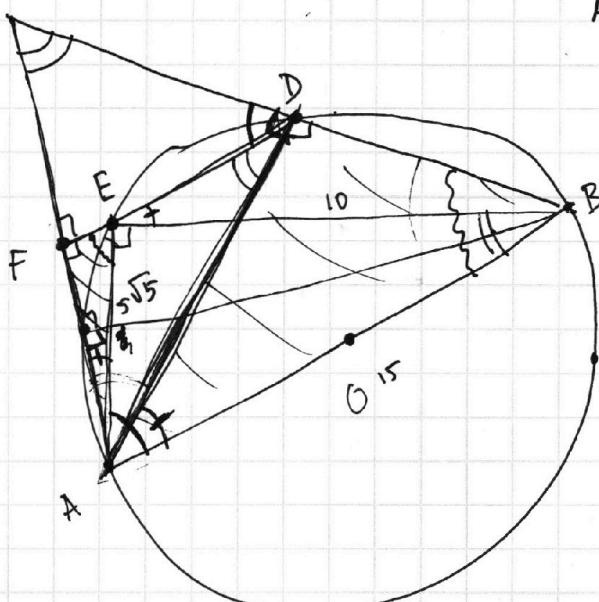
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$AF - ? \quad AC = 20, AB = 15$$

$$BE = 10$$



$$3\sqrt{5}$$

если

$$225 = 100 + x^2$$

$$x^2 = 125$$

$$x = 5\sqrt{5}$$

$$5 + 4 = 9$$

Пусть $AE = x$, $\angle A = 75^\circ$
 $FC = 20 - x$

$\triangle DFC \sim \triangle ABE$:

$$\frac{DF}{AE} = \frac{DC}{AB} = \frac{FC}{BE}$$

$$\frac{DF}{5\sqrt{5}} = \frac{DC}{15} =$$

$\triangle AFE \sim \triangle ADB$:

$$\frac{AF}{AD} = \frac{FE}{DB} = \frac{AE}{AB} = \frac{5\sqrt{5}}{15} \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{FE}{AD} = \frac{x}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{5\sqrt{5}}{15}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DC} =$$

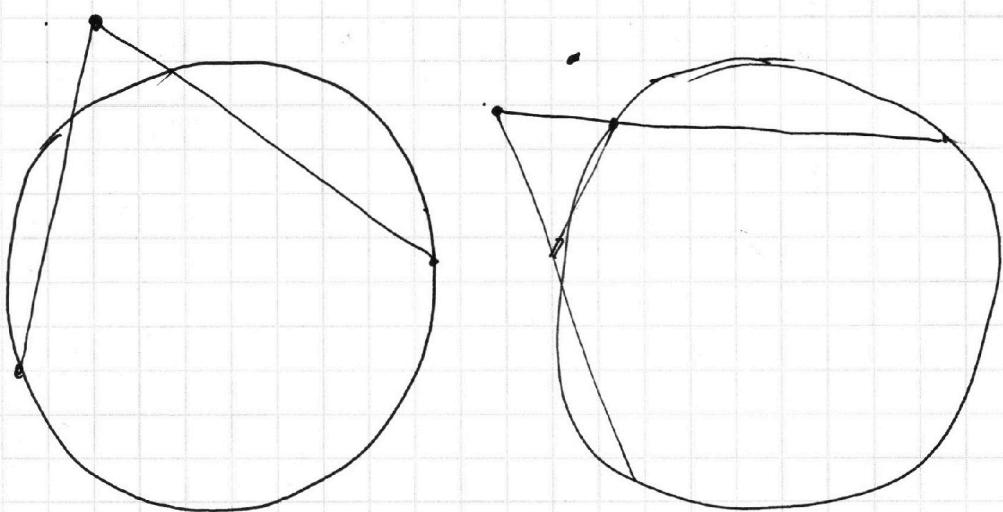
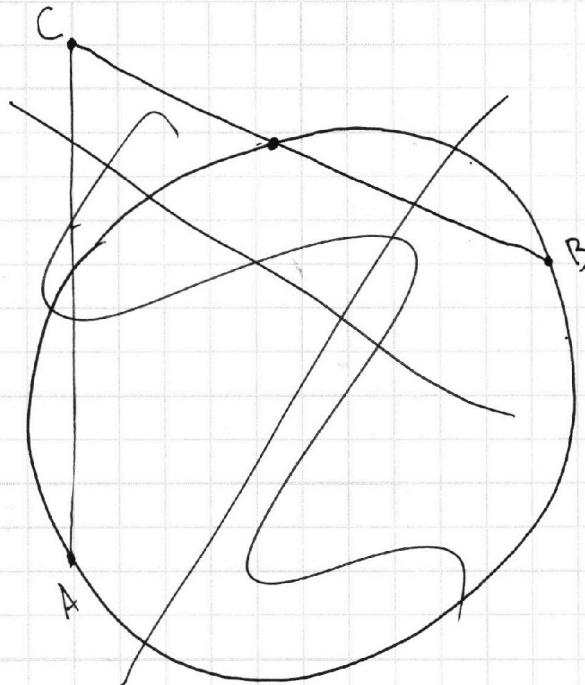


