



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(1) Не учитывая общности, пусть $x=y$, тогда

$$\begin{cases} x^2 = -2z + z^2 & (1) \quad x \neq 0 \\ xz = -2x + x^2 & (2) \end{cases} \Rightarrow z = x - 2$$

$\Rightarrow x = y = z + 2$, подставим в (1)

$$(z+2)^2 = -2z + z^2 = z^2 + 4z + 4$$

$$-4 = 6z \Rightarrow z = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3} = y$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(-2 - \frac{2}{3}\right)^2 = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{8}{9} + \frac{64}{9} = \frac{72}{9} = 8$$

Система не имеет решений, когда
 $x=y=z$, т.к. $x^2 = -2x + x^2 \Rightarrow x=0$, но
 $x \neq 0$
аналогично для y, z

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) \quad \underbrace{9 \dots 9}_{30\,001}^3 = \left(\underbrace{10 \dots 0}_{30\,001} - 1 \right)^3$$

По формуле Ньютона $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{10 \dots 0}_{30\,001} - 1 \right)^3 = \left(10^{30\,001} \right)^3 - 3 \cdot \left(10^{30\,001} \right)^2 + 3 \cdot 10^{30\,001} - 1$$

Выполним операции построчно

~~$$\begin{array}{r} \underbrace{9 \dots 9}_{60\,001} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{30\,002} \\ - \underbrace{10 \dots 0}_{30\,001} \\ \hline \underbrace{9 \dots 9}_{60\,001} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{30\,001} \end{array}$$~~

1)

$$\begin{array}{r} \underbrace{9 \dots 9}_{30\,000} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{60\,003} \\ - \underbrace{10 \dots 0}_{30\,000} \quad \underbrace{0 \dots 0}_{30\,000} \\ \hline \underbrace{9 \dots 9}_{30\,000} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{60\,002} \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{r} \underbrace{9 \dots 9}_{30\,000} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{30\,000} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{30\,002} \\ + \underbrace{9 \dots 9}_{30\,000} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{30\,000} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{30\,001} \\ \hline \underbrace{9 \dots 9}_{30\,000} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{30\,000} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{30\,001} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underbrace{9 \dots 9}_{30\,000} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{30\,000} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{30\,001} \\ - \underbrace{10 \dots 0}_{30\,000} \quad \underbrace{0 \dots 0}_{30\,000} \quad \underbrace{0 \dots 0}_{30\,001} \\ \hline \underbrace{9 \dots 9}_{30\,000} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{30\,000} \quad \underbrace{9 \dots 9}_{30\,001} \end{array}$$

В сумме $9^3 = 30\,000 + 30\,001 = 60\,001$

Ответ: 60.001



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $a=2$)

$$x^2 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{cases} - \text{корни}$$

они являются 6-й и 7-й членами прогрессии
 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \sqrt{5} = -\sqrt{5} + \sqrt{\frac{11}{18}} \\ \sqrt{5} = -\sqrt{5} - \sqrt{\frac{11}{18}} \end{cases}$$

оба равенства оказались неверными $\Rightarrow$
такого быть не может

при $a=3$)

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$D = 9 + 4 = 13$

аналогично

$$\begin{cases} \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} + \sqrt{\frac{11}{18}} \\ \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} - \sqrt{\frac{11}{18}} \end{cases}$$

оба равенства оказались неверными
 $\Rightarrow$ при $a=3$ не может быть арифм. прогрессии

Ответ: такого a не существует



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

$b + 5d$; $b + 6d$ - корни $\uparrow$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + b - a^5 = 0$$

$b + 3d$; $b + 8d$ - корни $\uparrow$

По теореме Виетта:

$$b + 5d + b + 6d = a^2 - 2a = 2b + 11d = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

$$3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2$$

$$a^3 - 5a^2 + 6a = 0 \Rightarrow a(a^2 - 5a + 6) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \\ a = 2 \end{cases} \quad \Leftarrow a(a-3)(a-2) = 0$$

