



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В геймре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = z^2 + 3z \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

Вычтем одно из другого, получим

$$xy - yz = z^2 + 3z - x^2 - 3x$$

$$y(x-z) = (z-x)(z+x) + 3(z-x)$$

$$(x-z)(y+z+3) = 0$$

Аналогично две другие, получим

$$\begin{cases} (x-z)(x+y+z+3) = 0 \\ (z-y)(x+y+z+3) = 0 \\ (y-x)(x+y+z+3) = 0 \end{cases}$$

1) Рассмотрим $x=y=z$, тогда

$xy = z^2 + 3z$ можно записать как $x^2 = x^2 + 3x \Rightarrow x=0 = y = z$, но это условие $x, y, z \neq 0$

2) Т.к. система симметрична, если $x=y \neq z$, аналогично, когда $x=z+y$ и $z=y+x$, аналогично, тогда получим $x=z+y$, тогда

$$\begin{cases} x^2 = 3y + y^2 \\ xy = x^2 + 3x \end{cases}$$

~~так как $x \neq 0$~~
~~то $x^2 = 3x \Rightarrow x=0 = y = z$~~

~~Решаем в виде~~

$$\begin{cases} (x-y)(x+y) = 3y \\ x(y-x) = 3x \end{cases}$$

т.к. $x \neq y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ $\frac{(x-y)(x+y)}{x(y-x)} = \frac{3y}{3x} \Rightarrow \frac{x+y}{-x} = \frac{y}{x}$,

$$x^2 + xy = -xy, x(x+2y) = 0 \Rightarrow x = -2y; \text{ тогда}$$

$x^2 = 3y + y^2$ перепишем в виде $4y^2 = 3y + y^2 \Rightarrow 3y(y-1) = 0$,

откуда $y=1, x=-2y=-2=z$, тогда

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 1 + 1 + 4^2 = 16 + 2 = 18.$$

3) Если ~~все~~ x, y, z различны, то $x+y+z+3=0$,
тогда $z+3 = -(x+y), x+3 = -(z+y), y+3 = -(x+z)$,



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{значит } (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 =$$

$$= 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz) = 2((x+y+z)^2 - (xy + yz + xz))$$

Известно, что $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$ и

$$xy + yz + xz = 3(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2; x+y+z = -3;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + xz + yz) = (xy + yz + xz) - 3(x+y+z),$$

$$3(xy + yz + xz) = (x+y+z)(x+y+z+3) = 0, \text{ значит}$$

$xy + yz + xz = 0$, откуда искаемое выражение

$$2((x+y+z)^2 - (xy + yz + xz)) = 2(x+y+z)^2 = 2 \cdot 9 = 18.$$

Таким образом, для неизвестных x, y, z выражение

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18.$$

Ответ: 18.

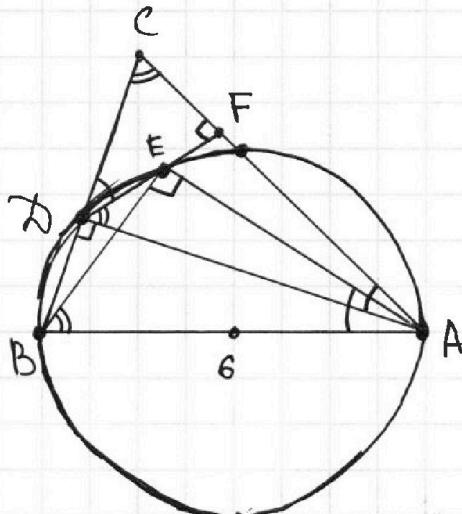


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмечьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть $\angle BAE = \alpha$, тогда
 т.к. $\angle BEA = 90^\circ$ (угол на диаметре),
 $\angle EBA = 90^\circ - \alpha$, пусть $90^\circ - \alpha = \beta$;
 из вписанных $\angle BDE = \alpha$, $\angle ADE = \beta$,
 а т.к. $\angle BDA = 90^\circ$ (угол на диаметре),
 $\angle CDF = 90^\circ - \angle EDA = \alpha$, а $\angle DCA =$
 $= 90^\circ - \alpha = \beta$, $\angle DAF = 90^\circ - \beta = \alpha$;

