

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 5

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E – точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В теленгра ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 & (1) \\ yz = 3x + x^2 & (2) \\ zx = 3y + y^2 & (3) \end{cases}$$

число решений при $x, y, z \neq 0$

План:

$$\begin{aligned} (1) - (2): \quad xy - yz &= 3z + z^2 - 3x - x^2 \\ y(x-z) &= 3(z-x) + (z-x)(z+x) \\ 0 &= (z-x)(x+y+z+3) \\ \begin{cases} z=x \\ x+y+z=-3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Аналогично } (2)-(3) \text{ и } (3)-(1) \Rightarrow \text{таких решений } &\Rightarrow \begin{cases} z=x \\ x=y \\ y=z \end{cases} \Rightarrow x=y=z \\ \text{таких решений } &\Rightarrow x+y+z=-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I способ: } x=y=z \rightarrow (1): \quad x^2 &= 3x + x^2 \\ 0 &= 3x \Rightarrow x=0, \text{ но это } &\text{решение } x \text{ не подходит} \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

Противоречие

\Rightarrow from which we conclude

$$\text{II способ: } \sqrt{x+y+z=-3} \quad (1)+(2)+(3) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = -3(x+y+z) = -3 \cdot (-3) = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = (x+y+z)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$\Rightarrow 3(xy + yz + zx) = 0 \Rightarrow xy + yz + zx = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$\text{План: } (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(xy + yz + zx) + 3 \cdot 3^2 = 9 + 6(-3) + 27 = 18$$

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$n = \underbrace{99\dots99}_{40000 \text{ цифр}} = 10^{40000} - 1$$

$$\Rightarrow n^3 = (10^{40000} - 1)^3 = (10^{40000})^3 - 3 \cdot (10^{40000})^2 + 3 \cdot 10^{40000} - 1$$

$$10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} = 10^{80000} (10^{40000} - 3) = 10^{80000} \cdot \underbrace{999\dots7}_{40000 \text{ цифр}} + 2333327 \text{ ошибка}$$

$$3 \cdot 10^{40000} - 1 = 299\dots9$$

$$10^{80000} \cdot 299\dots9 + 299\dots9 \text{ ошибки}$$

$$\Rightarrow n^3 = \underbrace{999\dots7}_{40000 \text{ цифр}} \underbrace{000\dots0}_{40000 \text{ цифр}} \underbrace{299\dots9}_{40000 \text{ цифр}} \quad (\text{м.и.} = \underbrace{999\dots7}_{40000 \text{ цифр}} \cdot 10^{80000} + \underbrace{299\dots9}_{40000 \text{ цифр}})$$

из них 39999 десятков) из них 0 десятков) из них 40000 десятков

$$\Rightarrow \text{Всего в } n^3 \text{ 79999 десятков}$$

Ответ: 79999 десятков.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

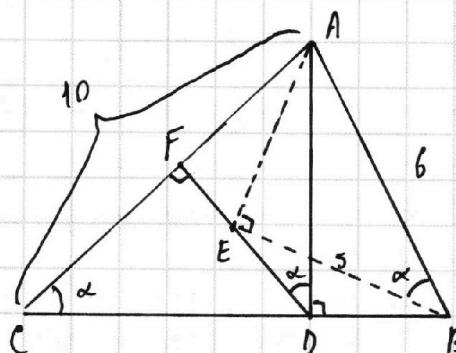


- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№3



1) E и D лежат на перпендикульре к гипотензии AB $\Rightarrow \angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$

По свойству вписанного угла, стоящего на одну дугу $\angle ABE = \angle ADE$ в дуге (BDE)
Пусть $\angle ABE = \alpha$

2) В трапеции $\triangle ADC$: $\angle ADF = \alpha$
 $\Rightarrow \angle ACD = 90^\circ - \angle CDF = \angle ADF = \alpha$

В трапеции $\triangle ABE$: по теореме Пифагора: $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$
 $\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\cos \alpha = \frac{5}{6}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$

\Rightarrow В трапеции $\triangle ACD$: $AD = \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{10}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = 10 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}$

$$\angle CAD = 90^\circ - \alpha$$

3) В трапеции $\triangle AFD$: $\angle ADF = \alpha \Rightarrow AF = \frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = 10$

$$AF = AD \sin \alpha = 10 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{110}{36} = \frac{55}{18}$$

