



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Предп. $\Rightarrow x \cdot y \leq 0$ но $z \cdot (z-2) > 0$

$\Rightarrow$ Противоречие

Все случаи $x \neq y \neq z$ приводят к противоречию $\Rightarrow$ не подходят. $\Rightarrow$ лишь 1 решение

Ответ: 2/3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н1 ~~Пусть~~ ① Пусть $x=y=z=a$, но тогда $a^2 = -2a + a^2 \Rightarrow a=0$
не удовл. усл. ~~и~~

② Пусть 2 какие-то переменные равны друг другу, а 3-ая не равна им (в силу симметрии выберем мы можем выбрать 1 и 2 пер. и приравнять)

Пусть $x=z$

$$\Rightarrow y = x-2 \Rightarrow x^2 = (x-2)^2 - 2(x-2) = x^2 - 4x + 4 - 2x + 4$$

$$-6x = -8 \quad x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{2}{3}$$

тогда $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 2\left(\frac{4}{3} - \frac{6}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{6}{3}\right)^2 =$

$$2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{64}{9} = \frac{68}{9}$$

③ Пусть $x \neq y \neq z$ Тогда тогда есть самый большой и самый маленький

Пусть $x > y > z$ (в силу симметрии выбираем наименьший и наибольший. член можно попробовать)

Пусть $z > 0 \Rightarrow y > 0 \quad x > 0$

$$x \cdot y > x \cdot z \text{ но } z(z-2) < y \cdot (y-2) \Rightarrow$$

противореч. Пусть $z < 0 \quad x < 0 \quad y < 0$

$$x \cdot y < x \cdot z \text{ но } z(z-2) > (y-2) \cdot y \Rightarrow \text{противореч.}$$

Пусть $z < 0 \quad y < 0 \quad x > 0$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n_{II} = \underbrace{112 \cdot 95 \dots 9}_{30.001} = \underbrace{111 \dots 11}_{30.001} \cdot 9 \Rightarrow n^3 = 9^3 \cdot \underbrace{111 \dots 1}_{30.001}$

$\downarrow$
729
 $\downarrow$ $\rightarrow T\text{-периметр}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

----- 1 2 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 -----
число такого будет.

1 T T • 729.

300T 9 · 1 = 9



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

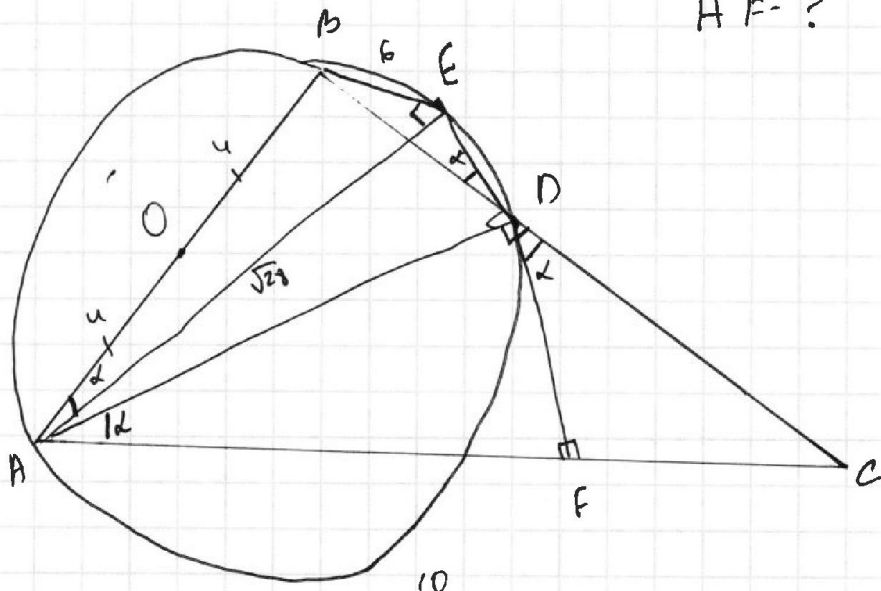
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$AB=8$ $BE=6$ $AC=10$
 $AF=?$



- ① Проведем $AE \perp BE$ (т.к. $\angle BEA$ опирается на дугу ω).
 $\angle FDC = \angle EDB$ ~~(вертикальные)~~ $= \angle BAE$
 - ② Проведем AD кот тоже $\perp BC$ т.к. $\angle BDA$ опирается на дугу ω .
 - ③ AE (по теореме Пифагора) $= \sqrt{64-36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$
 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow AD = AC \cdot \sin \alpha$
 $\cos \alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
 - ④ $AD = AC \cdot \cos \alpha = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$
 $AF = AD \cdot \cos \alpha = \frac{5 \cdot \sqrt{7}}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15\sqrt{7}}{8} = 4 \frac{3}{8}$
- Ответ: $4 \frac{3}{8}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нч ① коп-во вариантов выбрать n коробок из n

$$= \frac{n!}{5!(n-5)!}$$

~~теперь, коп-во вариан~~

Пусть, мы выбрали 3 коробки с шариками

коп-во вариантов это сделать $\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}$ → выбираем 2 коробки и 2 шарика

$$P_1 = \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} \cdot \frac{5!(n-5)!}{n!} = \frac{5!}{2!(n-2)(n-1)(n)} \text{ оставшихся } n-3$$