2) Тогда из равенства членов из п.1 получим
 подобие треугольников $ADF \sim CAD$, ~~окончательно~~ а
 также $\triangle CDF \sim \triangle CAD$, откуда ~~$\frac{CF}{CD} = \frac{CD}{AC} = \sin \alpha$~~ ;

3) т.к. $BE = 5$, $AB = 6$, $\angle BAE = \alpha$, $\sin \alpha = \frac{5}{6}$; тогда
 $\frac{CD}{AC} = \frac{5}{6}$, а $AC = 10$, откуда $\frac{CD}{10} = \frac{5}{6}$, $CD = \frac{25}{3}$;

$$CD^2 = CF \cdot AC \Rightarrow CF = \frac{CD^2}{AC} = \frac{625}{9 \cdot 10} = \frac{125}{18};$$

$$CF + AF = AC = 10 \Rightarrow AF = 10 - CF = 10 - \frac{125}{18} = \frac{180 - 125}{18} = \\ = \frac{55}{18}.$$

Ответ: $\frac{55}{18}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Когда всего коробок было n , тогда вероятность выигрыша, когда открывают 5 коробок будет равна $P(5) = \frac{C_3^3 \cdot C_{n-3}^2}{C_n^5} =$

$$= \frac{1 \cdot (n-3)! \cdot (n-5)! \cdot 5!}{(n-5)! \cdot 2! \cdot n!} = \frac{(n-3)! \cdot 5!}{n! \cdot 2!};$$

А когда открывают 6 коробок, вероятность выигрыша равна $P(6) = \frac{C_3^3 \cdot C_{n-3}^3}{C_n^6} =$

$$= \frac{1 \cdot (n-3)! \cdot (n-6)! \cdot 6!}{3! \cdot (n-6)! \cdot n!} = \frac{(n-3)! \cdot 5! \cdot 6!}{n! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{(n-3)! \cdot 5!}{n!};$$

тогда $\frac{P(6)}{P(5)} = \frac{(n-3)! \cdot 5! \cdot n! \cdot 2}{n! \cdot (n-3)! \cdot 5!} = 2$, значит

вероятность выигрыша игрока увеличилась в 2 раза.

Ответ: в 2 раза.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

по т. Виета $x_1 + x_2 = a^2 - a$, $x_1 \cdot x_2 = a - 5$; т.к. x_1 и x_2 - 5 и 6 члены арифм. прогрессии, можно записать это в виде

$$b_5 + b_6 = b_1 + 4d + b_1 + 5d = 2b_1 + 9d = a^2 - a,$$

$$(b_1 + 4d)(b_1 + 5d) = b_1^2 + 9b_1d + 20d^2 = a - 5$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0,$$

$$\text{по т. Виета } x_1 + x_2 = \frac{a^3 - a^2}{4}, x_1 \cdot x_2 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4};$$

аналогично первому ур-нию, т.к. x_1 и x_2 - 3 и 8 члены арифм. пр-ии,

$$b_3 + b_8 = 2b_1 + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4}, (b_1 + 2d)(b_1 + 7d) =$$

$$= b_1^2 + 9b_1d + 14d^2 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}; б\text{ из этого находим}$$

$$\text{систему } \begin{cases} 2b_1 + 9d = a^2 - a \\ b_1^2 + 9b_1d + 14d^2 = a - 5 \end{cases} \quad (1)$$

$$2b_1 + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$b_1^2 + 9b_1d + 14d^2 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \quad (2)$$

$$2b_1 + 9d = a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow 4a(a-1) = a^2(a-1),$$

$$a(a-1)(a-4) = 0, \text{ откуда } \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решенис которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вычитем из (1) (2), получим

$$(1)-(2)=6d^2=a-5-\frac{(2a^4+2a^2-a^6-4)}{4},$$

$$24d^2=4a-20-2a^4-2a^2+a^6+4,$$

$$24d^2=a^6-2a^4-2a^2+4a-16$$

1) $a=0$

$$\frac{24d^2}{\geq 0}=\frac{-16}{\leq 0} \text{ - не может быть}$$

2) $a=1$

$$24d^2=1-2-2+4-16=-15 \text{ - не может быть}$$

3) $a=4$

$$24d^2=4^6-2 \cdot 4^4-2 \cdot 4^2+16-16=2^{12}-2^9-2^5=2^5(2^4-2^4-1)=$$

$$=32(128-16-1)=32 \cdot 111=8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 37, d^2=4 \cdot 37 = 148 \text{ - подходит.}$$

