



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} xy = 3z + z^2 & 1. \\ yz = 3x + x^2 & 2. \\ xz = 3y + y^2 & 3. \end{cases}$ Решение: ① $x, y, z \neq 0$, аналогично легко заметить, что не равны -3 , иначе $\delta.о.о$ $z = -3$, тогда $xy = 0 \Rightarrow x$ или $y = 0$.

② Тогда поделю 1. на 2.

$$\frac{x}{z} = \frac{z(3+z)}{x(3+x)}$$

$$x^2(3+x) = z^2(3+z) = y^2(3+y)$$

Аналогично с $y^2(3+y)$

Кроме этого $z = \frac{xy}{3+z}$ из 1.

$$yz = 3x + x^2$$

$$\frac{y^2 x}{3+z} = x(3+x) \quad | : x \neq 0$$

$$y^2 = (3+x)(3+z) = 9 + xz + 3(x+z)$$

Аналогично $x^2 = (3+y)(3+z)$

$$z^2 = (3+x)(3+y)$$

$$\textcircled{3} (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = S$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) + 6(x+y+z) + 9 \cdot 3 = S$$

$$9 \cdot 3 + xy + yz + xz + 6(x+y+z) + 9 \cdot 3 = S$$

$$12(x+y+z) + xy + yz + xz + 2 \cdot 9 \cdot 3 = S$$

$$\textcircled{4} x^2 + y^2 + z^2 = xy - 3z + yz - 3x + xz - 3y, \quad (\text{просто выразил из 1, 2, 3.})$$

тогда $\begin{cases} 3 = xy + yz + xz + 3(x+y+z) + 9 \cdot 3 \\ S = xy + yz + xz + 12(x+y+z) + 2 \cdot 9 \cdot 3 \end{cases}$

$$9(x+y+z) = 8 \cdot 3$$

$$\textcircled{5} \text{ Тогда } (x+y+z)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 9$$

$$3(xy + yz + xz) - 3(x+y+z) = 9$$

$$3(xy + yz + xz) = 9 + 3 \cdot 3 = 18$$

$$xy + yz + xz = 6.$$

$$\textcircled{6} \text{ Тогда вычислю } S = 12(x+y+z) + (xy + yz + xz) + 2 \cdot 9 \cdot 3 =$$

$$= 12 \cdot 3 + 6 + 54 = 36 + 60 = 96, \text{ понятно, что другим } S \text{ быть не может.}$$

Ответ: 96.

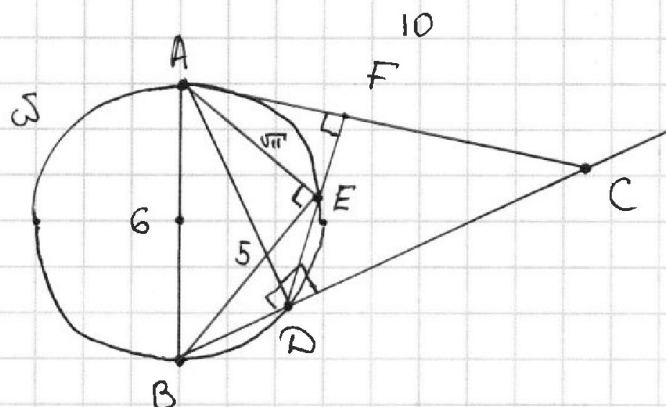


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение: ① Проведем AD и AE , заметим, что т.к. AB диаметр окр. ω , то по св-ву диаметра $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$, значит $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ как смежные

② Рассмотрим $\triangle DAC$, $\angle ADC = 90^\circ$, DF - высота из прямого угла. Используем св-во такого треугольника, а именно $AC \cdot AF = AD^2$

В частности оно следует из подобия $\triangle ADC$ и $\triangle ADF$, т.к. оба прямоугольные и имеют общий угол $\angle DAF \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AD}$, а это то, что и требуется.