Ответ: $\frac{55}{18}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Число методов $\frac{n!}{5!(n-5)!}$ способов (вариант) №4. Пусть есть n коробок. Взять 5 коробок и $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{2}$ из них вынимают

н.к. 3 коробки - вынимают с маркиами, а остальные 2 - любые из них остаются

$$\Rightarrow \text{Вероятность вынимания} = \frac{\frac{(n-3)(n-4)}{2}}{\binom{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}} = M$$

2) Из шести отобранных коробок нужно выбрать

I) 3 марки \Rightarrow гарантия победы.

Способов вынимания 3 марки из 6 коробок $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{3!}$

3 коробки - вынимают с маркиами, а другие 3 - любые из оставшихся

II) 2 марки \Rightarrow нужно вынимать 1 из $n-6$ коробок \Rightarrow вынимают 1 из 6 коробок $\frac{1}{6}$ (н.к. 2 раза)

Способов вынимания 2 марки из 6 коробок $\frac{1 \cdot 1 \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6)}{4!}$

* Рассмотрим выбор 3 $\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{3!}$ способов \Rightarrow вероятность $\frac{3!}{2(n-8)}$ 2 коробки имеют с марками, а другие 4 - любые без марки

A) 1 марка \Rightarrow нужно вынимать 2 марки из $n-6$ коробок выиграв + коробки

Рассмотрим выбор 4 $\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{4!}$ способов \Rightarrow вероятность $\frac{4!}{2(n-8)(n-9)}$ (н.к. 1 раза выиграл с марками)

B) 2 марки \Rightarrow нужно вынимать 1 марку выиграв 6 коробок

Способов выиграть 6 коробок $\frac{1 \cdot (n-2)}{5!}$

IV) 0 марки \Rightarrow нужно вынимать 3 марки из $n-6$ коробок выиграв 5 коробок

Рассмотрим выбор 5 $\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{5!}$ способов \Rightarrow вероятность $\frac{5!}{2(n-8)(n-9)(n-10)}$

A) 3 марки \Rightarrow нужно вынимать 2 марки из 6 коробок

Способ вынимания 2 марки из 6 коробок $\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{6!}$

\Rightarrow общий результат всех способов выиграть 6 коробок $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N^o. (Продолжение)

=> Оценим вероятность в II случае:

$$\frac{\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3!} + \frac{3!}{2(n-3)} \cdot \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!} + \frac{4!}{2(n-8)(n-9)} \cdot \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5!} + \dots + \frac{5!}{2(n-8)(n-9)(n-10)} \cdot \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{6!}}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \cdot 6!} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{n-6}{8(n-8)} + \frac{(n-6)(n-7)}{10(n-8)(n-9)} + \dots + \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{12(n-8)(n-9)(n-10)}}{n(n-1)(n-2) \cdot 6!}$$

=> Вероятность выигрыша увеличилась в $\frac{N}{M}$ раз

$$\frac{N}{M} = \frac{\frac{A}{n(n-1)(n-2)}}{\frac{5!}{2n(n-1)(n-2)}} = \frac{\frac{A \cdot 6!}{5!}}{\frac{2n}{2}} = \cancel{\frac{2A}{2n}} \cancel{\frac{6!}{5!}} 12A$$

$$A = \frac{1}{6} + \frac{n-6}{8(n-8)} + \frac{(n-6)(n-7)}{10(n-8)(n-9)} + \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{12(n-8)(n-9)(n-10)} = \frac{1}{6} + \frac{n-6}{2(n-8)} \left(\frac{1}{4} + \frac{n-7}{5(n-9)} + \frac{(n-8)(n-9)}{8(n-9)(n-10)} \right) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{n-6}{2(n-8)} \left(\frac{1}{4} + \frac{(n-7)(6n-60+5n-40)}{30(n-9)(n-10)} \right) = \frac{1}{6} + \frac{n-6}{2(n-8)} \left(\frac{15n^2 - 19 \cdot 15n + 15 \cdot 90 + 22n^2}{60(n-9)(n-10)} \right)$$

$$= \frac{-2 \cdot 197n + 1400}{60(n-9)(n-10)}$$

=



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N5. Пусть арифметическая прогрессия: $a_1 = b$
 $a_{n+1} = a_n + d$

$$1) X^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \quad (1)$$

(иначе для т.ч. арифм. прогрессии нечетного n.c. $d \neq 0$)