По теореме Виетта:

$$\begin{cases} b^2 + 11bd + 30d^2 = a^2 - a - 7 \\ b^2 + 11bd + 24d^2 = \frac{6 - a^5}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$6d^2 = a^2 - a - 7 + \frac{a^5 - 6}{3} \quad / \cdot 3$$

$$18d^2 = 3a^2 - 3a - 21 + a^5 - 6 = a^5 + 3a^2 - 3a - 27$$

при $a = 0$, $18d^2 = -27 \Rightarrow a \neq 0$

при $a = 2$, $18d^2 = 32 + 12 - 6 - 27 = 44 - 33 = 11 \Rightarrow d = \pm \sqrt{\frac{11}{18}}$

при $a = 3$, $18d^2 = 729 + 27 - 9 - 27 = 720 \Rightarrow d = \pm \sqrt{40}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

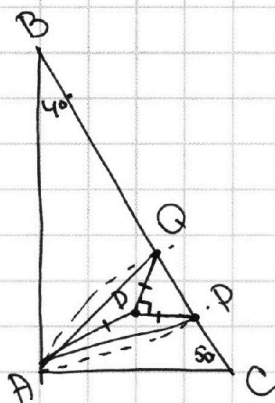


СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7



т.к. $\triangle DQP$ - р/б с углами $80^\circ \Rightarrow$

$$\angle QPD = 45^\circ$$

Проведем AP и QA

$$\angle QAC = \frac{180 - 50}{2} = 65^\circ \text{ (т.к. } \triangle QCA \text{ - р/б)}$$

$$\angle BAP = \frac{180 - 40}{2} = 70^\circ \text{ (т.к. } \triangle APB \text{ - р/б)}$$

$$\angle QAP = \angle QAC + \angle BAP - \angle QAP$$

$$90^\circ = 65^\circ + 70^\circ - \angle QAP \Rightarrow \angle QAP =$$

Заметим, что $\frac{\angle QDP}{2} = \frac{\angle QAP}{2} \Rightarrow$ $\angle QDP = \angle QAP = 45^\circ$ т.к. $\triangle DQP$ - р/б

QPA - окружность с центром D

$$\Rightarrow DQ = QP = DA$$

$$\triangle ADB = \triangle DBP:$$

BD - общая

$BP = BA$ - по условию

$$DA = DP$$

$$\Rightarrow \angle ABD = \angle DBP = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ = \angle DBC$$

Заметим, что на BC : Q и P лежат именно в такой последовательности т.к., если они будут лежать иначе

$BA + AC > BC$, что неверно по неравенству треугольника

Ответ: 20°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(5)

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

$b+5d; b+6d$ - корни

$$3x^2 - (b^3 - 2b^2)x + 6 - a^5 = 0$$

$b+3d; b+8d$ - корни

По м. Виетта:

$$b^2 - 2a = 2a + 11d = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

$$3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2 \Rightarrow a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

$$a(a-2)(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \\ a=3 \end{cases}$$

Рассмотрим случаи:

$a=0$) $x^2 - 7 = 0$
 $\pm\sqrt{7}$ - корни

$$3x^2 + 6 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$0 < x^2 + 2 = 0$$

корней нет

$a=2$)

$$x^2 - (4-4)x + 4-2-7 = 0$$

$$x^2 - 5 = 0 \quad \pm\sqrt{5} \text{ - корни}$$

$$3x^2 - (8-8)x + 6-32 = 0$$

$$3x^2 - 26 = 0 \quad \pm\sqrt{\frac{26}{3}} \text{ - корни}$$

$a=3$)

$$x^2 - (9-6)x + 8-3-7 = 0$$

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \text{ - корни}$$

$$3x^2 - (27-18)x + 6 - \frac{729}{27} = 0$$

$$3x^2 - 9x - 723 = 0$$

$$x^2 - 3x - 241 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = z(z-2) & (1) \\ yz = x(x-2) & (2) \\ zx = y(y-2) & (3) \end{cases}$$

$$\text{из 1: } x = \frac{z(z-2)}{y}$$

$$\text{из 3: } x = \frac{y(y-2)}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{y}(z-2) = \frac{y}{z}(y-2)$$

