



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 7

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В теленгрире ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leqslant 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 10^{25000} - 1 \Rightarrow n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = (10^{25000} - 1)(10^{25000})^2 + 10^{25000} + 1 = n \cdot 10^{75000} + n \cdot 10^{25000} + n = \\ = \underbrace{n}_{25000 \text{ единиц}} \cdot 3 \text{ единиц} = 25000 \cdot 3 = 75000 \text{ единиц}$$

Ответ: 75 000



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

обозначим $\angle ACB$ как α . тогда $\angle CDF = 90^\circ - \alpha$. Заметим, что ΔABC -треугольник ω ; \Rightarrow лемма для $\omega \Rightarrow \angle ADB = 90^\circ = 180^\circ - \angle ADC \Rightarrow \angle CDA = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle FDA + \angle CDF = 90^\circ \Rightarrow \angle FDA = \angle EDA = \alpha$. Тогда $\Delta FCD \sim \Delta DCA \sim \Delta FDA$ (где \sim -подобен). Заметим, что $\angle EDA$ отражена на дугу AE и окружности ω и лежит в другой полуплоскости с $\angle ABE$ отраженной на дуге AE (вместе отражены на дугу AE и в линии на ω) $\Rightarrow \angle EDA = \angle EBA = \alpha \Rightarrow \Delta EBA \sim \Delta DCA \Rightarrow AC : CD = AB : DE \Rightarrow 20 : CD = 15 : 10 \Rightarrow CD = \frac{20 \cdot 10}{15} = \frac{40}{3}$. Заметим, что $\Delta EBA \sim \Delta FCD \Rightarrow \Delta FCD : \Delta EBA = FC : EB = 10 : 15 \Rightarrow FC = \frac{10}{3} \Rightarrow AC - FC = 20 - \frac{80}{9} = \frac{100}{9} = AF$
 $\Rightarrow AF = 11\frac{1}{9}$
Ответ: $AF = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего способов наложить 3 марки в 1 коробке = $\frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!}$

всего способов наложить 3 марки в 5 коробок так, что они **окажутся** в 5 конвертиках = всего способов наложить 3 марки в 5 коробок = $\frac{5!}{2! \cdot 3!}$

всего способов наложить 3 марки в 8 коробок так, что все они **окажутся** в 8 конвертиках = всего способов наложить 3 марки в 8

коробок = $\frac{8!}{5! \cdot 3!} \Rightarrow$ Так из нач. вероятности конвертина = $\frac{5! \cdot (n-3)! \cdot 3!}{2! \cdot 3! \cdot n!}$

Нач. изначальный шанс, вероятность конвертина = $\frac{8! \cdot (n-3)! \cdot 3!}{5! \cdot 3! \cdot n!}$, когда

вероятность увеличилась в $\frac{\frac{8! \cdot 8! \cdot 3!}{5! \cdot (n-3)! \cdot 3!}}{\frac{5! \cdot (n-3)! \cdot 3!}{2! \cdot 3! \cdot n!}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 2,8$ раз

Ответ: 82,8 раз = $8 \frac{14}{5}$ раз

$$(x!) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что n -ый член арифметической прогрессии = $(n-1)$ -ый член арифмет. прогрессии + b , где b - шаг прогрессии \Rightarrow

\Rightarrow если x_{11} и x_{12} - корни 1-го уравнения, а x_{21} и x_{22} - корни 2-го уравнения, ~~$x_{11}+x_{12}$~~ $x_{11}=x_{21}+2b$; $x_{12}=x_{21}+3b$; $x_{22}=x_{21}+5b \Rightarrow x_{11}+x_{12}=x_{21}+x_{22} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x_1+x_2=-\frac{b}{a}) a^2-a=\frac{a^2-a^2}{2} \Rightarrow 2 \cdot a \cdot (a-1)=a^2(a-1) \Rightarrow a \in \{0; 1; 2\}$

