



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 & (1) \\ yz = 4x + x^2 & (2) \\ zx = 4y + y^2 & (3) \end{cases} \quad x, y, z \neq 0$$

Вычтем из (1) (2): $xy - yz = 4z - 4x + z^2 - x^2$

$$y(x - z) = 4(z - x) + (z - x)(z + x)$$

$$4(z - x) + (z - x)(z + x) + y(z - x) = 0$$

$$(z - x)(4 + z + x + y) = 0$$

1. $x = z$

Перепишем систему:

$$\begin{cases} xy = 4x + x^2 & (4) \\ yx = 4x + x^2 & (5) \\ x^2 = 4y + y^2 & (6) \end{cases}$$

Вычтем из (5) (6):

$$yx - x^2 = 4x - 4y + x^2 - y^2$$

$$x(y - x) = 4(x - y) + (x - y)(x + y)$$

$$4(x - y) + (x - y)(x + y) + x(x - y) = 0$$

$$(x - y)(4 + x + y + x) = 0$$

a) $x = y$

Тогда:

$$x^2 = 4x + x^2$$

$$4x = 0$$

$$x = 0$$

Значит $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Не подходит
т.к. $x, y, z \neq 0$

б) $x + y = -4$

$$y = -4 - 2x$$

Тогда:

$$(5): x(-4 - 2x) = x(x + 4)$$

$$x(x + 4 + 4 + 2x) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } 3x = 8$$

$$\text{но } x \neq 0! \quad x = -\frac{8}{3}$$

$$\text{по условию} \Rightarrow z = -\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow y = -4 + \frac{16}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}$$

Подходит: $\begin{cases} x = -\frac{8}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = -\frac{8}{3} \end{cases}$

Посчитаем:

$$\left(-\frac{8}{3} + 4\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + 4\right)^2 + \left(-\frac{8}{3} + 4\right)^2 =$$

$$= \frac{16}{9} + \frac{16^2}{9} + \frac{16}{9} = \frac{288}{9} = 32$$

2. $x + y + z = -4$

$$(x + y + z)^2 = (-4)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 16$$

Сложим (1) (2) (3):

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z = xy + yz + xz$$

$$2xy + 2yz + 2xz - 4(x + y + z) = 16 - xy - yz - xz$$

$$3(xy + yz + xz) = 4(x + y + z) = -16$$

$$3(xy + yz + xz) = -16$$

$$xy + yz + xz = -\frac{16}{3}$$

Значит: $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 16$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 + 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{5 \cdot 16}{3} = \frac{80}{3}$$

Посчитаем выражение:

$$(x + 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 4)^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 8(x + y + z) + 16 \cdot 3$$

$$= \frac{80}{3} - 32 + 16 \cdot 3 =$$

$$= \frac{80}{3} + 16 = \frac{80 + 48}{3} = \frac{128}{3}$$

Ответ: 32 или $\frac{128}{3}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Посчитаем вероятность выигрыша при открытии 5 номеров:

Пусть всего номеров n ($n \in \mathbb{N}$). ~~каждый~~ $(n \geq 5)$.

~~Благотворительных исходов:~~ При подсчете способов будем считать, что порядок выбора номеров не важен.

Благотворительных исходов: $\underbrace{1}_{\substack{\text{выбрав 3} \\ \text{и номеру с} \\ \text{шариком} \\ \text{(во всех шариках)}}} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2!}$
 выбираем 4-ую и 5-ую номера, ~~тогда~~ 4-ую выбираем из $(n-3)$ -их оставшихся. 5-ую выбираем из $(n-4)$ -ых оставшихся и делим на $2!$, т.к. порядок выбора не важен.

