



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 10^{25000} - 1 \Rightarrow n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = (10^{25000} - 1)(10^{25000})^2 + 10^{25000} + 1 = n \cdot 10^{50000} + n \cdot 10^{25000} + n =$$

$= m = \underbrace{999 \dots 999}_{25000 \cdot 3 \text{ девяток}}$ $25000 \cdot 3 = 75000 \text{ девяток}$

Ответ: 75000



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ **1**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

обозначим $\angle ACB$ как α . тогда $\angle CDF = 90^\circ - \alpha$. Заметим, что AB - диаметр ω ; 1) лежит на $\omega \Rightarrow \angle ADB = 90^\circ = 180^\circ - \angle CDA \Rightarrow \angle CDA = 90^\circ \Rightarrow \angle FDA + \angle CDF = 90^\circ \Rightarrow \angle FDA = \angle EDA = \alpha$. Тогда $\triangle FCD \sim \triangle DCA \sim \triangle FDA$ (где $\sim$ - подобен). Заметим, что $\angle EDA$ опирается на дугу AE и окружности ω и лежит в одной полуокружности с $\angle ABE$ относительно прямой AE ($\angle ABE$ тоже опирается на дугу AE и в лежит на ω) $\Rightarrow \angle EDA = \angle EBA = \alpha \Rightarrow \triangle EBA \sim \triangle DCA \Rightarrow AC:CD = AB:DE \Rightarrow 20:CD = 15:10 \Rightarrow CD = \frac{20 \cdot 10}{15} = \frac{40}{3}$. Заметим, что $\triangle EBA \sim \triangle FCD \Rightarrow FC:CD = EB:AB \Rightarrow FC:\frac{40}{3} = 10:15 \Rightarrow FC = \frac{80}{9} \Rightarrow AC - FC = 20 - \frac{80}{9} = \frac{100}{9} = AF$
 $\Rightarrow AF = 11\frac{1}{9}$

Ответ: $AF = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего способов положить 3 маршала в n коробок = $\frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!}$

Всего способов положить 3 маршала в n коробок так, что они окажутся в 5 выделенных = всего способов положить 3 маршала в 5 коробок = $\frac{5!}{2! \cdot 3!}$

Всего способов положить 3 маршала в n коробок так, что все они окажутся в 8 выделенных = всего способов положить 3 маршала в 8

коробок = $\frac{8!}{5! \cdot 3!} \Rightarrow$ без учета вероятности выигрывает = $\frac{5! \cdot (n-5)! \cdot 3!}{2! \cdot 3! \cdot n!}$

Если учесть, что вероятность выигрывает = $\frac{8! \cdot (n-5)! \cdot 3!}{5! \cdot 3! \cdot n!}$, тогда

вероятность увеличилась и $\frac{\frac{8! \cdot (n-5)! \cdot 3!}{5! \cdot 3! \cdot n!}}{\frac{5! \cdot (n-5)! \cdot 3!}{2! \cdot 3! \cdot n!}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 2,8$ раз

Ответ: в 2,8 раз = в $\frac{14}{5}$ раз

$(x! = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что n -ый член арифметической прогрессии = $(n-1)$ -ый член арифмет. прогрессии + b , где b — шаг прогрессии $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если x_{11} и x_{12} корни 1-ого уравнения, а x_{21} и x_{22} — корни 2-ого уравнения, ~~$x_{11} + x_{12}$~~ $x_{11} = x_{21} + 2b$; $x_{12} = x_{21} + 3b$; $x_{22} = x_{21} + 5b \Rightarrow x_{11} + x_{12} = x_{21} + x_{22} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x_{11} + x_{12} = -\frac{b}{a}) \quad a^2 - a = \frac{a^2 - a^2}{2} \Rightarrow 2 \cdot a \cdot (a-1) = a^2(a-1) \Rightarrow a \in \{0; 1; 2\}$

Ответ: 0; 1; 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что фигура Φ - прямоугольник с вершинами
в координатах $(-18\sqrt{3}; 18); (18\sqrt{3}; 18); (18\sqrt{3}; 12); (-18\sqrt{3}; 12) \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ при повороте на π отрезок с концами $(0; 12); (18\sqrt{3}; 18)$
перекрест площадь $\frac{\pi \cdot 36^2 - \pi \cdot 12^2}{2} = \pi \cdot 6 \cdot (9 - 1) = 48\pi$, а остальная
часть квадрата перекрест (заметим, что это $\uparrow$) площадь квадрата
квадрата $= 36\sqrt{3} \cdot 6 = 216\sqrt{3}$ и тогда: $48\pi + 216\sqrt{3}$