сократим на $\frac{y}{z}$

$$\frac{z}{z-2} = \frac{y-2}{y}$$

$$\frac{y}{z} \neq 0 \text{ т.к. } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$$

$$x(x-2)$$

$$f(x) =$$

$$= yz$$

$$= xz$$

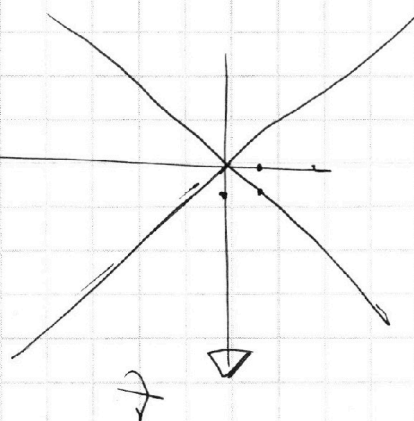
$$f(x) =$$

$$f(y) =$$

$$\delta + 7$$

$$\begin{aligned} \delta g &= h + \eta g = 0 \\ 0 &= \delta x - \delta^2 x \\ h &+ h^- \end{aligned}$$

$$\delta$$



$$h \geq |\delta - 7| + |\delta + 7|$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = kx$$

$$x(1-k^3) + 2(k^2-1) = 0$$
$$x(1-k)(k^2+k+1) + 2(k-1)(k+1) = 0$$

$$x(k^2+k+1) + 2(k+1) = 0$$

$$2k^2 + 2k + 2 + 2k + 1 = 0$$

$$2k^2 + 4k + 3 = 0$$

$$D = 2^2 + 4^2 + 4 - 4^2 - 4^2 =$$

$$-32^2 + 4$$

$$6 + 6d + 6 + 5d$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$$

$$a^3 - 2a^2$$

$$3d + 4 - 2 - 11 = 6d^2$$

$$a^2 - a - 7 = 6^2 + 6(11d) + 30d/2$$

$$6 - a^5 = 6^2 + 116d + 24d/2$$

Save

$$a^5 + a^2 - a - 7 - 6 = 6d^2$$

$$a^5 + a^2 - a - 11 = 6d^2$$

$$-4 =$$

$$\frac{11}{6} = d^2$$
$$32 \times 5 \times 3 = 6d^2$$
$$32 \times 5 \times 3 = 6d^2$$
$$32 \times 5 \times 3 = 6d^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$yz = x(x-2) = \frac{z(z-2)}{y} \left(\frac{z(z-2)}{y} - 2 \right) =$$

$$= \frac{z(z-2)}{y} \left(\frac{z(z-2) - 2y}{y} \right) = \frac{z^2(z-2)^2 - 2yz(z-2)}{y^2} = yz$$

$$z(z-2)^2 - 2yz(z-2) = y^3$$

$$\cancel{z^3} z(z^2 - 4z + 4) - 2yz + 4y = y^3$$

$$z^3 - 4z^2 + 4z - 2yz + 4y - y^3 = 0$$

$$(z-y)(z^2 + yz + y^2) - 4z^2 + 4z - 2yz + 4y = 0$$

$$- 2z(2z + y)$$

$$\cancel{z} - 4z(z-y) - 6yz + 4z + 4y$$

$$\cancel{z} \quad \cancel{z+y} \quad \cancel{(z+y)} \quad \cancel{(y+y)}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{z \cdot 9}{y \cdot 3} = \frac{z(3-y) \cdot i \cdot 4}{i \cdot 4 \cdot i(3-y) \cdot i(3-y)} \cdot \frac{i(3-y) \cdot i(3-y) \cdot i \cdot 2}{i \cdot 4 \cdot i(3-y)}$$

$$\frac{i(3-y) \cdot i \cdot 4}{i(3-y)} \cdot \frac{i(3-y) \cdot i \cdot 3}{i \cdot 4}$$

$$\frac{i \cdot i(3-y)}{i \cdot 4} \cdot \frac{i(3-y) \cdot i \cdot 2}{i(3-y)}$$

$$\frac{4}{4} \cdot \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{4}{4} \cdot \frac{2}{2} = 1$$