Всего исходов: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$

Итого вероятность выигрыша при открытии 5 номеров: (P_5)

$$P_5 = \frac{(n-3)(n-4)}{2!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{n(n-1)(n-2)} \quad (n \geq 5) \text{ поэтому можем сократить!}$$

2. Аналогично найдем вероятность выигрыша при открытии 8 номеров:

Благотворительных исходов: $\underbrace{1}_{\substack{3 \text{ номера} \\ \text{с шариками}}} \cdot \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5!} \quad (n \geq 8)$

Всего исходов: $\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-7)}{8!}$

Итого вероятность выигрыша в этом случае (P_8) : ~~P_8~~

$$P_8 = \frac{(n-3) \dots (n-7)}{5!} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-7)}{8!} = \frac{8!}{5! \cdot n(n-1)(n-2)} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{n(n-1)(n-2)} \quad (n \geq 8 \text{ поэтому сократили})$$

$$\text{И считаем } \frac{P_8}{P_5} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$\frac{P_8}{P_5} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 4 \cdot 5} = 5,6 \quad \leftarrow \text{мы сократили, т.к. очевидно, что } n \geq 3 \text{ (по условию было } \geq 5 \text{ и } \geq 8 \text{ номеров)}$$

Ответ: увеличилась в 5,6 раз.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{a^3 - a^2}{2} = 0$$

корни этого уравнения:

t_4 и t_5
четвертый член прогрессии и пятый член прогрессии

По теореме Виета:

$$t_4 + t_5 = -\frac{-(a^2 - a)}{1} = a^2 - a$$

Тогда: $t_4 = t_1 + 3d$, где
 t_1 - первый член прогрессии,
 d - разность прогрессии

$$t_5 = t_1 + 4d$$

$$t_4 + t_5 = 2t_1 + 7d = a^2 - a$$

$$\begin{aligned} a^2 - a &= \frac{a^3 - a^2}{2} \\ 2a^2 - 2a &= a^3 - a^2 \\ a(2a - 2 - a^2 + a) &= 0 \\ a(-a^2 + 3a - 2) &= 0 \\ a(a^2 - 3a + 2) &= 0 \\ a(a-1)(a-2) &= 0 \end{aligned}$$

$$a = 0 \text{ или } a = 1 \text{ или } a = 2$$

Ответ: 0; 1; 2.

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

корни этого уравнения:

t_2 и t_7
второй член прогрессии и седьмой член прогрессии

По теореме Виета:

$$t_2 + t_7 = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

Тогда: $t_2 = t_1 + d$
 $t_7 = t_1 + 6d$

$$t_2 + t_7 = 2t_1 + 7d = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$\begin{aligned} 2t_1 + 7d &= 0 \\ 2t_1 + 7d &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{но } \text{ген. } d &\neq 0 \\ \Rightarrow 2t_1 &= -7d \\ t_1 &= -\frac{7d}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ такие последовательности существуют $\checkmark$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 6$$

$$1. \quad y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} = 0$$

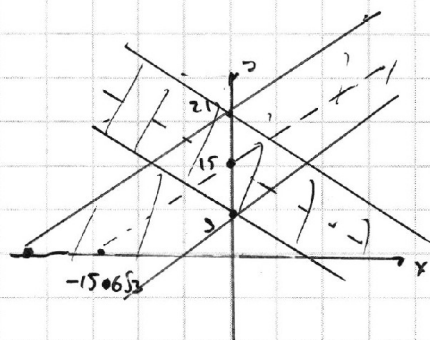
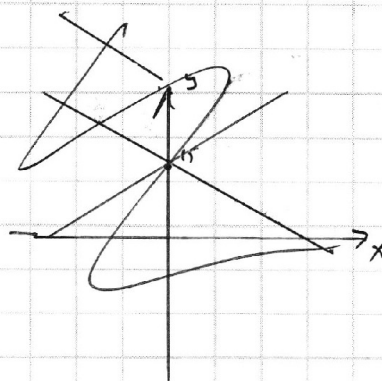
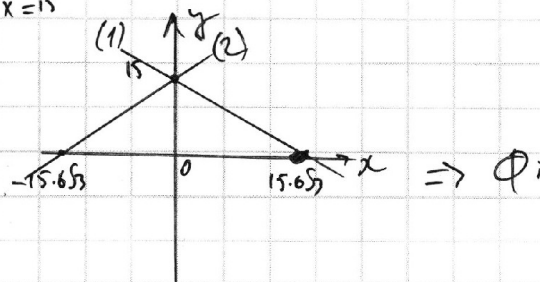
$$y = -\frac{1}{6\sqrt{3}}x + 15$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{1}{6\sqrt{3}}x = 15$$

$$x = 15 \cdot 6\sqrt{3}$$

$$2. \quad y = \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15$$

$$y = 0 \Rightarrow x = -15 \cdot 6\sqrt{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