Ответ: $48\pi + 216\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что ~~каждый из~~ ^(продолжением треугольника) для любого $\triangle XYZ$ верно, что если из вершины биссектриса OM стороны YZ делит $\angle XOY = \frac{\angle YXZ}{2}$, то $X'M = XM$, т.к. $\triangle XOY = \triangle X'OY$ по 2-ому признаку равенства треугольников. Заметим, что верно и обратное, если отложить $X'M = XM$ на ^{биссектрисе} стороне YZ и отложить угол $\frac{\angle YXZ}{2}$ от отрезка $X'M$ в точке X' и пересек с биссектрисой угла $\angle XYZ$, то мы найдем точку пересечения биссектрис. Заметим, что это верно и для сторон XZ и угла $\angle YZX$ (заметим стороны XY на XZ и заметим $\angle XZY$ на $\angle XZY$) $\Rightarrow$ если ~~отложить~~ пересек ~~угол~~ ^{лучи} PM и QD соответственно $\Rightarrow D$ - центр вписанной окружности $\Rightarrow BD$ и CD - биссектрисы $\Rightarrow \angle CBD = \angle DBA = 35^\circ \Rightarrow \angle ABC = 70^\circ \Rightarrow \angle BCA = (90^\circ - 90^\circ - 70^\circ) = 20^\circ$; $\angle BCD = \angle DCA = 20^\circ : 2 = 10^\circ$

Ответ: 10°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 + z^2$$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = \left(\frac{x^2}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{y}\right) + \left(\frac{z^2}{z}\right) =$$

$$-2x + x\sqrt{4+xz} = z^2 + 4z \Rightarrow z^2 + 4z + 2x = x\sqrt{4+xz}$$

федо
h n kop
h n
(n-3)! 3!

$$\frac{xy(2+4)}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

$$0 = x^2 + 4x + yz \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4yz}}{2} = -2 \pm \sqrt{4 + yz}$$

$$0 = y^2 + 4y + xz \Rightarrow y = -2 \pm \sqrt{4 + xz}$$

$$-2y - y\sqrt{4 + yz} = z^2 + 4z$$

$$-2y + y\sqrt{4 + yz} = z^2 + 4z$$

$$00000 = 1$$

$$000000 =$$

$$z^2 - 4z - 16$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 64}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{80}}{2} =$$

$$= 2 \pm 2\sqrt{5}$$

$$z^2 + 4z + 2y\sqrt{4 + yz} = 0$$

$$z^2 + 4z + 2y = y\sqrt{4 + yz}$$

~~z~~

$$\frac{8! \cdot 2! \cdot 3!}{5! \cdot 1! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{14}{5} = 2.8$$

$$z^4 + 16z^2 + 8z^2 + 4yz^2 + 16yz = 16yz + yz$$

$$z^3 + 16z + 8z^2 + 4yz + 16yz + y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-4z - 16 \pm \sqrt{16z^2 + 128z + 256 - 64z - 32z^2}}{-2} =$$

$$z^3 + 8z^2 + 16z^2 + 4yz^2 + 16yz - 4y^2 + y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$y = -2z - 8 \pm \sqrt{64 + 96z - 4z^2} \Rightarrow y = -2z - 8 \pm 2\sqrt{-z^2 + 4z + 16} =$$

$$= -2z - 8 \pm 2\sqrt{-z^2 + 4z + 16}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мерзляк

$x^2 + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - \frac{4}{3}}}{2}$

$2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -2$

$x = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2} = \pm 2$

4 мм

$1,5 \text{ мм}$

$y - x^2$

$\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

$x^2 - (4-2)x + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - \frac{8}{3}}}{2} = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

$PC:CD = CD:AD = ED:AB = 10:15$

$CO = \frac{10 \cdot 20}{15} = \frac{40}{3}$

$\frac{a^2 - a}{2} = \frac{a^3 - a^2}{2}$

$a = 2$

$2 \cdot a(a-1) = a^2(a-1)$

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$

$i\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{2}$

$-\sqrt{2} + i\sqrt{\frac{2}{3}}$

180

$\sqrt{2}, i\sqrt{\frac{2}{3}}, -i\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{2}$

$i\sqrt{\frac{2}{3}}, -i\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

$PC \quad x^2 + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = \pm i\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$2x^2 - 2 - 8 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow 5b = \pm$

$FC = \frac{40}{3} \cdot \frac{10}{15} = \frac{40}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{80}{9}$

$5b = +18; b = +i\sqrt{\frac{8}{3}}$

$x^2 - 2x + 0 = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

$2x^2 - 4x - (28 + 16 + 4) = 0 \Rightarrow$