ответ 5

коробка - 4

yz
 $z^2(z-2) = y^2(y-2)$

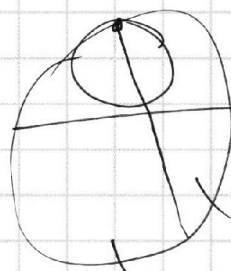
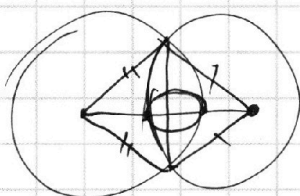
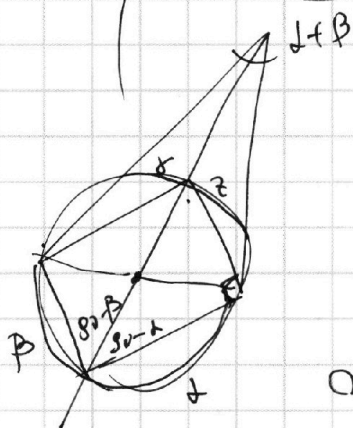
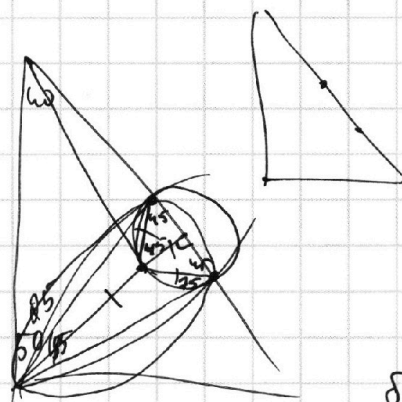
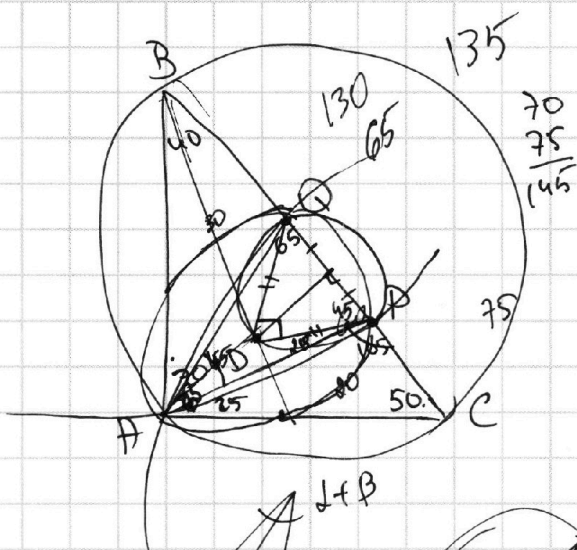


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



522
80
100
964 = 2843

211

84

$$\begin{aligned} 0 &= (a - b + c - d) \cdot b \\ &= a^2 - 2ab + 2ac - 2ad + b^2 - 2bc + 2cd - d^2 \\ &= a^2 - 2ab + 2ac - 2ad + b^2 - 2bc + 2cd - d^2 \end{aligned}$$

$$0 = (a^2 - 5a + 6) \cdot a$$

$$a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

$$\begin{aligned} D_1 &= (a^2 - 2a)^2 - 4a^2 + 4a + 28 = \\ &= a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 + 4a + 28 = \\ &= a^4 - 4a^3 + 4a + 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 \\ &x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9 \quad x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15} \quad x_{16} \quad x_{17} \quad x_{18} \quad x_{19} \quad x_{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0 \\ &a + 5d \quad a + 6d \quad a + 7d \quad a + 8d \quad a + 9d \quad a + 10d \quad a + 11d \quad a + 12d \quad a + 13d \quad a + 14d \quad a + 15d \quad a + 16d \quad a + 17d \quad a + 18d \quad a + 19d \quad a + 20d \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