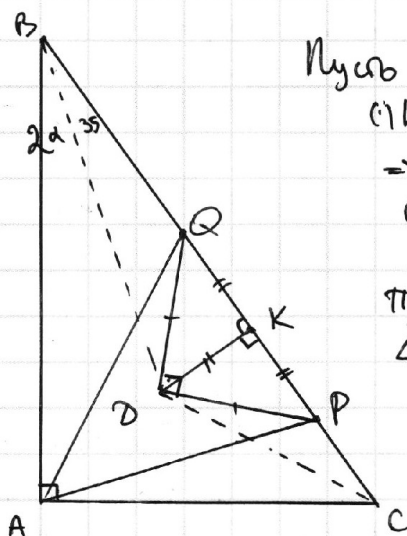
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $DK \perp QP \Rightarrow \text{т.к. } DQ = DP \text{ и } DK \perp QP \Rightarrow$
 $DK \in QP$

$$\Rightarrow \angle QDK = \angle KDP = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \text{ (гипотенуза)}$$

$QK = KP = DK$ (св-во прямоугол. Δ)

$QK = KP$ (по условию).

Пусть $\angle BAD = 2\alpha$

$$\Delta ABP - \text{равноб.} \Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - 35 - 2\alpha}{2} =$$
$$= 72,5 - \alpha$$

$$\Rightarrow \angle PAC = 90^\circ - (72,5 - \alpha) = 17,5 + \alpha.$$

$$\angle APC = 180^\circ - (72,5 - \alpha) = 107,5 + \alpha$$

$$\text{Тогда } \angle PCA = 180^\circ - (17,5 + \alpha) - (107,5 + \alpha) = 55 - 2\alpha.$$

~~По условию $\angle PCA = 90^\circ - \angle ABC = 90 - 35 - 2\alpha$~~

[illegible]



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0$$

$$2x_2 = x_1 + x_2 = \frac{a^2 - a}{3}$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2ab - 8a - 4 = 0$$

$$x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2x_4 + 0 \quad x_4 + a_5 = a^2 - a$$

$$x_2 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$6a \quad t_1 + 3d + t_1 + 4d = a^2 - a$$

$$-t_1 + d + t_1 + 6d = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$2t_1 + 7d = a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$(10^{-4})$$

599

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$a(a - 1)(a - 2) = 0$$

$$\frac{99999 \dots 999}{20000}$$

$$\frac{99}{99}$$

$$\frac{991}{991}$$

$$\frac{9801}{9801}$$

$$\frac{98209}{98209}$$

$$\frac{90299}{90299}$$

$$\frac{90299}{90299}$$

№ задачи 5

№ задачи 8

$$P(5) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$P(5) = \frac{5! \cdot 3 \cdot (n-2)(n-4)}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$P(5) = \frac{1 \cdot (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P(8) = \frac{1 \cdot (n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$P(5) = \frac{1 \cdot (n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{(n-3)(n-4) \cdot 5!}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P(8) = \frac{1 \cdot (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5! \cdot n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{P(8)}{P(5)} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2}{5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5} = 5 \cdot \frac{3}{5} = 5 \cdot 6$$

$$\frac{P(8)}{P(5)} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{28}{5}$$

$$\frac{P(8)}{P(5)} = \frac{10000}{300} = \frac{1000}{30} = \frac{100}{3} = 5 \frac{2}{3}$$

$$\frac{P(8)}{P(5)} = \frac{10000}{300} = \frac{1000}{30} = \frac{100}{3} = 5 \frac{2}{3}$$

$$\frac{P(8)}{P(5)} = \frac{10000}{300} = \frac{1000}{30} = \frac{100}{3} = 5 \frac{2}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