Ответ: 0; 1; 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Установим, что фигура Φ - многоугольник с вершинами в координатах $(-18\sqrt{3}; 18)$; $(18\sqrt{3}; 18)$; $(18\sqrt{3}; 12)$; $(-18\sqrt{3}; 12)$ \Rightarrow
 \Rightarrow при изображении мы имеем отсекок с верн. коорд. $(0; 12)$; $(18\sqrt{3}; 18)$
Площадь трапеции $\frac{\pi \cdot 36^2 - \pi \cdot 12^2}{2} = \pi(6 + 9 - 1) = 48\pi$, а оставшаяся
часть квадрата пересчитан (из шаблонов этого ↑) получила площадь
квадрата $= 36\sqrt{3} \cdot 6 = 216\sqrt{3}$ и тогда: $48\pi + 216\sqrt{3}$

Ответ: $48\pi + 216\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>					
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------------------

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача, что ~~угол между~~ ^{направлениями проекций} ~~угол между~~ ΔXYZ верно,
~~занесено~~
 что $\sin \alpha$ ^{угла между} ~~углом~~ ΔXYZ и $\Delta XY'$ равны $\angle OXY = \frac{\angle YXZ}{2}$,
 $= \frac{\angle YXZ}{2}$, но $X'Y = XY$, т.к. $\Delta XYO = \Delta X'YO$ по 2-ому признаку равенства
 гипотенуз и катетов, Задача, что ΔXYZ и $\Delta X'YZ$ равны $\angle OXY = \frac{\angle YXZ}{2}$,
~~также~~
 $\Delta Y = XY$ и $\Delta X'YZ$ и ΔXYZ в основание угла $= \frac{\angle YXZ}{2}$ от отрезка $X'Y$
 и $X'Y$ и $X'Z$ в вершинах с общей прямой YX , но для
 равных между собой ΔXYZ и $\Delta X'YZ$ Задача, что эти углы
 и $\Delta X'YZ$ и $X'Z$ и YX (первая сторона XY и XZ и
 $\angle XZY$ и $\angle XZY$) \Rightarrow $\sin \alpha$ ^{угла между} ΔXYZ верна, а
 $\Delta X'YZ$ и ΔXYZ равны $\angle OXY = \frac{\angle YXZ}{2}$, но для неравных углов обеих.
 Пр. (максимальное значение) т.к. задача Задача, что
 2 здания максимальное значение $\sin \alpha$ ^{угла} (PQ и QD скомбинированы)
 $\Rightarrow D$ -уголом максимальной остроты $\Rightarrow BDO$ и CDO -две Δ -две Δ -
 $\Rightarrow \angle CBD = \angle DBA = 35^\circ \Rightarrow \angle ABC = 70^\circ \Rightarrow \angle BCA = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$; $\angle BCD = \angle DCA =$
 $= 20^\circ : 2 = 10^\circ$
 Ответ: 10°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- A horizontal row of seven boxes, each containing a crossed-out number. The numbers are arranged as follows: 1 (crossed), 2 (crossed), 3 (crossed), 4 (crossed), 5 (crossed), 6 (crossed), and 7 (crossed). Each box is a small square with a black 'X' through it.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}xy &= z(4+z) \\yz &= x(4+x) \\xz &= y(4+y)\end{aligned}$$

$$\frac{ab}{c} = c+4$$

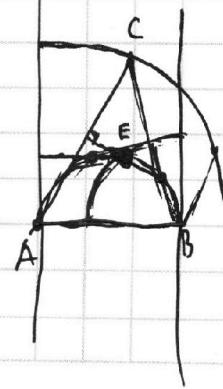
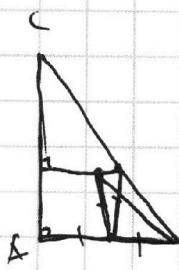
$$\begin{array}{r}
 & \overbrace{\quad\quad\quad}^n \\
 & \times \overbrace{999\dots999}^m \\
 & \overbrace{999\dots999}^m \\
 \hline
 & \overbrace{899\dots991}^{m-1} \\
 + & \overbrace{899\dots991}^1 \\
 \hline
 & \dots991 \\
 & \hline
 & 9980\dots00001
 \end{array}$$

$$X = 2900 + 2495$$

$$n = 9h + 90h + 900h + \dots + 9 \cdot 10^{25000-1}h = 1 + 10(1+9) + 10^2(1+9+9) + 10^3(1+9+9+9) + \dots + 10^{24999}(1+9+9+9+\dots)$$