② Аналогично для 4 коробок: $\frac{n!}{4!(n-4)!}$ → выбрать n

Взять 3 с шариками и выбрать n : $\frac{(n-3)!}{4!(n-4)!}$

$$P_2 = \frac{(n-3)!}{4!(n-4)!} \cdot \frac{4!(n-4)!}{n!} = \frac{4!}{4!(n-2)(n-1)(n)}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{4!}{4!} \cdot \frac{2!}{5!} = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6} \text{ раз.}$$

Ответ: в 3,5 раз



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 2 = 0 \quad x_1 = 66 \quad x_2 = 62$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0 \quad x_1' = 64 \quad x_2' = 69$$

$$x_1 + x_2 = x_1' + x_2' \Rightarrow a^2 - 2a = a^3 - 2a^2 \Rightarrow a \cdot (a - 2) = \frac{a^2 \cdot (a - 2)}{3}$$

① $a = 0$

② $a - 2 = 0 \quad a = 2$

③ $a \neq 0 \quad a \neq 2 \quad 2 = a$

Ответ $\begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \\ a = 3 \end{cases}$



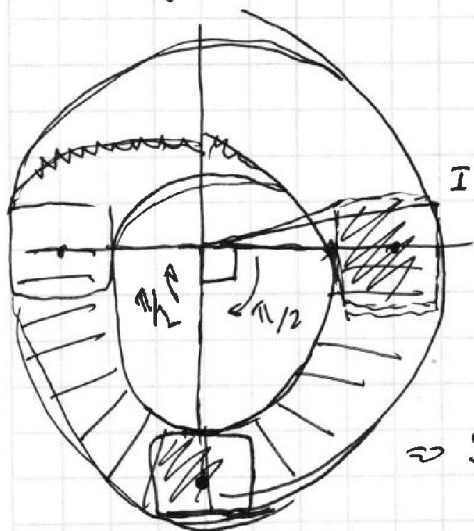
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16 Продолжение



~~S = 192π~~

При движении прямоугольник закрывает

I всю область заштрихованную $S_{\text{болш.кр.}} - S_{\text{малш.кр.}}$
+ $S_{\text{прямоугол.}}$ $\Rightarrow R_{\text{болш.кр.}} = \sqrt{144 + 48} = \sqrt{192}$

~~S~~ $R_{\text{малш.кр.}} = 8$

$\Rightarrow S_{\text{б.к.}} = \pi R^2 = \pi \cdot 192 \Rightarrow S_{\text{обл.з.}} = \frac{\pi \cdot 192 - \pi \cdot 64}{2} + 4 \cdot 8\sqrt{3} =$
 $S_{\text{малш.кр.}} = \pi \cdot 64$

II

$= \frac{64\pi + 8\sqrt{3}}{2} \approx 200,96 + 13,4 \approx 214,36$

Ответ: $S = 64\pi + 8\sqrt{3}$ (при $\pi \approx 3,14$ $\sqrt{3} \approx 1,73$)



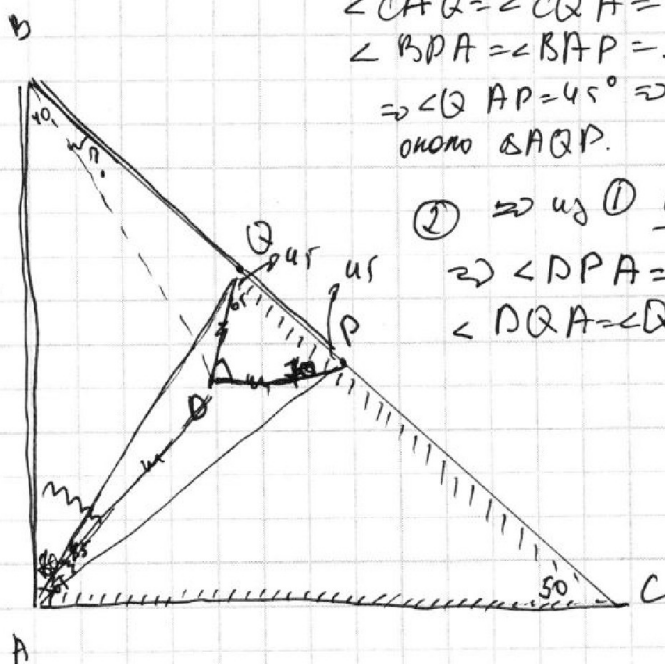
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7



① Из равновес $\triangle AQC$ и $\triangle BCP$:
 $\angle CAQ = \angle CQA = 65^\circ$
 $\angle BPA = \angle BAP = 70^\circ \Rightarrow \triangle ACP$ равнобедрен
 $\Rightarrow \angle ACP = 45^\circ \Rightarrow QD \rightarrow$ центр опис. окр.
около $\triangle AQP$.