Корни - a_5, a_6 , т.е. $b + 4d$ и $b + 5d$

$$\text{По теореме Виетта } a_5 + a_6 = \frac{-(b^2 - a)}{2} = \frac{2}{2} = -(-(a^2 - a)) = a^2 - a$$

$$2) 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \quad (2)$$

(иначе для т.ч. арифм. прогрессии нечетного n.c. $d \neq 0 \Rightarrow a_3 \neq a_8$)

Корни - a_3, a_8 , т.е. $b + 2d$ и $b + 7d$

$$\text{По теореме Виетта } a_3 + a_8 = -(-(a^3 - a^2)) = a^3 - a^2$$

$$3) \text{ Запишем, что } a_5 + a_6 = b + 4d + b + 5d = 2b + 9d = b + 2d + b + 7d = a_3 + a_8$$

$$\Rightarrow a^2 - a = a^3 - a^2$$

$$(a^2 - a)(1 - a) = 0$$

$$-a(a-1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} a=1 & \text{I случай} \\ a=0 & \text{II случай} \end{cases}$$

$$\text{I случай: } a=1 \Rightarrow a^2 - a = a^3 - a^2 = 1 - 1 = 0$$

$$|a_6 - a_5|$$

$$(1): x^2 - 5 = 0 \Rightarrow \text{корни } \pm \sqrt{5} \Rightarrow |d| = \sqrt{5} - (\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Но } 2 \neq 2\sqrt{5}$$

$$(2): 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \left| \frac{a_8 - a_3}{5} \right| = |d| = 1 - (-1) = 2$$

След. не подходит

$$\text{II случай: } a=0 \Rightarrow a^2 - a = a^3 - a^2 = 0$$

$$(1): x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow |a_6 - a_5| = |d| = 2 - (-2) = 4$$

$$(2): 4x^2 + 2 + 2 - 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{a_8 - a_3}{5} \right| = |d| = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$$