③ Рассм. $\triangle AEB$. $\angle AEB = 90^\circ$, запишем т. Пифагора: $AB^2 = BE^2 + AE^2$, т.к. $AE > 0$, то $AE = \sqrt{36 - 27} = \sqrt{9}$;

④ четырехугол. $ABDE$ впис. в ω , з.к. $\angle AEF = \angle ABD \Rightarrow$ т.к. $\angle ADB = \angle AFE = 90^\circ$, то $\triangle ADB \sim \triangle AFE \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{6}{\sqrt{11}} \Rightarrow AD = \frac{6AF}{\sqrt{11}}$

⑤ Подставлю в формулу из п.2, получу $AC \cdot AF = \frac{36AF^2}{11}$, $AF \neq 0 \Rightarrow$ поделим на него

$$AC = \frac{36}{11}AF, AC = 10$$

$$10 \cdot 11 = 36AF \Rightarrow AF = \frac{10 \cdot 11}{36} = \frac{55}{18}$$

Ответ: $\frac{55}{18}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: ① Пусть всего было x коробок.

② Посчитаем вероятность выигрыша игрока, когда ему разрешается открыть 5 коробок. Назову эту вероятность P_1 , тогда

$$P_1 = \frac{S_x}{S_6}, \text{ где } S_x - \text{выигр кол-во выигрышных эл-ментов событий, а} \\ S_6 - \text{количество всех событий.}$$

Тогда $S_x = C_{(x-3)}^2$, так как в "хорошем" исходе (ком. выигрыш.)

выбор содержит три коробки с шариками и содержит любые две другие различные коробки, а $S_6 = C_x^5$, т.е. выбрать 5 различ. любых коробок из общ. кол-ва и есть количество всех событий выбора игрока.

$$\text{Тогда } P_1 = \frac{C_{(x-3)}^2}{C_x^5} = \frac{(x-3)(x-4) \cdot 5!}{2 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{x(x-1)(x-2)}$$

③ Аналогично посчитаем P_2 - вер-ть выигрыша, когда игрок открывает 6 коробок.

В данном случае $P_2 = \frac{S'_x}{S'_6}$ (обозначения такие, только со штрихом),

тогда $S'_x = C_{(x-3)}^3$, т.к. кроме этих шар. выбран еще 3 любых др. различ.

$S'_6 = C_x^6$, т.е. в это раз выбраны 6 различ. любых.

$$\text{Тогда } P_2 = \frac{C_{(x-3)}^3}{C_x^6} = \frac{(x-3)(x-4)(x-5) \cdot 6!}{3! \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{x(x-1)(x-2)}$$

$$\text{④ По усл. нужно найти отношение } \frac{P_2}{P_1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot x(x+1)(x-2)}{x(x+1)(x-2) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{6}{3} = 2,$$

это и будет ответом, т.е. требуется найти во сколько раз увели. вероятность выигрыша.

Ответ: 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III $a=4$

$$\begin{cases} x^2 - (16-4)x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - (64-16)x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0 \quad \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 12x - 1 = 0 \quad \textcircled{*} \end{cases}$$

$$x_3 = 6 + 5\sqrt{37}$$

$$x_4 = 6 - 5\sqrt{37}$$

Итого $x_1 = 6 + \sqrt{37}$

$$x_2 = 6 - \sqrt{37}$$

$$x_3 = 6 + 5\sqrt{37}$$

$$x_4 = 6 - 5\sqrt{37}$$

$$\textcircled{2} \quad 4x^2 - 48x + 4^4 + 2 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0 \quad :4$$

$$x^2 - 12x + 64 \cdot 2 + 8 - 4^5 - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x - 64(16-2) + 7 = 0$$

$$x^2 - 12x - 64 \cdot 14 + 7 = 0$$

$$D_1 = 36 + 64 \cdot 14 - 4 = 925 = 5^2 \cdot 37$$

$$x_3 = 6 + 5\sqrt{37}$$

$$x_4 = 6 - 5\sqrt{37}$$

$$\textcircled{*} \quad x^2 - 12x - 1$$

$$D_1 = 36 + 4 = 40$$

$$x = \frac{6 + \sqrt{37}}{1} = 6 + \sqrt{37}$$

$$x = 6 - \sqrt{37}$$

Аналогично расположу:

$$\begin{matrix} 3\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \\ 6 - 5\sqrt{37}; & 6 - \sqrt{37}; & 6 + \sqrt{37}; & 6 + 5\sqrt{37} \end{matrix}$$

Пусть b_i начинается с $b = 6 - 9\sqrt{37}$, а $d = 2\sqrt{37}$,

тогда $3\sqrt{2}$ член. $6 - 9\sqrt{37} + 4\sqrt{37} = 6 - 5\sqrt{37} = x_4$

$5\sqrt{2}$ член. $6 - 9\sqrt{37} + 14\sqrt{37} = 6 + 5\sqrt{37} = x_3$

$6\sqrt{2}$ член. $6 - 9\sqrt{37} + 8\sqrt{37} = 6 - \sqrt{37} = x_2$

$8\sqrt{2}$ член. $6 - 9\sqrt{37} + 10\sqrt{37} = 6 + \sqrt{37} = x_1$, да, это такая a

подойдет. (явно привел пример арифм. прогр.) и поставил корки при a . Ясно, что при других a не будет выполняться равенство, рассм. в $\textcircled{1.3}$, а знаем кроме проверенных, другие a подходят и не могли.