$$+ 10 \cdot (8 + 9 \cdot 24999) + 10 \cdot (8 + 9 \cdot 24998) + \dots + 10 \cdot \underbrace{(8 + 9)}_{= 17} + 10 \cdot 8 = 1 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 10^{24999}$$

$$n = n \cdot 10^{25000} + 8n \cdot 10^{25000} + n = n(n+8) \cdot 10^{25000} + n = n \cdot 10^{25000} + 8n \cdot 10^{25000} + n = n + (n-8) \cdot 10^{25000} + 8 \cdot 10^{25000}$$



$$\begin{aligned} C \cup J &= x^2 + y^2 = 20^2 \\ J &= (x - \frac{15}{2})^2 + y^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 \\ E &\in (x - 15)^2 + y^2 = 10^2 \end{aligned}$$

Beso: 4.9999 gekenn

$$\frac{15}{x} = \frac{15}{10}$$

$$\frac{15}{x} = \frac{15}{10}$$

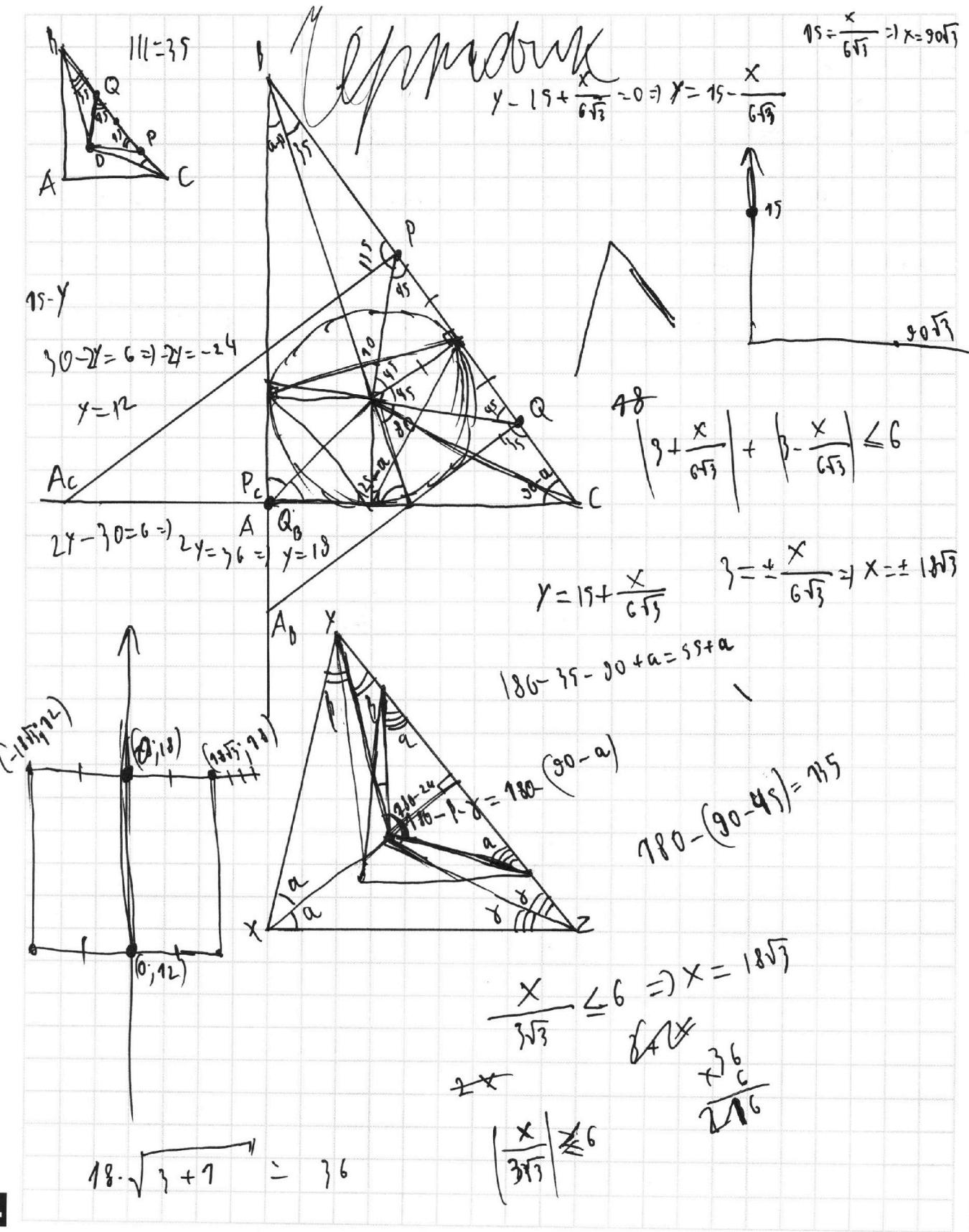


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 = z^2$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = \left(\frac{xz}{x}\right)^2 + \left(\frac{yz}{y}\right)^2 + \left(\frac{xz}{z}\right)^2 =$$

$$-2x + x\sqrt{4+y^2} = z^2 + 4z \Rightarrow z^2 + 4z + 2x = x\sqrt{4+y^2}$$

↑

falso
 Pn Kpn
 n!
 $\frac{(n-1)!}{(n-1)!} = 10$

$$\frac{xy(2+4)}{z^2} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

$$z^4 + 16z^2 + 4x^2 + 8z^2 + 4x^2 = 4x^2 + y^2$$

$$\begin{array}{r} x^4 \\ + 16 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ + 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$0 = x^2 + 4x + y^2 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4y^2}}{2} = -2 \pm \sqrt{4+y^2}$$

$$0 = y^2 + 4y + x^2 \Rightarrow y = -2 \pm \sqrt{4+x^2}$$

$$-2y - y\sqrt{4+y^2} = z^2 + 4z \Rightarrow \frac{5!}{2! \cdot 1!} \rightarrow \frac{8!}{5! \cdot 3!}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ 24 \\ \hline 16 \\ 16 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$-2y + y\sqrt{4+y^2} = z^2 + 4z$$

$$00000 = 1$$

$$000000 =$$

$$z^2 - 4z - 16$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16+64}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{80}}{2} =$$

$$= 2 \pm \sqrt{5}$$

$$z^2 + 4z + 2y + y\sqrt{4+y^2} = 0$$