Но $4 \neq 1 \Rightarrow$ второй не подходит

Одна из данных корней не подходит \Rightarrow значение a не существует

Ответ: значение a не существует



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

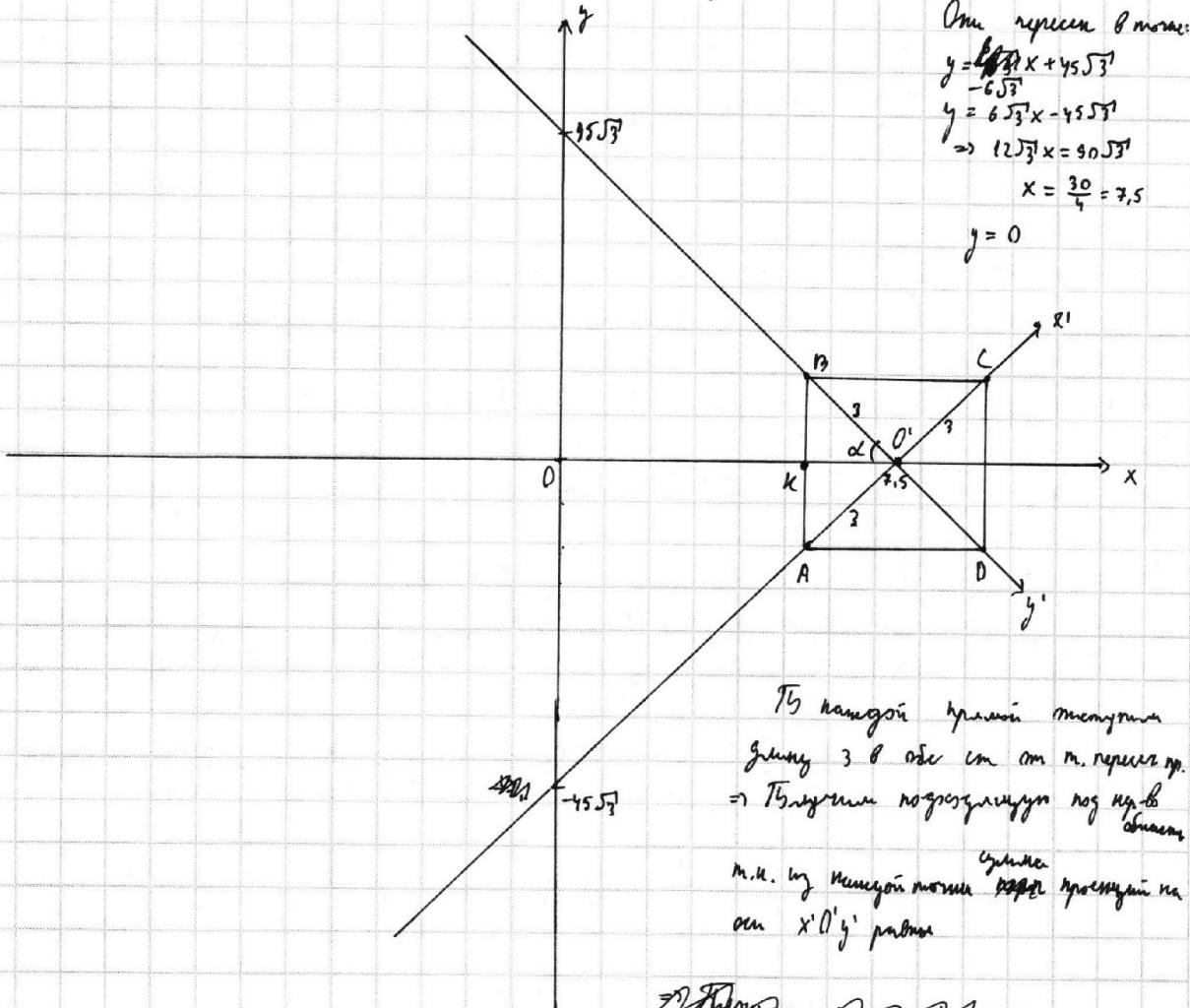
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Начертим прямые $x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0$ и $x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0$

$$y = -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$$

$$y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$



Отмечены прямые в том:

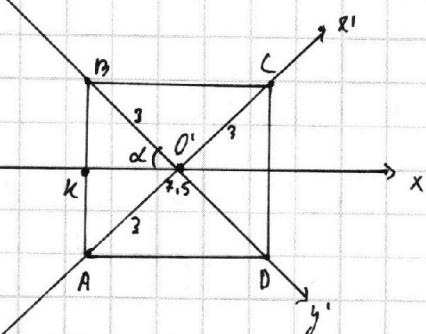
$$y = -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$$

$$y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 12\sqrt{3}x = 90\sqrt{3}$$

$$x = \frac{30}{4} = 7,5$$

$$y = 0$$



По найденной прямой получим
длину 3 в в. где син. от т. пересеч. пр.
⇒ Получим подобные фигуры под прямым
углом

т.к. из найденной прямой ^{сумма} проекций на
один $x'0'y'$ равна

⇒ Равнодistantы между собой

⇒ Получим пар-и симметричные относ-ю Ox
(или перпендикуляр в середине) ¹¹ гипотенуз

$$AB = 2 \cdot 3 \sin \alpha = 2 \cdot 3 \cdot \frac{45\sqrt{3}}{\sqrt{7,5^2 + 45^2}} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{45\sqrt{3}}{7,5\sqrt{1+36}} = 36 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{109}}$$

$$BC = 2 \cdot 3 \cos \alpha = 2 \cdot 3 \cdot \frac{7,5}{\sqrt{7,5^2 + 45^2}} = \frac{6}{\sqrt{109}}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{6\sqrt{3}}{109}$$

(K)

(C и D)

При повторе будем $\frac{1}{4}$ измноже от суммы ^{бисектрисы} от суммы гипотенуз от O и O'
т.к. по мере поворота в $x'0'y'$ ^{измноже} + S_{ABCD}



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порядок QR-кода недопустим!