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = a_0 + 3d, \quad x_2 = a_0 + 4d$$

$$2a_0 + 7d = a^2 - a$$

$$(a_0 + 3d)(a_0 + 4d) = \frac{a^3 - a^2}{3}$$

$$2a_0 + 7d = \frac{a^3 - a^2}{2} \quad x_3 = a_0 + d, \quad x_4 = a_0 + 6d$$

$$T_0 \text{ cos } \quad a^2 - a = \frac{a(a^2 - a)}{2}$$

$$a^2 - a \neq 0$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{a}{2} \\ a &\neq 2 \end{aligned}$$

$$x_1 = a_0 + 3d, \quad x_2 = a_0 + 4d, \quad x_3 = a_0 + d, \quad x_4 = a_0 + 6d$$

$$T_0 \cos \quad a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$1 = \frac{a}{2}$$

Если $a \neq 0$

$$a = 2$$

$$x^2 - \frac{a^3 - a^2}{2} - (a^6 + 4a^2) = 0$$

Тогда:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{2-8}{3} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = \frac{8-4}{2} = 2 \\ x_3 x_4 = -\frac{2^7 + 8 \cdot 2 + 4}{2} = -\frac{128 + 16 + 4}{2} = -(64 + 8 + 2) = -74 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1-е уп-ие:

$$a - d = 2\sqrt{3}$$

$$a \text{ др} a_1 = a_0 + 2\sqrt{3}$$

$$x^2 - 4x + x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$D = 12$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = x_2 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

$$\text{Эт.}: 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$$

$$\text{Зн. } (2\sqrt{3})?$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

2-е:

$$2x^2 - 14x$$

$$x^2 - 4x - 74 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 74 = 312$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{312}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3 \cdot 26}}{2} = 1 + \sqrt{3 \cdot 26}$$

$$x_2 = 2 - \sqrt{3 \cdot 26} = 1 - \sqrt{78}$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ 74 \\ \hline 296 \\ 16 \\ \hline 312 \\ 104 \\ 104 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$104 : 4 = 26$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 4 \\ \hline 104 \end{array}$$