$$z^2 + 4z + 2y = y\sqrt{4+y^2}$$

$$\begin{array}{r} 8! \cdot 2! \cdot 1! \\ \hline 5! \cdot 3! \cdot 1! \end{array} =$$

$$z^2 + 4z + 2y = \cancel{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} \frac{14}{5} = 2,8$$

$$z^4 + 16z^2 + 4x^2 + 8z^2 + 4y^2 + 16y^2 = 4x^2 + y^2$$

$$z^4 + 16z^2 + 8z^2 + 4y^2 + 16y^2 = 4x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{-4z - 16 \pm \sqrt{16z^2 + 16z^2 + 256 - 64z - 12z^2}}{-2} =$$

$$z^4 + 8z^2 + 16z^2 + 4y^2 + 16y^2 - 4z^2 - y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$y \subseteq -2z - 8 \pm \sqrt{64 + 96z - 4z^2} \Rightarrow y = -2z - 8 \pm 2\sqrt{-z^2 + 4z + 16} =$$

$$= -2z - 8 \pm 2\sqrt{z^2 - 4z - 16}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Мурзилька

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - \frac{2}{3}}}{2}$$

$$2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{1}{2}, \sqrt{2}$$

$$y = x^2$$

$$\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x^2 - (4-2)x + \frac{2^2 - 1^2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

$$FC : CD = CD : AD = FO : AO = EB : AB = 10 : 15$$

$$CD = \frac{10 \cdot 20}{15} = \frac{40}{3}$$

$$FC = \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2x^2 - 2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow 5b = \pm$$

$$FC = \frac{40}{3} \cdot \frac{10}{15} = \frac{40}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{80}{9}$$

$$5b = \pm \sqrt{8}; b = \pm \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$x^2 - 2x + 0 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$2x^2 - 4x - (28+16+4) = 0 \Rightarrow$$

$$2\sqrt{2}, 0, i\sqrt{\frac{2}{3}}, -i\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} + i\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{180}{2} = 90^\circ$$

$$\sqrt{2}, 0, i\sqrt{\frac{2}{3}}, -i\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2}, 0, i\sqrt{\frac{2}{3}}, -i\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \sqrt{2}$$