300001 ребрети

8 → 83 → 428

$$\begin{array}{r} 83 \\ 83 \\ \hline 428 \end{array}$$

$$(10^{\frac{300001}{3}} - 1) \frac{3}{2}$$

$$(10^{\frac{300001}{3}} - 1)^3 = 10^{\frac{900003}{3}} - 3 \cdot 10^{\frac{600002}{3}} + 3 \cdot 10^{\frac{300001}{3}} - 1$$

$$\begin{array}{r} 10 \dots 0 \\ 3 \cdot 100 \dots 0 \\ \hline 8 \dots 940 \dots 0 \\ 30000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \dots 940 \dots 0 \\ 30000 \\ \hline 8 \dots 940 \dots 0 \\ 30000 \end{array}$$

①
$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4(x + y + z) + 12$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) - (xy + yz + zx) &= 0 \\ (x + y + z)^2 - 2(x + y + z) - 2(xy + yz + zx) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 4(x + y + z) &= (xy + yz + zx) - 2(x + y + z) \\ &= x(y - 2) + y(z - 2) + z(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(z - 2) \\ x(x - 2) \\ y(y - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z - 2 &= \frac{xy}{z} \\ x - 2 &= \frac{yz}{x} \\ y - 2 &= \frac{zx}{y} \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2}$$

$$\frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + z^4 x^4}{x^2 y^2 z^2} - ?$$

$$\begin{aligned} L &= (x - 2)z + (y - 2)x + (z - 2)y \\ &= xz + yx + zy - 2(x + y + z) \end{aligned}$$

$$y^2z + zy^2 + yz^2 + z^2y = (z+y)(y+z)$$

$$- (y-z)z + (y-z)z$$

$$0 = z^2 + zy^2 + yz^2 - y^2z - yz^2 - y^2z$$

$$0 = z^2 + zy^2 + yz^2 - y^2z - yz^2 - y^2z$$

$$zy^2 - y^2z + yz^2 - yz^2 = z^2 -$$

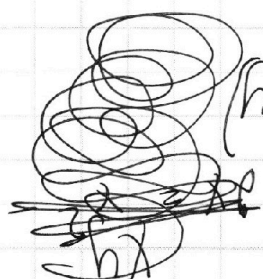
$$\frac{z}{y-z} = \frac{z+y}{z-y} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z}{y(y-z)} = \frac{z+y}{y(z-y)} = x$$

$$x(y+z) = z-y$$

$$x(y-z) = (z+y)(z-y)x$$

$$x(y^2-z^2) = z(y-z)x$$



$$y^2x - z^2y = y^2z - xz^2$$



$$x \in [0,1]$$

$$x > 0$$

$$y^2x - z^2y = y^2z - xz^2 \Rightarrow z - z = \frac{z}{xy - z^2}$$

На одной странице можно оформить только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поряд QR-кода недоступен!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Лопыта QR-кода неопытна!