$$a^3 - a^2$$

$$2^3 - a^2 = 8 - 4 = 4$$

$$\frac{1}{2} = 2$$

$$-a^6 - 4a^2 = -64 - 8 - 2 = -$$

$$\frac{2 + 10\sqrt{3}}{2} = 1 + 5\sqrt{3}$$

Вторая $1 - 5\sqrt{3}$, а

$1 + \sqrt{3}$ - четв., $1 - \sqrt{3}$ - пят. -

тогда

разность $\boxed{2\sqrt{3}}$

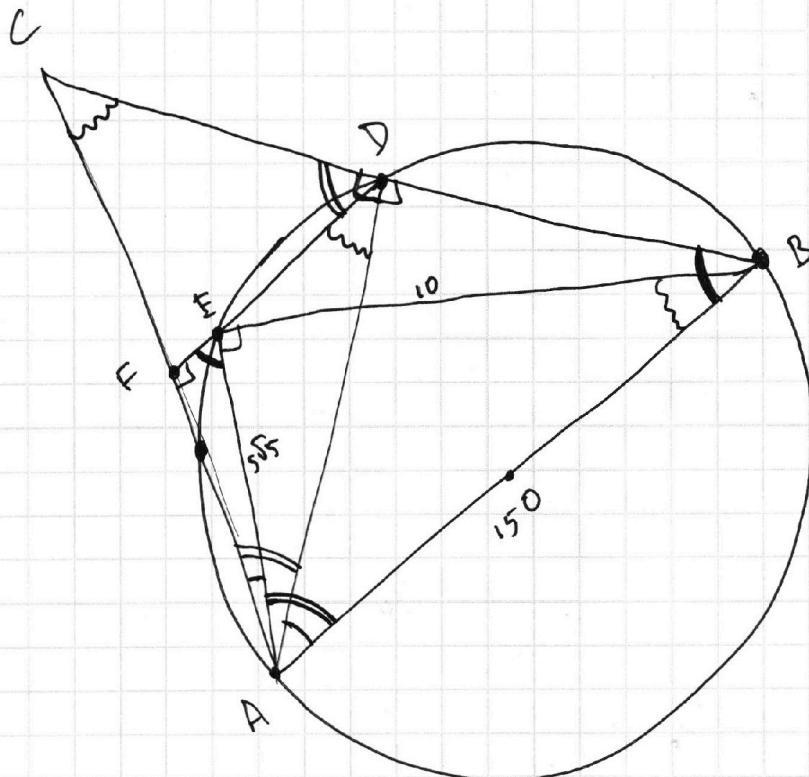
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



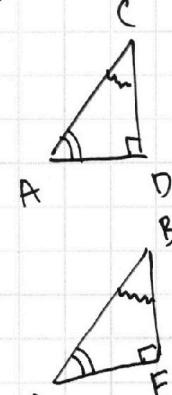
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{DC} = \frac{AE}{AD}$$

$$\frac{15}{20} = \frac{\sqrt{5}}{AD}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{5}}{AD}$$

$$AD = \frac{20\sqrt{5}}{3}$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$$

$$(x_1 + x_2) = a$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - a \\ x_1 x_2 = \frac{2-a^3}{3} \end{cases}$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - (2a^6 + 8a + 4) = 0$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2} \\ x_3 x_4 = -\frac{2a^6 + 8a + 4}{2} = -a^6 - a - 2 \end{cases}$$

$$\frac{AF}{AD} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$3AF \cdot \frac{\sqrt{5} \cdot 20\sqrt{5}}{3}$$