② $\Rightarrow$ из ① $AD = DQ = DP$.
 $\Rightarrow \angle DPA = \angle DAP = 70 - 45 = 25^\circ$
 $\angle DQA = \angle QAD = 65 - 45 = 20^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} & x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 \\ & \frac{x+y}{2} + \frac{yz}{2x} + \frac{zx}{2y} \end{aligned} \\ & \begin{aligned} & 2z^2 - 4z - 2xy \rightarrow 2yz - 4x + 2x^2 - 2zx - 4y + 2y^2 \\ & (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) + (x^2 + y^2 - 2xy) \\ & (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 - 4x - 4y - 4z \\ & \frac{y \cdot z^2}{x^2} + \frac{z \cdot x^2}{y^2} + \frac{y^2 \cdot x^2}{z^2} = \frac{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}{x^2 y^2 z^2} \end{aligned} \\ & \begin{aligned} & x-2 = \frac{y \cdot z}{x} \\ & x = \frac{(z-2) \cdot z}{y} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & -x^2 - y^2 - z^2 - 12 \\ & (z-1)^2 = xy + 1 \end{aligned} \\ & \begin{aligned} & 2z(z-2) = (y-2)y \\ & z^2(z-2) = y^2(y-2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} & y = \frac{x(x-2)}{z} \\ & x(x-2) = y^2 \end{aligned} \\ & \begin{aligned} & x^2(x-2) = z^2(z-2) \\ & x^2(x-2) = y^2(y-2) \end{aligned} \quad \begin{aligned} & x=y \\ & z=y-2 \end{aligned} \\ & \begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z - 2xy - 2yz - 2zx = 0 \\ & 2z^2 + 2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 4z - 2xy - 2yz - 2zx = 0 \end{aligned} \\ & \begin{aligned} & xy + 2z - 4x - 4y - 4z \\ & yz + 2x - 4x - 4y - 4z \\ & zx + 2y - 4x - 4y - 4z \end{aligned} \quad \begin{aligned} & xy - 2z \cdot xy - 2x + 2x - 2y \\ & y \cdot (x-2) \cdot x \cdot y \cdot x(z-2) \cdot z \cdot (y-2) \end{aligned} \\ & \begin{aligned} & z^2 - 2z - xy \\ & D = 4 + 4xy \\ & z = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+xy}}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & 1 \pm \sqrt{1+xy} \\ & x(y-2) = (z-y)(z+y) - 2(z-y) \\ & x = \frac{z-y}{2} \\ & y^2(x-y) = (z-x)(z+x) - 2(z-x) \\ & y = 2 - \frac{z}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & x-2 = y \\ & y = 2 - \frac{z}{2} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \cdot (y-z) = 2y-2z + (z-y)(y+z) \quad x = 2-y-z$$

$$2(y-z)(z-y)(y+z) \quad y = 2-x-z$$

$$y \cdot (x-z) = 2x-2z + (z-x)(x+z)$$

$$z = 2-y-x$$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ x+y+z &= 3 \\ x &= 3-y-z \end{aligned}$$