1

2

3

4

5

6

7

$2(xy + yz + zx) - (x + y + z) = 2(xy \dots)$

$$\begin{cases} xy = z(z-2) \\ yz = x(x-2) \\ xz = y(y-2) \end{cases} \text{применяем.}$$

$$xyz = (z-2)(x-2)(y-2)$$

$$(y+z)^2 = \frac{xyz}{x-2}$$

$$yz = x(y-2)$$

$$xz = y(y-2)$$

$$x^2 = (z-2)(y-2)$$

$$y^2 = (x-2)(z-2)$$

$$z^2 = (y-2)(x-2)$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} - 2 \right) = -\frac{2}{3} - \frac{8}{3} =$$

$$\frac{4}{3} \cdot -\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \left(-\frac{2}{3} \right) \Rightarrow y = z = 6$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 + 4 + 4 = 12$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = -2x + x^2 = (x-2)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = -2y + y^2 = (y-2)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = -2z + z^2 = (z-2)^2$$

$$x^2 = -2x + x^2 \Rightarrow x = 2$$

$$y^2 = -2y + y^2 \Rightarrow y = 2$$

$$z^2 = -2z + z^2 \Rightarrow z = 2$$

$$x = y = z = 2$$

$$x^2 = -2x + x^2 \Rightarrow x = 2$$

$$y^2 = -2y + y^2 \Rightarrow y = 2$$

$$z^2 = -2z + z^2 \Rightarrow z = 2$$

$$x = y = z = 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поня QR-кода недоступна!

☐ 1
☐ 2
☐ 3
☐ 4
☐ 5
☐ 6
☐ 7

$$y = x + 2$$

$$x(x+2) = \cancel{x(x+2)} (x)$$

$$yx = y(2-y)$$

$$y^2 = x(2-y)$$

$$x = 2 - y$$

$$y = 2 = x + 2$$

$$\begin{cases} xy = y(y-2) \\ y^2 = x(x-2) \\ yx = y(y-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = y(y-2) \\ y^2 = x(x-2) \end{cases}$$

$$(x+2)^2 = x^2 - 2x = x^2 + 4x + 4$$

$$-6x = 4 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{3} = z$$

$$y^2 = 2y \Rightarrow y = 2$$

$$y = \frac{2-x}{2}$$

$$y^2 = x(x-2)^2 - 2y(x-2)$$

$$z = \frac{x(x-2)}{y}$$

$$xy = \frac{x(x-2)}{y} \left(\frac{x(x-2)}{y} - 2 \right)$$

$$y^2 = x(x^2 - 4x + 4) - 2yx + 4y$$

$$(y+2)(x+2) = (2+y)(x-2)$$

$$y^2 + yz + z^2 = 2z + 2y$$

$$\frac{z}{y}(y-2) = \frac{x-2}{z}$$

$$(z-y)(y^2 + yz + z^2) = 2(z-y)(z+y)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. После QR-кода неопустима!

$$\frac{x(x-2)}{y} = \frac{y(y-2)}{x} = z \quad x = \frac{z(z-2)}{y} = \frac{y(y-2)}{z}$$

$$x^2(x-2) = y^2(y-2)$$

$$x^3 - 2x^2 - y^3 + 2y^2 = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 2(x-y)(x+y) = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y) = 0$$

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y = 0$$

$$(x+y)^2 - 2xy + 2x + 2y = 0$$

$$x^2 + x(y+2) + y^2 + 2y = 0$$

$$D = y^2 + 4y + 4 - 4y^2 - 8y = -4y^2 - 4y$$

$$z = -3y^2 - 4y + 4$$

$$\frac{x}{y} \neq 0$$

$$x-2 = \frac{1}{y-2}$$

$$x^2 - 2x + x^2$$

$$x = 0$$

$$(x-2)(y-2) = 1$$

$$yz = x(x-2) = \frac{x}{y-2}$$

$$x-2 = \frac{1}{y-2} = \frac{1}{z-2}$$

$$y = z$$

$$xy = y^2 - 2y$$

$$y^2 - y(2+x) = 0$$

$$\frac{y(y-2)}{x} = y$$

$$z-2 = x=y$$

$$y = x$$

$$3x^2 + 12x - 6 - 27 = 0$$

$$a^2/a^3 + 3 = 3/a + 8$$

$$z-2 = \frac{1}{y-2}$$

$$z(z-2) = ky(y-2)$$

$$z-2 = x=y$$