№6

$$\begin{aligned}
 OK &= 7,5 - KO' = 7,5 - \cancel{\frac{9\pi}{109}} \quad 3 \cos \alpha = 7,5 - \frac{3 \cdot 7,5}{7,5 \sqrt{1+36/3}} = 7,5 - \frac{3}{\sqrt{109}} \\
 OC &= \sqrt{7,5^2 + 3^2 - 2 \cdot 7,5 \cdot 3 \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{7,5^2 + 3^2 - 2 \cdot 7,5 \cdot 3 \frac{1}{\sqrt{109}}} = 3 \sqrt{2,5^2 + 1 - \frac{9}{\sqrt{109}}} \\
 \Rightarrow S &= \frac{-\pi \cdot OK^2 + \pi \cdot OC^2 + S_{ABCD}}{4} = \frac{\pi \left(7,5^2 + \cancel{\frac{9\pi}{109}} - \frac{9}{109} + 7,5^2 + 3^2 - \frac{2 \cdot 7,5 \cdot 3}{\sqrt{109}} \right)}{4} + \frac{8\sqrt[3]{551}}{109} = \\
 &= \frac{\pi \cdot \cancel{9\pi} \cdot 108}{4 \cdot 109} + \frac{6\sqrt[3]{3}}{109} = \cancel{\frac{87\pi^2}{436}} \quad \frac{9 \cdot 27\pi}{109} + \frac{6\sqrt[3]{3}}{109} = \frac{243\pi}{109} + \frac{216\sqrt[3]{3}}{109}
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{243\pi}{109} + \frac{216\sqrt[3]{3}}{109}$$

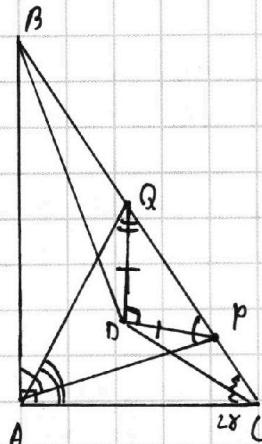
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№ 1/б - равнобедренный, Δ - тупоглавый, m -треугольник

$$0) \text{ Тупой } \angle BCA = 28$$

$$1) CQ = CA \Rightarrow \angle QCA = \angle CAC \text{ (по определению)}$$

$$\Rightarrow \text{По cb-у } \angle CAC \text{ и } \angle AQC = \angle QAC$$

$$\text{Сумма углов } \Delta = 180^\circ \Rightarrow \angle AQC = \angle QAC = \frac{180^\circ - \angle QCA}{2} = 90^\circ - \gamma$$

$$2) AB = BP \Rightarrow \Delta ABP - \text{р/б} \text{ (по определению)}$$

$$\Rightarrow \text{По cb-у } \angle BAP \text{ и } \angle BPA$$

$$\text{Сумма углов } \Delta = 180^\circ : \text{f } \angle BAC \quad \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 2\gamma = 90^\circ - 2\gamma$$

$$\text{f } \angle BAP: \angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2\gamma)}{2} = 45^\circ + \gamma$$

$$3) \angle BAP = 45^\circ + \gamma \Rightarrow \angle PAC = \angle BAC - \angle BAP = 45^\circ - \gamma$$

$$\Rightarrow \angle QAP = \angle QAC - \angle PAC = (90^\circ - \gamma) - (45^\circ - \gamma) = 45^\circ$$

4) $\angle QDP = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ и $QD = DP \Rightarrow D$ - центр описанной окружности ΔQAP по условию (т.к. по сторону QP в четырехугольнике $ABCD$ лишь одна м. линия пересекает среднюю перпендикулярную к QP с ГМТ пакетом, т.к. $\angle QDP$ тупой (т.е. 90° и т.е. тупой постр. на QP нет ее длины))

\Rightarrow По cb-у четвертого определения остр-ти $\angle ADP = 2\angle AQP = 2(90^\circ - \gamma) = 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ - \angle APC$

\Rightarrow По cb-у пятому определению четвертого условия линии D лежат на описанной остр-ти ΔAPC \Rightarrow по cb-у всех углов, опущенных из вершин на одну линию $\angle PDC = \angle PAC = 45^\circ - \gamma$