$$AF \cdot \frac{20 \cdot 5}{9} =$$

$$= \frac{200}{9}$$

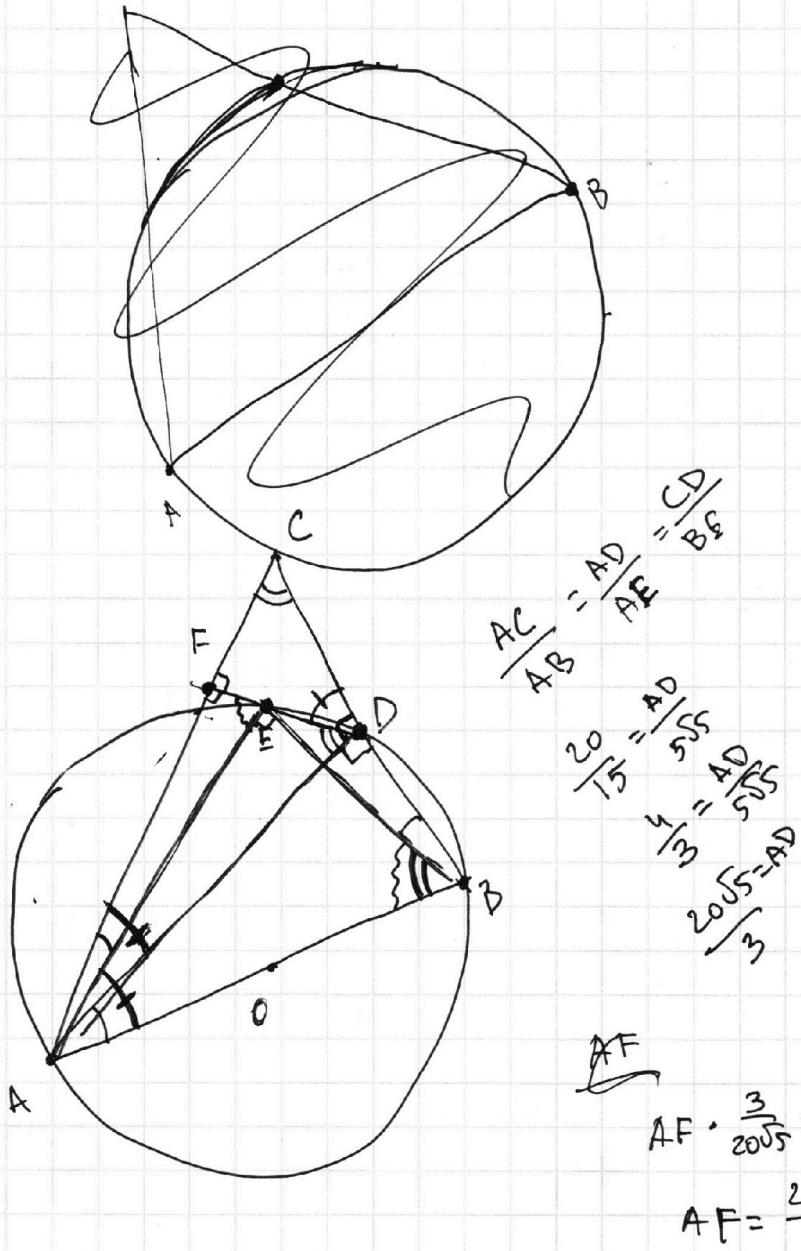


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

208803

2088032

$$\begin{array}{r} 98029 \\ \times 9 \\ \hline 88227 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 98029 \\ \times 9 \\ \hline 88227 \end{array}$$

208803

$$9^3 = 81 \cdot 9 = 729 - 1 \text{ где } 9 \text{ одна}$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times 9391 \\ \hline 39391 \\ + 84519 \\ \hline 90881 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1^3 = 1 \\ 2^3 = 8 \\ 3^3 = 27 \\ 4^3 = 64 \\ 5^3 = 125 \\ 6^3 = 216 \\ 7^3 = 343 \\ 8^3 = 512 \\ 9^3 = 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ \times 36 \\ \hline 1080 \\ + 280 \\ \hline 648 \end{array}$$

$$280 + 63 = 343$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 8 \\ \hline 32 + 480 = 512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 279 \\ \times 93 \\ \hline 837 \\ + 279 \\ \hline 8649 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 548 \\ \times 8649 \\ \hline 112 \\ + 125947 \\ \hline 804357 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

?2

$\begin{array}{r} \cancel{1} \cancel{2} \cancel{3} \\ + \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{r} \cancel{1} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \\ + \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{r} \cancel{1} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \\ + \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{r} \cancel{1} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \\ + \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \cancel{0} \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{r} \cancel{1} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \\ + \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \cancel{0} \cancel{1} \\ \hline \end{array}$

To есть ... 999991...

$\begin{array}{r} \cancel{1} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \\ + \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \cancel{0} \cancel{1} \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{r} \cancel{1} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \\ + \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \cancel{0} \cancel{1} \cdot 10 \\ \hline \end{array}$

то есть мы вычли сумму $899991 \cdot 1000$

$\begin{array}{r} \cancel{1} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \\ + \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \cancel{0} \cancel{1} \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{r} \cancel{1} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \\ + \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \cancel{0} \cancel{1} \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{r} \cancel{1} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \\ + \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \cancel{8} \cancel{9} \cancel{0} \cancel{1} \\ \hline \end{array}$

то есть на 9 чисел. значит

$1 + 10 + 100 = 111$

$1000 + 100 + 10 + 1 = 1111$

т.е.

$a = 249999$ рублей

$8a1 + 8a1 \cdot 10 + \dots + 8a1 \cdot 10^{249999} =$

$= 8a1 \cdot 111111\dots11$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$1) \text{Что такое } 8(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z +$$

+ 48

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases} \quad \text{Уг. это - система: } x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4z + 4y = \\ = xy + yz + zx$$

$$\text{То есть } 8xy(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = xy + yz + zx + \\ + 8x + 8y + 8z + 4x + 4y + 4z + 48$$