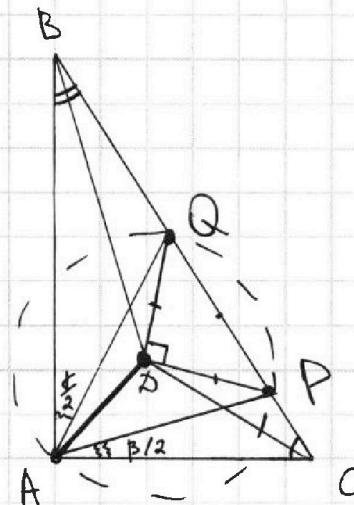
Ответ: 4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \alpha$, тогда

$$\angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \text{ откуда}$$

$$\angle PAC = \frac{\beta}{2}, \text{ аналогично } \angle BAQ = \frac{\alpha}{2},$$

а $\beta + \alpha = 90^\circ$, значит $\angle QAP =$

$$= 90^\circ - \frac{\beta + \alpha}{2} = 45^\circ; \text{ тогда}$$

$\angle QAP = 45^\circ$, $\angle QDP = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. $\Rightarrow D$ -центр опис.

окр-ти $\triangle APQ$;

2) т.к. D -ц. опис. окр-ти $\triangle APQ$, $\angle ADQ = 2 \cdot \angle APQ =$
 $= 2 \cdot (90^\circ - \frac{\beta}{2}) = 180^\circ - \beta \Rightarrow ABDQ$ - внмс., ~~так как~~

$\angle BAD = \angle DQP = 45^\circ$; аналогично $\angle DAC = 45^\circ$,

значит D на бис-се $\angle BAC$;

3) $\angle QPD$ - внешний угл $\triangle PDC$, $\angle QPD = \angle PDC + \angle PCD =$

$$= 45^\circ = \angle PDC + 20^\circ \Rightarrow \angle PDC = 25^\circ; \text{ из внмс.}$$

$$\angle APC = \angle PDC = 25^\circ = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \beta = 50^\circ, \alpha = 40^\circ;$$

$$\angle DBC = 45^\circ - \angle BDC = 45^\circ - \angle BAQ = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 25^\circ.$$

$$\angle DBC = 25^\circ.$$

Ответ: 25° .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

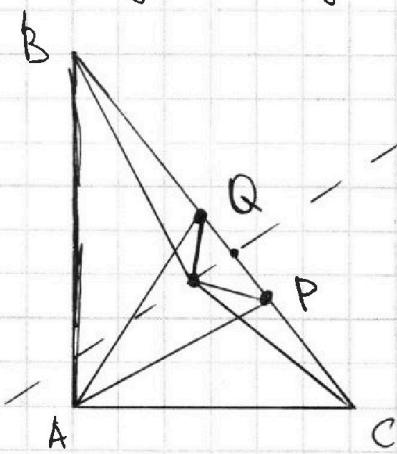
$$1) \text{ при } x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y \geq \left(\frac{15}{2} - x\right) 6\sqrt{3}$$

$$y \leq \left(x - \frac{15}{2}\right) 6\sqrt{3}$$

$$|x+y-1| + |x-y-1| \leq 4$$



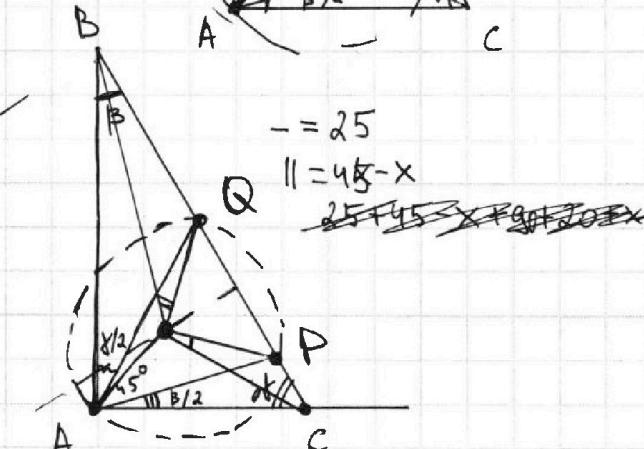
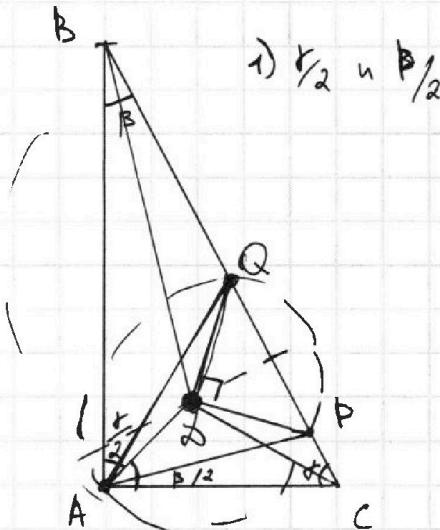
$$g^3 = 429$$