Аналогично т.к. $\angle ADQ = 2\angle APQ = 90^\circ + 2\gamma = 180^\circ - \angle ABC$, т.к. D лежит на описанной остр-ти ΔABC и $\angle BDQ = \angle BAQ$ по cb-у всех углов, опущенных из вершин на одну линию

$$5) \Rightarrow \beta \text{ в } \triangle BDC: \angle BDC = \angle BDQ + 90^\circ + \angle PDC = 90^\circ + 2\gamma + 45^\circ - \gamma = 135^\circ$$

$$= \angle BAQ + \angle PAC + 90^\circ = \angle BAC - \angle QAP + 90^\circ = 90^\circ - 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

$$\Rightarrow \text{т.к. сумма углов } \Delta = 180^\circ, \text{ т.к. } \angle DBC = 180^\circ - \angle BDC - \angle DCB = 180^\circ - 135^\circ - 20^\circ = 25^\circ$$

Ответ: 25°

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

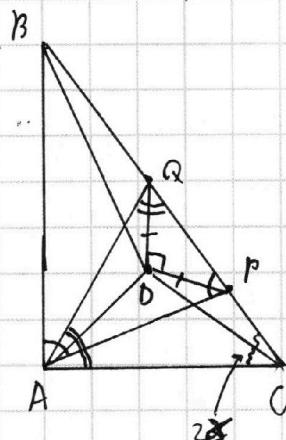
$$\begin{aligned}xy &= 3z + z^2 \\yz &= 3x + x^2 \\zx &= 3y + y^2\end{aligned}$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = 2(xy + yz + zx) - x^2 - y^2 - z^2 + 27$$

Число n коробок $\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$ способов у школы и $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-3)(n-4)}{2}$ способов у выпускников

Такие открытия можно коробки если коробки не пересекаются, то $\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{5!}$ способов и $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-9)(n-10)}{2}$ способов выпускников

если все 3 коробки
если 2, то
если 1, то



$$\angle BCA = 2\gamma \Rightarrow \angle CAQ = \angle AQC = 90^\circ - \gamma$$

$$\angle ABC = 90^\circ - 2\gamma \Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2\gamma)}{2} = 45^\circ + \gamma$$

$$\downarrow \\ \angle PAC = 45^\circ - \gamma$$

$$\Rightarrow \angle QAP = \angle QAC - \angle PAC = 45^\circ$$

$\angle QDP = 2\angle QAP$ и D лежит на середине QP

$\Rightarrow D$ — центр описанной окружности $\triangle QAP$

$$\Rightarrow \angle ADP = 2\angle AQP = 180^\circ - 2\gamma \Rightarrow D \in (APC)$$

$$\downarrow \\ \angle PDC = \angle PAC$$

Аналогично $\angle BDQ = \angle BAP \Rightarrow$ Значит $\angle BDC = 2\gamma$

$$90^\circ + \angle BAL - \angle AAP = 135^\circ$$

$$\downarrow \\ \angle BDC = 180^\circ - 135^\circ - 2\gamma = 25^\circ$$

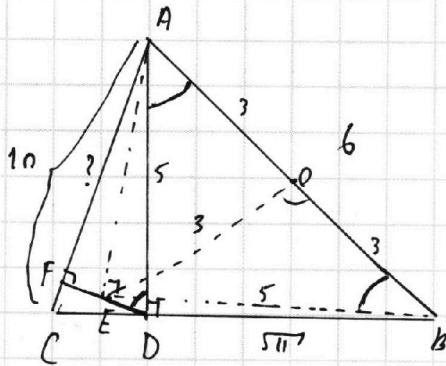


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$AE^2 = 36 - 25 = 11 \Rightarrow AE = \sqrt{11}$$