Ответ: $a=4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

Решение: (1) Пусть это непустая арифм. прогрессия $b, b+d, \dots$,

где $d \neq 0$. (2) Тогда назову b_i - i -ый член прогрессии, тогда $b_i = b_j \Leftrightarrow i = j$, т.к. $d \neq 0$, тогда назову корни 1-го ур-я x_1, x_2 , 2-го x_3, x_4 ,

тогда т.к. они различны и если D этих ур-я $\Delta > 0$ от x , тогда можно записать т. Вьетта, однако согласно условию задачи $\Delta = 0$ (можно менять $x_1 \leftrightarrow x_2, x_3 \leftrightarrow x_4$)

$$x_1 = b + 4d; x_2 = b + 5d; x_3 = b + 2d; x_4 = b + 4d;$$

Заметим, что $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, значит при существ. этих корнях по т. Вьетта коэф. при x у этих ур-я равны, где $\neq$ коэф. при x^2 .

$$(3) \text{ Тогда } a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4a = a^3 - a^2$$

Отдельно проверю $a=0$, иначе могу не а получить.

$$\begin{aligned} \text{Получу } 4a - 4 &= a^2 - a \\ a^2 - 5a + 4 &= 0 \\ D = 9 \Rightarrow a &= \frac{5 \pm 3}{2} = 4 \\ a &= \frac{5 - 3}{2} = 1 \end{aligned}$$

(4) Остаток проверить, подходит ли $a=0, a=1, a=4$.

$$\text{I } a=0 \begin{cases} x^2 = 5 & x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5} \\ 4x^2 = 4 & x_3 = 1, x_4 = -1 \end{cases}$$

Так как арифм. прогр. либо монотонно убывает (строго), либо возрастает, то x_1, x_2, x_3, x_4 в прогр. располагаются так в моменты до переворота: $-\sqrt{5}, -1, 1, \sqrt{5}$; тогда т.к. $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$ соседние (5 и 6 члены прогр.), то между ними не может быть членов прогрессии, а они есть, противоречие, значит $a=0$ не подходит.

$$\text{II } a=1 \begin{cases} x^2 = 4 & x_1 = 2, x_2 = -2 \\ 4x^2 + 2x - 1 = 0 & x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{тогда аналогично } a=0 \text{ расположи } -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2; \text{ однако } -2 \text{ и } 2 \text{ соседние члены, значит такое невозможно (т.к. между ними появились другие члены прогр.)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3.$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 & y \geq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \\ x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 & y \leq 6\sqrt{3} \left(\frac{15}{2} - x \right) \end{cases}$$

$$6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \leq y \leq 6\sqrt{3} \left(\frac{15}{2} - x \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Тогда } 2x - 15 \leq 3 \quad x \leq 9.$$

$$\Downarrow$$

$$x \leq 7,5.$$

$$x - \frac{15}{2} \leq \frac{15}{2} - x$$

$$x \leq 7,5.$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 & y \geq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \\ x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 0 & y \geq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \end{cases}$$

$$\frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3 \Rightarrow y \leq 9\sqrt{3}.$$

$$6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \leq y \leq 9\sqrt{3}$$

$$6 \left(x - \frac{15}{2} \right) \leq 9$$

$$y \geq 6x - 45$$

$$6\sqrt{3} \left(\frac{15}{2} - x \right) \leq 9\sqrt{3}$$

$$\text{Тогда } y \geq 6\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = 9\sqrt{3}, y = 9\sqrt{3},$$

$$6x - 45 \leq 9$$

$$6x \leq 9 + 45$$

$$x \leq 9$$

$$\text{Зн. тут только точка } (9, 9\sqrt{3})$$

$$6 \left(\frac{15}{2} - x \right) \leq 9$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 0 \\ x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases}$$