$$gg^3 = 429 \cdot 1331$$

$$(gg\dots 0+g)^3 =$$

$$= (gg\dots w+g)^3 =$$

$$= \underbrace{(g\dots g)^3}_{h-1} \cdot 1000 + g^3 + 3 \cdot 81 \cdot (gg\dots g)_{10} + 3 \cdot g \cdot 6(g\dots g)$$



$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 1331 \\ \hline 22 \\ 1331 \\ \hline 11949 \\ 2662 \\ \hline 946299 \end{array}$$

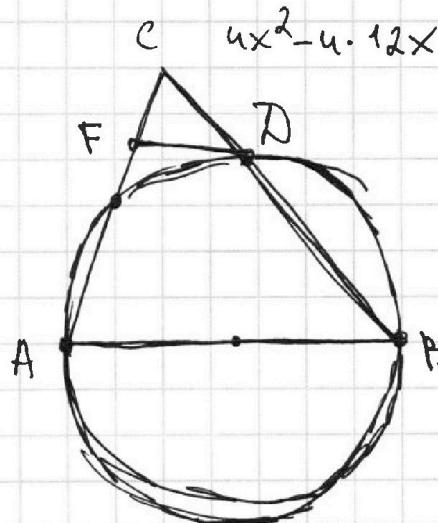
$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 1331 \\ \hline 1848 \\ 11949 \\ \hline 104811 \\ 946299 \end{array}$$



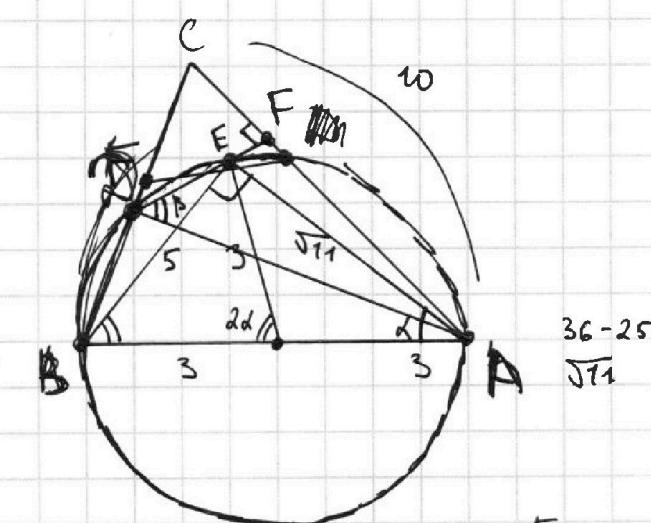
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 - 12x - 1 = 0$$

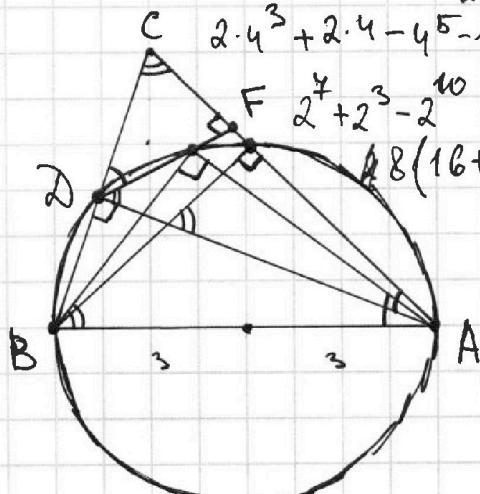


$$6 = 2R = \frac{5}{\sin \alpha}$$

$$\begin{aligned} 25 &= 9 + 9 - 2 \cdot \cos 2\alpha \cdot 9 \\ 25 &= 18(1 - 2 \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{6}$$