$$3y-y^2-yz = z^2-2z$$

$$y^2+y \cdot (z-3) + z^2-2z = 0$$

$$z^2-6z+3-4z^2+2z = -3z^2+2z$$

$$y = \frac{2-3 \pm \sqrt{-3z^2+2z}}{2}$$

$$xy+yz+zx = -6+z^2+x^2+y^2$$

$$(z-x)^2 + (z+y)^2 + (z-x)^2 = 12$$

$$x^2+y^2+z^2$$

$$xy+yz+zx+2z+2x+2y$$

$$88654321$$

$$AC = BC \cdot \cos 50^\circ$$

$$2 \cdot BC^2 \cdot \cos 50^\circ - 2 \cdot \cos 50^\circ \cos 50^\circ$$

$$2BC^2 \cos^2 50^\circ / (1 - \cos 100^\circ)$$

$$AB = BC \cdot \cos 40^\circ$$

$$2 \cdot BC^2 \cdot \cos 40^\circ -$$

$$2BC \cos 40^\circ / (1 - \cos 80^\circ)$$

$$AB / \cos 50^\circ \cos 40^\circ -$$

$$2 \cdot AB \cdot \cos 50^\circ$$

$$AB \cdot (1 - \cos 50^\circ)$$

$$2 \cos 45^\circ \cos 5^\circ$$

$$AB \cdot (1 - \cos 50^\circ)$$

$$\cos 50^\circ + \cos 40^\circ - 1$$

$$(xy)^4 + (yz)^4 + (zx)^4$$

$$x^2 y^2$$

$$xy + yz + zx + 6 =$$

$$AB / \cos 50^\circ \cos 40^\circ -$$

$$2 \cdot AB \cdot \cos 50^\circ$$

$$AB \cdot (1 - \cos 50^\circ)$$

$$2 \cos 45^\circ \cos 5^\circ$$

$$AB \cdot (1 - \cos 50^\circ)$$

$$\cos 50^\circ + \cos 40^\circ - 1$$

$$(xy)^4 + (yz)^4 + (zx)^4$$

$$x^2 y^2$$

$$xy + yz + zx + 6 =$$

$$AB / \cos 50^\circ \cos 40^\circ -$$

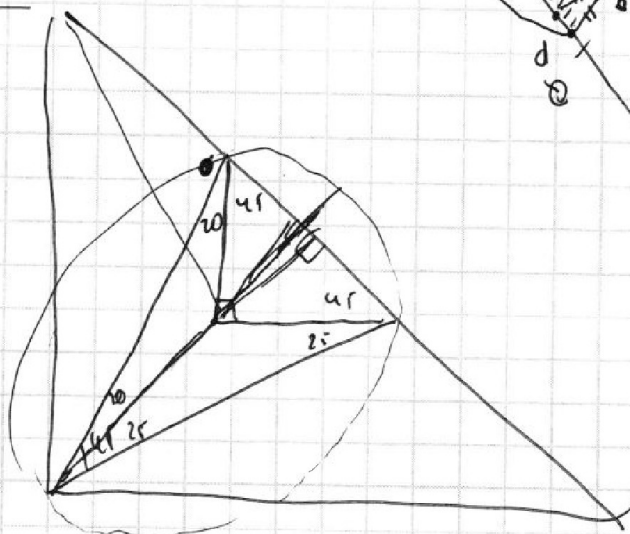
$$2 \cdot AB \cdot \cos 50^\circ$$

$$AB \cdot (1 - \cos 50^\circ)$$

$$2 \cos 45^\circ \cos 5^\circ$$

$$AB \cdot (1 - \cos 50^\circ)$$

$$\cos 50^\circ + \cos 40^\circ - 1$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y \geq 20\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x$$

$$x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y \leq 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3}$$

$$2x - 20x \leq 4$$

$$-18x \leq 42$$

$$x \geq \frac{7}{9}$$

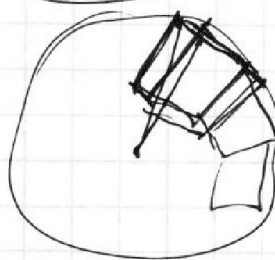
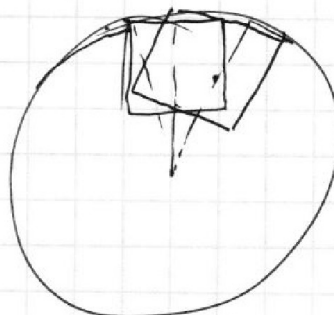
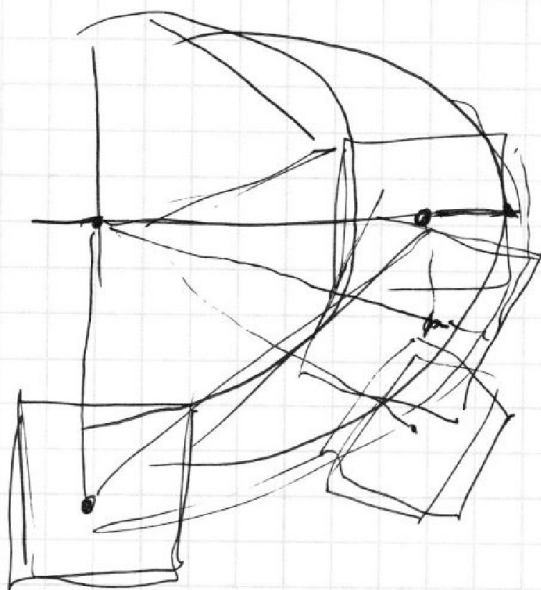
$$\begin{array}{r} 1 \\ 104 \\ + 48 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$-3,4x + 428$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 192 \\ - 64 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 314 \\ - 64 \\ \hline 158 \\ 1256 \\ \hline 20096 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 1,2 \\ 8 \\ \hline 13,4 \\ + 200,56 \\ 13,40 \\ \hline 214,36 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено болсс одной задачи или не отмсчено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