$$45 - 6x \leq 9$$

$$6x \geq 45 - 9$$

$$x \geq 8 \Rightarrow x = 9.$$

$$y \geq 9\sqrt{3}$$

$$9\sqrt{3} \leq y \leq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right)$$

$$3 \leq x - \frac{15}{2}$$

$$x \geq \frac{21}{2}$$

$$\text{Зн. тут только}$$

$$\left(\frac{21}{2}, 9\sqrt{3} \right).$$

$$9\sqrt{3} \leq y \leq 6\sqrt{3} \left(\frac{15}{2} - x \right) \Rightarrow 3 \leq \frac{15}{2} - x$$

$$x \leq \frac{21}{2} \Rightarrow x = \frac{21}{2},$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{4} \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{15}{2} + \frac{4}{6\sqrt{3}} \leq 0 \\ x - \frac{15}{2} - \frac{4}{6\sqrt{3}} \leq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \leq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \\ y \geq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right), \text{ но}$$

$$-2x + 15 \leq 3$$

$$2x \geq 12$$

$$x \geq 6.$$

⑤ Замечу, что при повороте на π отн. центра координат будет просто симметрия фигуры отн. центра.



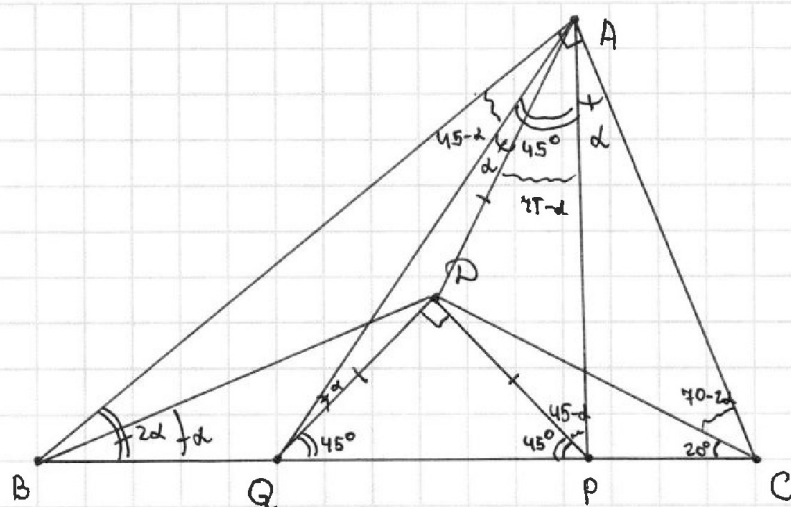
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение: ① Построю AD, BQ, AQ, AP . $DP=DQ$, з.и. т.к. $\angle PDQ=90^\circ$,
то $\angle DPQ=\angle DQP=45^\circ$. Пусть $\angle AQD=\alpha$, з.и. т.к. по усл. $CQ=AC$,
то $\triangle QCA$ равнобедр., а з.и. $\angle AQC=\angle QAC=\alpha+45^\circ$, тогда по сумме углов
в $\triangle QCA$ получим $\angle ACQ=180-\angle CQ-2\angle AQC=180-20-2(\alpha+45)=40-2\alpha$,
тогда получим $\angle ABC$ в $\triangle ABC$ ($\angle A=90^\circ$, $\angle ACB=30-2\alpha$), з.и.
 $\angle ABC=2\alpha$, тогда т.к. $AB=BP$, то $\triangle ABP$ равноб., з.и. $\angle BAP=\angle APB=$
 $=\frac{180-\angle ABP}{2}=90-\alpha$, тогда $\angle DPA=\angle BPA-\angle DPQ=45-\alpha$,

Замечу, что т.к. $\angle BAC=90^\circ$, а $\angle QAC=\alpha+45^\circ$, то $\angle BAQ=45^\circ-\alpha$,
аналогично т.к. $\angle BAP=90-\alpha$, а $\angle BAC=90^\circ$, то $\angle PAC=\alpha$, тогда
т.к. $\angle BAQ+\angle PAC=45^\circ$, то $\angle QAP=45^\circ$.

② т.к. $DQ=DP$, то D лежит на середине к QP , рассмотрим $\angle QDP$ и
 $\angle QAP$, замечаю, что т.к. $\angle QDP=2\angle QAP$, а также D лежит на сер. пер.
к QP , то D — центр. опис. окр. $\triangle AQP$ (ну или же центр AQP лежит
на окр., постро. на QP как на диаметре т.к. $\angle QAP=45^\circ$, причем центр такой,
что равноуд. от Q и P , значит это D).