$E \in D$ - означает что точка лежит на AB
 $\Rightarrow AD = EB = 5$, $BD = AE = \sqrt{11}$

$$9 + 9 - 2 \cdot 9 \cos \angle EOB = 25$$

$$18 \cos \angle EOB = -7$$

$$\cos \angle EOB = -\frac{7}{18}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \frac{\angle EOB}{2} = \cos \angle EOB + 1 = \frac{11}{18}$$

$$\cos \frac{\angle EOB}{2} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{18}} = \cos \angle ABC$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$K_{\text{прим}} = b + 2d, b + 3d \quad b + b + 2d + 3d = a^2 - a$$

$$4x^2 - (a^2 - a)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$K_{\text{прим}} = b, b + 5d$$

$$\Rightarrow b + b + 5d = a^3 - a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - a = a^3 - a^2$$

$$\cancel{a(a^2 - a)}(a - 1) = 0$$

$$a(a-1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} a=1 \\ a=0 \end{cases}$$

$$I \quad x^2 - 5 = 0$$

$$\text{корни } \pm \sqrt{5}$$

$$4x^2 - 4 = 0$$

$$\text{корни } \pm 1$$

$$-1 \quad -\sqrt{5} \quad \sqrt{5} \quad 1$$

$$3\pi/4 \quad 5\pi/4 \quad 6\pi/4 \quad 8\pi/4$$

$$|\text{разница}| = 2\sqrt{5}, \text{ но } |1 - (-1)| \neq 5 - 2\sqrt{5}$$

$$II) \quad x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$4x^2 + 2 + 2 - 1 - 4 = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \pm \frac{1}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

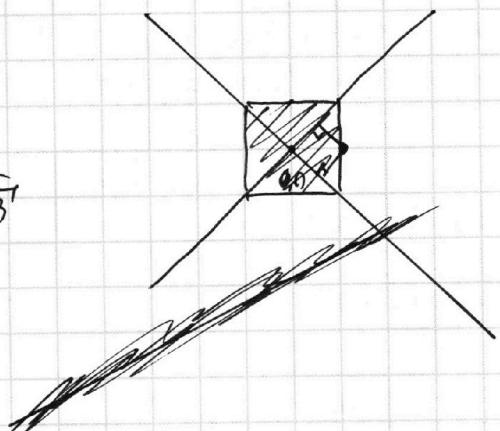
6

7

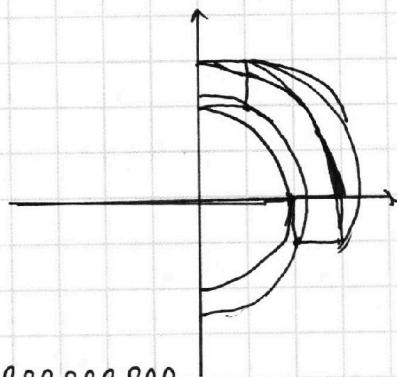
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}$$



$$|x| + |y| \leq 3$$



$$999^3 = (1000 - 1)^3 = 1000^3 - 3 \cdot 1000^2 + 3 \cdot 1000 - 1 = 997\ 002\ 999$$

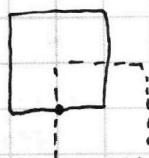
$$99^3 = 970299$$

$$\begin{array}{r} \times 99 \\ 99 \\ \hline + 891 \\ 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 5801 \\ 99 \\ \hline + 88209 \\ 88209 \\ \hline 970299 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2750 \\ \hline 37 \\ 259 \\ \hline 160 \end{array}$$

.....



$$\begin{aligned} \frac{5!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} &= \\ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} &= \boxed{\frac{5}{8}} \end{aligned}$$

100 %

1

$$\frac{1}{\frac{2}{7}} = 12A = \frac{2}{2} \Rightarrow A = \frac{2}{24}$$

$$(n-3)(n-10) = n^2 - 13n + 30$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} xy &= 3z + z^2 \\ yz &= 3x + x^2 \\ zx &= 3y + y^2 \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow \begin{aligned} y(x-z) &= 3(z-x) + (z+x)(z-x) \\ (z-x)(x+y+z+3) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ x+y+z = -3 \end{cases} \end{aligned} \right.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = -3(x+y+z)$$

~~$x^2 + y^2 + z^2$~~ $\frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2}$

метод $x+y+z = -3$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 9$$

$$\Rightarrow 3(xy + yz + zx) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

9999 ... 99

10000000
 $g^3 = 929$

$$99^3 = (100-1)^3 = 100^3 - 3 \cdot 100^2 + 3 \cdot 100 - 1 = -$$

$$\begin{array}{r} 10000000 \\ - 9900000 \\ \hline 1000000 \\ - 970000 \\ \hline 300 \\ - 300 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 970299 \\ - 929 \\ \hline 420 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