$$2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^5 - 1 - 2 \cos 2\alpha = \frac{4}{18}$$



$$6 = \frac{\sqrt{11}}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{5}{6} \quad \frac{CF}{AC} = \frac{5}{6} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{25}{25} \quad \frac{56}{625}$$

$$+ \frac{105}{105}$$

~~$$BC = BF + FC$$~~

$$\sin \alpha = \frac{DF}{AF} = \frac{CF}{CD} = \frac{CD}{AC} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{CD}{60} = \frac{5}{6} \quad CD = \frac{50}{6} = \frac{25}{3} \quad \underline{25(36-25)}$$

$$CF \cdot 10 = \frac{25^2}{9}$$

$$CF = \frac{625}{9 \cdot 10} = \frac{225}{18 \cdot 5}$$

$$AF = 10 - \frac{625}{9 \cdot 10} = \frac{900 - 625}{90} =$$

$$g^3 = 81 \cdot 9 = 729$$

$$g \cdot g^3 = g^3 \cdot 11^3 = 1331$$

$$\frac{55}{18} = \frac{25(36-25)}{5 \cdot 18} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$\cancel{D = (a^2 - a)^2 - 4(a - 5)} = a^2(a - 1)^2 - 4a + 20 \cancel{\neq a^2(a^3 - 2a + 1) - 4a + 20} =$$

$$x_1 + x_2 = a^2 - a \quad b_5 + b_6 = b_1 + 9d = a^2 - a$$

$$x_1 \cdot x_2 = a - 5 \quad (b_1 + 4d)(b_1 + 5d) = b_1^2 + 9b_1d + 20d^2 = a - 5$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \quad \begin{matrix} 12 \\ -1 \end{matrix}$$

$$x_1 + x_2 = b_3 + b_8 = 2b_1 + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$x_1 \cdot x_2 = (b_1 + 2d)(b_1 + 7d) = b_1^2 + 9b_1d + 14d^2 = a - 5 \dots$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a(a - 1) < a^2(a - 1), (a - 1)(a^2 - a) = (a - 1)^2 \cdot a = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases} \quad a(a - 1) = \frac{a^2(a - 1)}{4} \quad 4a(a - 1) - a^2(a - 1) = 0$$

$$2b_1 + 9d = a^2 - a$$

$$a(a - 1)(4 - a) = 0$$

$$b_1^2 + 9b_1d + 20d^2 = a - 5 \quad \frac{111}{3} =$$

$$b_1^2 + 9b_1d + 44d^2 = \underline{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4} \quad 37 \cdot 3 = 90 + 21$$

$$cd^2 = a - 5 - \underline{\frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}} \quad 24d^2 = -(\dots)$$

$$cd^2 = \underline{\frac{4a - 20 - 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}}$$