Тогда $DQ=DP=DA$ как радиусы, значит $\angle AQD=\angle QAD=\alpha$,
т.к. $\triangle QDA$ р/б ($DQ=DA$), тогда замечаю, что $\angle BQD=45^\circ$, причем
 $\angle DQP=45^\circ$, значит по призм. впис. четырехугл. $ABQD$ вписанный,
значит $\angle QAD=\angle QBQ=\alpha$

③ $\angle DAP=\angle QAP-\angle QAD=45-\alpha$, $\angle DAC=\angle DAP+\angle PAC=45+\alpha-\alpha=45^\circ$,
т.к. $\angle DAC=\angle DPQ=45^\circ$, то аналогично вышесказанному $ACPD$ вписанный четырехугл.,
Тогда $\angle DAP=\angle DCP \Rightarrow 45-\alpha=20 \Rightarrow \alpha=25^\circ$, тогда т.к. $\angle DBC=\alpha=25^\circ$, то
это и есть то, что требуется найти. Ответ: 25°



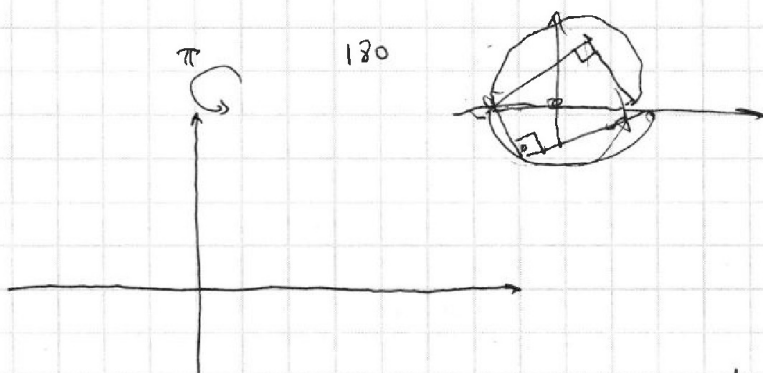
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$



$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

$$2x - 15 \leq 3$$

$$2x \leq 18$$

$$x \leq 9$$

$$\frac{2y}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$y \leq 9\sqrt{3}$$

$$3 - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$y \geq 9\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{2y}{6\sqrt{3}} &\leq 3 \\ y &\leq 9\sqrt{3} \\ x - \frac{15}{2} &\leq \frac{y}{6\sqrt{3}} \\ x - \frac{15}{2} &\leq \frac{9\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \\ x - \frac{15}{2} &\leq \frac{3}{2} \\ x &\leq 9 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$\frac{y}{6\sqrt{3}} \geq \frac{15}{2} - x$$

$$y \geq \frac{3 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 15}{2} - 6\sqrt{3}x = 6\sqrt{3} \left(\frac{15}{2} - x \right)$$

$$x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$\frac{y}{6\sqrt{3}} \leq x - \frac{15}{2}$$

$$y \leq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right)$$

$$\begin{array}{r} 1000000 \\ - 30000 \\ + \quad 300 \\ \hline 970300 \\ 970299 \end{array}$$

$$y \geq 6\sqrt{3} \left(\frac{15}{2} - x \right)$$

$$y \leq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)(a-b)(a-b)$$

$$(10^2-1)^3 = 10^6 - 1 - 3 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 =$$

$$= 10^6 - 1 - 3 \cdot 10^2 (10^2 - 1)$$

$$\begin{array}{r} 999999 \\ 29700 \\ \hline 970299 \\ 881 \\ \hline 792 \end{array}$$

$$981 \overline{) 99}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 94 \\ 9 \\ \hline 891 \end{array}$$

$$98$$

$$\begin{array}{r} 9 \dots 9 \\ 29700 \\ 482 \overline{) 99} \\ 693 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 3 \\ \hline 27 \\ 27 \\ \hline 294 \\ 7 \\ \hline 89 \\ 8 \\ \hline 792 \end{array}$$

$$181$$

$$(100-)$$

$$\begin{array}{r} 999999 \\ 30000 \\ \hline 969999 \\ 300 \\ \hline 970299 \\ 970298 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 991 \\ 10801 \\ \hline 99 \\ 97208 \\ 97208 \\ \hline 1069298 \\ 98 \\ \hline 782 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(10^4 \cdot 10^4 - 1)^3 = 10^4 \cdot 10^4 \cdot 3 - 3 \cdot 10^4 \cdot 10^4 \cdot 2 + 3 \cdot 10^4 \cdot 10^4 - 1$$