Также из системы:

$$\begin{aligned} (xyz)^2 &= (x^2 + 4x)(y^2 + 4y)(z^2 + 4z) = x^2y^2z^2 + 4x^2y^2z^2 + \\ &\quad + 16x^2yz + 4xy^2z^2 + 16xyz^2 + 64xyz \\ &= x^2y^2z^2 + 4x^2y^2z + 4x^2yz^2 + 4x^2y^2z + \\ &\quad + 4xy^2z^2 + 48yz^2 + 16xyz^2 + 64xyz + 16xyz^2 = 0 \\ &= (xyz)^2 + 4xyz(xyz + xyz + xyz) + 16xyz(y + x + z) + 64xyz = 0 \\ &\quad \times xyz(4(xyz + xyz + xyz)) + 16(xyz + xyz) + 64 = 0 \\ &\quad xyz + xyz + xyz + 4(xyz + xyz) + 16 = 0 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$\frac{xy}{yz} = \frac{x}{z} = \frac{z(z+4)}{x(x+4)}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y(y+4)}{x(x+4)}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{z(z+4)}{y(y+4)}$$

$$y^2(y+4) = z^2(z+4) = x^2(x+4)$$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + 4x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z + 48 = xy + yz + zx + 4(x+y+z) + 48$$

$$z^2(2+4) = y^2(y+4) = x^2(x+4)$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

~~1/2xyz~~

$$(x+y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2)$$

25000

~~$\frac{x^4}{n}$
n коробок~~

$$(x+y+z)^2 =$$

$$= xy(x^2 + 2xy + y^2) +$$

$$+ 2z(x^2 + 2xy + y^2)$$

Для того, чтобы выиграть, нужно съесть попась 3 раза

~~Вероятность, что~~ ~~получит первое раз~~ $\frac{3}{n}$

~~1-я коробка -~~ $\frac{3}{n}$

$$yz + xy + xz + 4x + 4y + 4z + 16 = 0$$

~~1 To ecm~~ ~~7~~ ~~-16~~

$$\begin{aligned} & x^2yz (x^2 + 4z^2)(y^2 + 4y^2)(z^2 + 4x^2) = (xyz)^7 \\ & = (z^2x^2 + 4x^2z^2 + 4z^2x^2 + 16x^2z^2)(y^2 + 4y^2) = (xyz)^7 + 4y^2z^2x^2 + 4y^2x^2z^2 + \\ & + 16x^2z^2y^2 + 16x^2y^2z^2 + 4x^2z^2y^2 + 16xy^2z^2 + 16y^2x^2z^2 + 64xyz^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4xyz (y^2 + xy + xz) + 16xyz (x + y + z) + 64xyz = 0 \\ & xyz \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда теперь умножим число вида

$\underbrace{3 \dots 3}_{n-1} \underbrace{8 0 0 \dots 1}_k$ на число из k девяток

Получим



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

Рассмотрим однозначные числа вида ... 9999aa

г.

$$\begin{array}{r} & 8 & 8 \\ \times & . & 9 & 9 & 9 \\ \hline & 8 & . & 9 & 9 & 1 \end{array}$$

Заметим, что всегда получается число вида $\underbrace{899\dots 9}_{k-1}$ где k -количество 9 в числе.

(Тк $9 \cdot 9 = 81$, 8 переносим дальше получаем 89, один переносим 8 и тд.

И только при послед. умнож.

запишем 89 в начало числа)

При этом при возведении в квадрат получим

будет складываться k раз числа: вот так:

$$\begin{array}{r} + 89\dots 991 \\ 89\dots 91 \\ \hline \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{к стоящим} \\ \text{наст.} \end{array} \right\}$$

+ 8 ... 9, 1! ← последнее число, 1 будет "под" складыванием

получим 99...99. При этом складывание

будет хвост вида 0001 (ти в начале стоят

+ ~~1~~ \rightarrow которое + 1 к числу которое переносится дальше.

Но при этом будет $\underbrace{8\dots 98}_{k-1} (00\dots 1)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times 8991 \\ \hline 1199 \\ + 81919 \\ \hline 900009 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8991 \\ \times 8991 \\ \hline 8991 \\ + 16919 \\ \hline 16919 \\ \times 899 - 9991 \\ \hline 0009 \\ \hline 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times 8991 \\ \hline 1999 \\ + 24919 \\ \hline 009 \\ \hline 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 878 \\ \times 8991 \\ \hline 999 \\ 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 321 \\ \times 89991 \\ \hline 289991 \\ + 89991 \\ \hline 99980001 \\ \hline 87 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8991 \\ \times 8991 \\ \hline 8991 \\ + 8991 \\ \hline 998001 \\ \hline 87 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8982009 \\ \times 8982009 \\ \hline 8982009 \\ + 8982009 \\ \hline 997002999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 891 \\ \times 891 \\ \hline 891 \\ + 891 \\ \hline 9801 \\ \hline 7 \\ 89 \\ 8209 \\ \hline 970299 \end{array}$$