$$24d^2 = -\left(a^6 + 2a^4 - 2a^2 - 4a + 24\right) \quad 3) 24d^2 = -44 + 2$$

$$1) a=0 \quad d = \pm 1$$

$$-32 - 16 = -48$$

$$2) a=1 \quad 24d^2 = -(1 + 2 - 2 - 4 + 24) = -21 \times$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3y + 3z = xy + yz + xz \\
 & \cancel{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6x + 6y + 6z} \quad \cancel{x^2 + y^2 + z^2} = (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + xz) \\
 & \boxed{x+y+z+3=0} \quad \begin{matrix} a = b^2 - 2c \\ a + 3b = c \\ b = -3 \end{matrix} \\
 & z+3 = -(x+y), y+3 = -(x+z), x+3 = -(y+z) \\
 & (z+3)^2 + (x+3)^2 + (y+3)^2 = (x+y)^2 + x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 = \\
 & = 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 6x + 6y + 18 \quad 4x^2 - 12x \\
 & (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 = 2(y^2 + x^2 + z^2) + xy + yz + xz = \\
 & = 2(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3(x+y+z)) = \boxed{482 - 988} \\
 & = 4x^2 + 6x + \dots - 2x(2x+3) - 2y(2y+3) \quad 2 \cdot 64 = 128 \\
 & (y+x+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \\
 & \textcircled{=} 2((y+x+z)^2 - (xy + yz + xz)) = 2 \cdot 9 = 18 \\
 & xy + yz + xz = 3(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 \quad \begin{matrix} 11 \dots 11^2 = \\ 1111 \dots 1 \\ 11 \dots 1 \end{matrix} \\
 & \textcircled{=} 2(2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(x+y+z)) \quad \text{к.т.} \\
 & a = b^2 - 2c \quad b^2 - 2c = c - 3b \quad \begin{matrix} 1 \dots 1 \\ 1111 \dots 1 \\ 11 \dots 1 \end{matrix} \\
 & a = c - 3b \quad 9 - 9 = 3c = 0 \quad \frac{1}{4320984654321} \\
 & 5: \frac{\binom{n}{n-3} \cdot \cancel{5}}{\binom{5}{n}} = \frac{(n-3)! \cdot (n-5)! \cdot 5!}{2! \cdot (n-3-2)! \cdot n!} = \frac{5!}{2! \cdot (n-2)(n-1) \cdot n} = \frac{(n-3)! \cdot 5!}{2 \cdot n!} \\
 & 6: \frac{\binom{3}{n-3}}{\binom{6}{n}} = \frac{(n-3)! \cdot (n-6)! \cdot 6!}{3! \cdot (n-6-3)! \cdot n!} = \frac{(n-3)! \cdot 5!}{n!} \quad \frac{(n-3)! \cdot 5! \cdot 2 \cdot n!}{5! \cdot (n-3)! \cdot 5!} = 2
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| \begin{array}{l} xy = z(z+3) \\ yz = x(3+x) \\ xz = y(y+z) \end{array} \right. \quad \begin{aligned} xy - yz &= z^2 + 3z - x^2 - 3x \\ y(x-z) &= (z-x)(z+x) + 3(z-x) \\ (x-z)(y+z+x+3) &= 0 \end{aligned}$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = \frac{(yz)^2}{x^2} + \frac{(zx)^2}{y^2} + \frac{(xy)^2}{z^2} =$$

$$= \frac{(yz)^4 + (zx)^4 + (xy)^4}{(xyz)^2} = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc} = \frac{x^4(x+3)^4 + y^4(y+3)^4 + z^4(z+3)^4}{x+y+z+3} = 0$$

$$n = \underbrace{99\dots99}_{\text{60000}} = 9 \underbrace{111\dots11}_{\text{60000}}$$

$$11^3 = 121 \cdot 11 = 13$$

$$\begin{array}{r} \times 121 \\ \hline 11 \\ + 121 \\ \hline 1331 \\ \times 11 \\ \hline 111 \\ + 111 \\ \hline 12321 \\ \times 111 \\ \hline 12321 \\ + 12321 \\ \hline 1364631 \end{array}$$

$$x = z + y$$

$$4^2 + 1 + 1 = 18.$$

~~$$2x + y + 3 = 0$$~~

~~$$2x + y + 3 = -2x$$~~

$$2(x+3)^2 + (-2x)^2 = 2x^2 + 12x + 18 + 4x^2 = 6(x^2 + 2x + 3)$$

$$4z^2 = z^2 + 3z$$

$$x = y \neq z \quad 3z(z-1) = 0$$

$$x^2 = z^2 + 3z \quad z = 1$$

$$xz = x^2 + 3x \quad x = -2$$

~~$$xz = x^2 + 3x$$~~

$$xz - 3x = z^2 + 3z$$

$$z(x-z) - \frac{x}{z} = \frac{-x}{x+z}$$

$$x(z-x) = 3x \quad -xz = x^2 + xz$$

$$(x-z)(x+z) = 3z \quad -z = x+z$$

$$1) \quad x+y+z+3 = 0$$

$$2) \quad x = z = y$$

$$z + 3 = -(x+y)$$

$$z = -(x+y+3)$$

$$xy = (x+y+3)(x+y)$$

~~$$xy = x^2 + xy + x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y$$~~

$$x(x+y) + 3(x+y) + y^2$$

$$x^2 = x^2 + 3x$$

~~$$x = 0$$~~

$$xz - 3x = z^2 + 3z$$

$$z(x-z) - \frac{x}{z} = \frac{-x}{x+z}$$

$$x(z-x) = 3x \quad -xz = x^2 + xz$$

$$(x-z)(x+z) = 3z \quad -z = x+z$$