$$\begin{array}{r} 1000 \overline{) \dots 00} \\ \underline{2+} \\ 2+ \\ \underline{+} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1000 \overline{) \dots 00} \\ \underline{+} \\ 1000 \overline{) \dots 00} \\ \underline{+} \\ 1000 \overline{) \dots 00} \\ \underline{+} \\ 1000 \overline{) \dots 00} \end{array}$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq 2 \sqrt{\frac{(xy)^2}{4}} = xy$$

$$3(x+y+z) = 0$$

$$x+y+z = 0$$

$$x^2 + y^2 = 3(x+y+z)$$

$$-1 = 3i^2 - 1$$

$$i \cdot i = -1 \quad i^2$$

$$i^2 + i^2 = -2 \geq -1$$

$$\begin{array}{r} 80000 \\ \underline{1} \\ 79999 \end{array}$$

$$xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z)$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq 2 \sqrt{\frac{(xy)^2}{4}} = xy$$

$$\geq 2\sqrt{\dots}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^k + k + \left(\frac{y}{x}\right)^k =$$

$$\text{Значит, } x+y+z=0, \text{ иными } x=y=z$$

$$x^2 = 3x + x^2$$

$$\frac{4}{2} + \frac{8}{2} \geq 6$$

$$\frac{4}{2} + \frac{8}{2} \geq 6$$

$$(2+3) = \frac{xy}{z} = K \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 \right)$$

$$\left(\frac{xy}{z} \right)^2 + \left(\frac{yz}{x} \right)^2 + \left(\frac{xz}{y} \right)^2 = \left(\frac{x^2 + y^2}{yz} \right)^2$$

$$(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4 \geq 3\sqrt{\dots}$$

$$x^2(3+y)^2 = y^2(3+y)^2 = \frac{(xyz)^2}{(3+x)^2}$$

$$x^2(3+x) = y^2(3+y)$$

$$x^2 = (3+y)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy = 3z + z^2$$

$$yz = 3x + x^2$$

$y \neq 0$

$$xy = z(3+z)$$

$$yz = x(3+x)$$

$$zx = y(3+y)$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 =$$

$$= \frac{(xy)^2}{z^2} + \frac{(yz)^2}{x^2} + \frac{(zx)^2}{y^2} =$$

$$= \frac{(xy)^4 + (yz)^4 + (zx)^4}{(xyz)^2} =$$

$$= \frac{8}{x^2} = 1.$$

$$\frac{x}{z} = \frac{z}{x} \left(\frac{3+z}{3+x} \right)$$

$$x^2 = z^2 \frac{(3+z)}{(3+x)}$$

$$(3+x)x^2 = z^2(3+z)$$

$$(3+x)x^2 = y^2(3+y)$$

$$\frac{3+x}{3+z} = \left(\frac{z}{x}\right)^2$$

$$\geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$$

N 2

$$\underbrace{9 \dots 9}_{4 \cdot 10^4}$$

n^3

$$9^3 = 729$$

$$\frac{81}{729}$$

$$\frac{3+x}{3+y} = \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

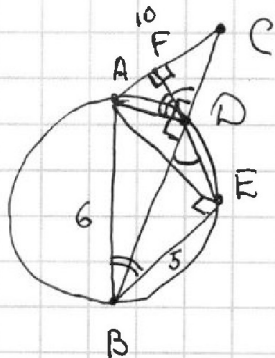
$$\frac{3+x}{3+z} = \left(\frac{z}{x}\right)^2$$

$$999 \quad 1000$$

$$\frac{kx^2}{z^2}$$

$$((10)^{40000} - 1)^3 = 10^{3+} - 3 \cdot 10^{2+} + 3 \cdot 10^{1+} - 1 = (10^{3+} - 1) + 3 \cdot 10^{1+} (1 - 10^{+})$$

N 3



$$\frac{36}{25} \cdot \frac{11}{11}$$

$$\sqrt{11}$$

$$AC \cdot AF = AD^2$$

$$\sqrt{10AF} = AD$$

$$\frac{AD}{5} = \frac{AF}{\sqrt{11}}$$

$$\frac{\sqrt{10AF}}{5} = \frac{AF}{\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{110} \cdot \sqrt{AF} = 5AF$$

$$110 \cdot AF = 25AF^2$$

$$22AF = 5AF^2$$

$$AF = \frac{22}{5}$$

$$\left(\frac{kx^2}{z^2}\right)^2 + k^2 +$$

$$(3+x)x^2 = y^2(3+y) = z^2(3+z)$$

$$xyz = x^2(3+x)$$

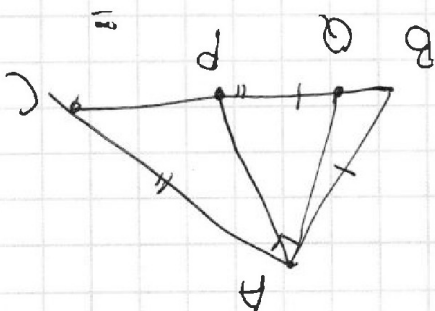
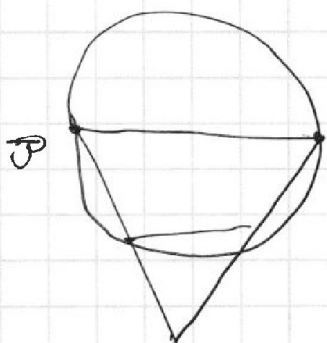
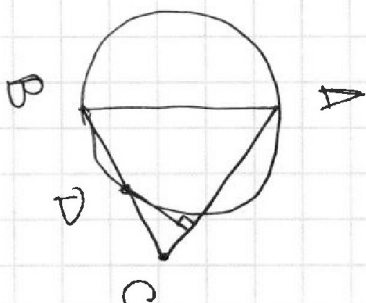
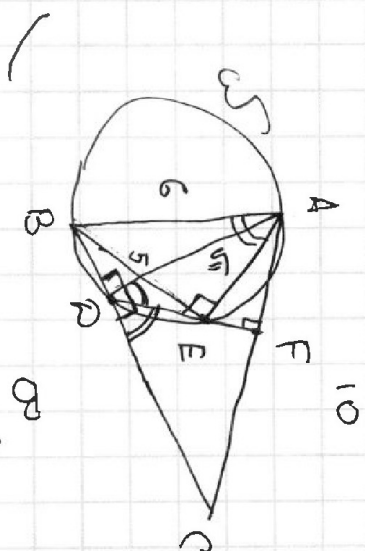
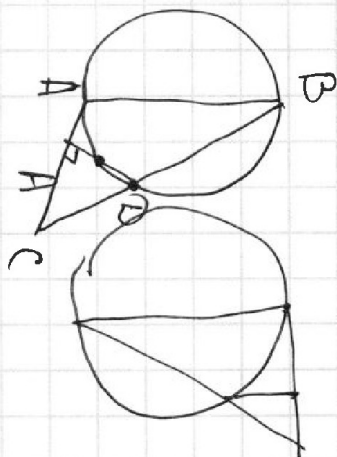
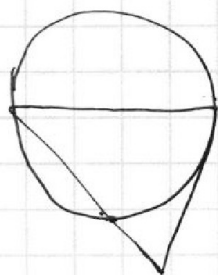


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$(x-3)(x-4) \cdot 5!$$

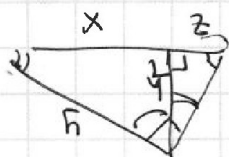
$$2! (x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) =$$

$$= (x-3)$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$y^2 = x(x+2)$$

$$\frac{y}{x+2} = \frac{x}{y}$$



$$(x-3)(x-4)(x-5) \cdot 6!$$

$$3! (x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) =$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{x(x-1)(x-2)}$$

$$10 = \frac{36}{11} AF$$

$$\frac{10 \cdot 11}{36} = AF$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 2$$

$$\frac{36}{11} \cdot \frac{5}{13} =$$

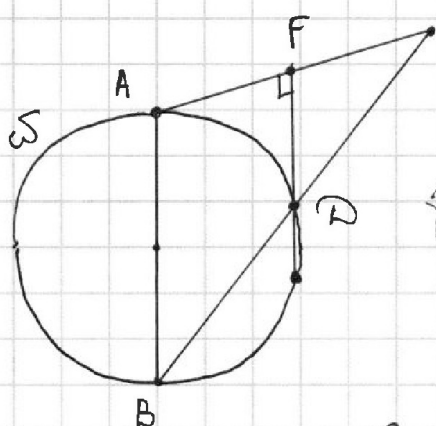


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

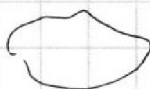
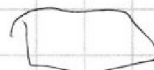
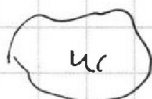
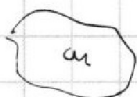
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№4

х коробок.



$$C_2^{(x-3)}$$

$$C_5^{(x-3)}$$

$$\frac{C_2^{(x-3)}}{C_5^{(x-3)}} = P_3$$

$$\frac{(x-3)(x-4) \cdot 2!}{2! \cdot (x-3)(x-4)} = \frac{(x-5)(x-6)(x-7)}{5 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{(x-5)(x-6)(x-7)}$$

$$2\alpha + 90 + 20 + \alpha = 180$$

$$\alpha + 2\alpha = 70$$

$$\alpha = 70 - 2\alpha$$

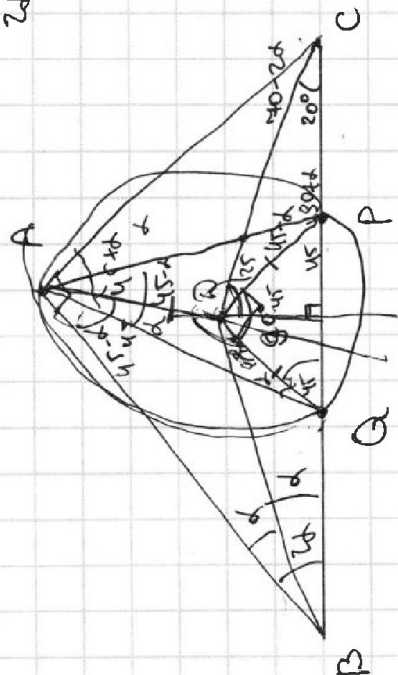
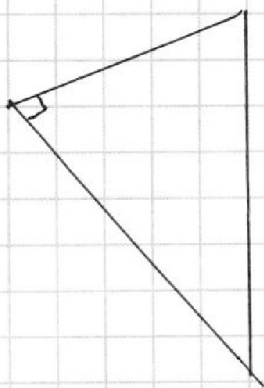
$$90 - \alpha = 110$$

$$\frac{45}{155}$$

$$90 - 2\alpha + 40 + 20 + \alpha = 360$$

$$\frac{C_3^{(x-3)}}{C_6^{(x-3)}} = P_2$$

$$P_2 = \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{3!} = \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(x-6)(x-7)(x-8)} = \frac{6!}{3! \cdot (x-6)(x-7)(x-8)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{(x-6)(x-7)(x-8)}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy = z(3+z)$$

$$yz = x(3+x)$$

$$zx = y(3+y)$$

$$z = \frac{xy}{3+z}$$

~~z~~

$$\frac{x}{z} = \frac{z}{x} \frac{(3+z)}{(3+x)}$$

$$x^2 = z^2 \left(\frac{3+z}{3+x} \right)$$

$$(3+x)x^2 = z^2(3+z) =$$

$$= (y+3)y^2$$

$$\frac{y^2}{(3+z)} = x(3+x)$$

$$y^2 = (3+x)(3+z)$$

$$z = \frac{xy}{3+z}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{3+z}{x}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{z}{y} \frac{(3+z)}{(3+y)}$$

$$yz = \frac{y^2 x}{3+z} = x(3+x)$$

$$y^2 = (3+x)(3+z)$$

$$(3+x)x^2 = y^2(3+y)$$

$$x^2(3+x) = (3+x)(3+z)(3+y)$$

$$z^2 = (3+x)(3+y)$$

$$(3+x)(x+3)^2 =$$

$$= x^2 + 6x + 9 = (3+z)(3+y) + 6\sqrt{(3+z)(3+y)} + 9$$

$$xy + yz + xz - 6(x+y+z) = 5$$

$$3+z = \frac{xy}{z}$$

$$\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{x} = x^2$$

$$6(x+y+z) + (x^2 + y^2 + z^2) + 9 \cdot 3 = 5$$

$$3(x+y+z) + xy + yz + zx + 9 \cdot 3 = 5$$

$$2(xy + yz + zx) = 6(x+y+z) + 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) + 9 \cdot 3 = 5$$

$$3 \cdot 9 + xz + 6(x+y+z) + yz + xz$$

