



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



- ✓ 1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах. $\underline{\underline{8}}$

- ✓ 2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ? $\underline{\underline{60\ 001}}$

- ✓ 3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$. $\frac{35}{8}$

- ✓ 4. [4 балла] В телевизионной игре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока? $\underline{\underline{3,5}}$

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии. $\underline{\underline{a=3}}$

- ✓ 6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}| + |x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте. $\underline{\underline{96\pi - 16\sqrt{3}}}$

- ✓ 7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$. $\underline{\underline{20^\circ}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N \begin{cases} xy = z^2 - 2z \\ yz = x^2 - 2x \\ xz = y^2 - 2y \end{cases}$$

$x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$$

1) Если все числа равны одному и тому же числу $m \neq 0 \Rightarrow$ из I ур-ия получим: $m^2 = m^2 - 2m$

$$\stackrel{!}{m} = 0 \quad \checkmark$$

2) Тогда есть 2 неравных друг другу числа

то $x \neq y$: \swarrow вычит из II ур-ия III ур-ия.

$$yz - xz = x^2 - y^2 - 2x + 2y$$

$$z(y-x) = -(y-x)(y+x) + 2(y-x) \quad | : (y-x) \neq 0$$

$$z = -y - x + 2 \quad \Rightarrow x + y + z = 2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2 - 4) = 4 \Leftrightarrow x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + xz) =$$

$$\stackrel{!}{x^2 + y^2 + z^2 = 4} \Rightarrow \nearrow = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$

суммы все уравнения систе

\Rightarrow Т.к. у системы есть ^{ненулевое} решение по условию и оно

не может удовлетворять 3) то это решение удовлетворяет

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\swarrow x + y + z = 2$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + yz + xz) + 4 \cdot 3 =$$

$$= 4 - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№2 Запись, что если десятичная запись натурального n состоит из 30001 девяток $\Rightarrow n = 10^k - 1$, $k = 30001$

$$\begin{aligned}n^3 &= (10^k - 1)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1 = \\&= 10^{2k}(10^k - 3) + 3 \cdot 10^k - 1 = \\&= 10^{2k} \cdot \underbrace{999\dots97}_k + \underbrace{299\dots99}_k = \\&= \underbrace{999\dots97}_k \underbrace{000\dots0}_{2k} + \underbrace{299\dots99}_k \quad \cancel{\text{---}} \quad k \cdot 2k > k+1\end{aligned}$$

$$= \underbrace{999\dots97}_k \underbrace{000\dots0}_{k-1} \underbrace{299\dots99}_k \Rightarrow$$

\Rightarrow „9“ в n^3 ~~встречается~~ встречается $k-1+k=2k-1$ раз

$$2k-1 = 2 \cdot 30001 - 1 = 60002 - 1 = 60001$$

Ответ: 60001 девяток.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

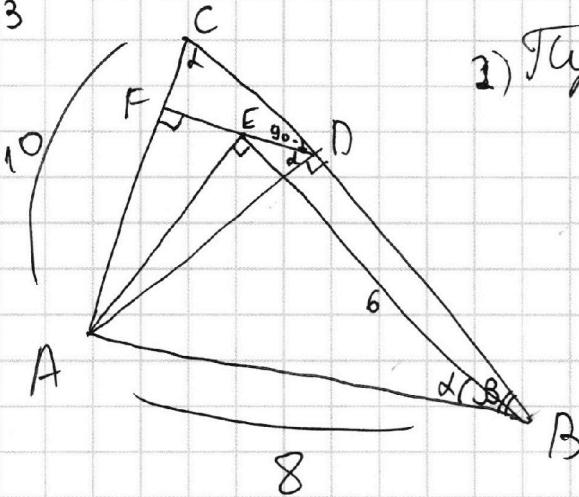


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N3



1) $\text{Пусть } \angle C = \alpha, \angle B = \beta \Rightarrow$
 $\angle A = \gamma$ (т.к. $D = BC \cap w \Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$)
 $(\text{т.к. } w \text{ - описанная}$
 $\text{на } AB \text{ как на}$
 $\text{диаметре})$
 $\Rightarrow \text{но } \triangle AFB \sim \triangle ABC: \angle AFB = \angle A = \gamma$

$$10 = 2R \sin \beta \Rightarrow R \sin \beta = 5$$

$$8 = 2R \sin \alpha \Rightarrow R \sin \alpha = 4$$

2) Т.к. $\angle C = \alpha \Rightarrow \angle FDC = 90^\circ - \alpha$
 $\angle FDA = \alpha$

3) Т.к. $\angle EBA = \gamma$
 $\angle EBD = \beta$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{EB}{AB} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \angle EBA = \alpha$$

4) Т.к. $\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow AD = AB \sin \beta = 8 \sin \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow AF = AD \sin \alpha = 8 \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow$$

 т.к. $\angle AFD = 90^\circ$

\Rightarrow Осталось найти $8 \sin \alpha \sin \beta$ если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$$\alpha \quad R \sin \beta = 5 \quad R \sin \alpha = 4 \Rightarrow \sin \beta = \frac{5}{4} \sin \alpha$$

$$8 \sin \alpha \sin \beta = \quad \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{5}{16} \sqrt{7}$$

$$= 8 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{5 \cdot 7}{8} = \frac{35}{8}$$

Ответ: $AF = \frac{35}{8}$.

Дано:

$\triangle ABC$ - остр.

w - описанная
с диаметром

AB

$W \cap BC = \{D\}$

$F \in [AC]$

$FD \perp AC$

$E = [DF] \cap w \setminus \{D\}$

$AC = 10$

$AB = 8$

$BE = 6$

Найти:

$AF = ?$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x - всего корабок в ряду.

Пусть P_k - вероятность выигрыша ^{игрок} если ему разрешили открыть к корабок ($x \geq k$).

Заметим, что $P_k = \frac{\# \text{как-то вариантов, где игрок}}{\# \text{как-то вариантов всего}} =$

$$= \frac{\# \text{как-то вариантов выигрыша}}{C_x^k} = \frac{C_{x-3}^{k-3} \leftarrow \begin{array}{l} \text{выбираем} \\ k-3 \text{ корабки} \\ \text{из } x-3 \text{ (и } x \text{ кораб-} \\ \text{локи)} \\ \text{должны} \\ \text{быть удалены) } \\ \text{чтобы} \\ \text{выиграть} \end{array}}{C_x^k}$$

$$\begin{aligned} P_7 &= \frac{C_{x-3}^4}{C_x^7} : \frac{C_{x-3}^2}{C_x^5} = \frac{\cancel{(x-3)!} \cancel{x!}}{\cancel{4!} \cancel{(x-7)!}} \cdot \frac{\cancel{x!}}{\cancel{5!} \cancel{(x-5)!}} = \\ &= \frac{\cancel{x!}}{\cancel{7!} \cancel{(x-7)!}} \cdot \cancel{\frac{\cancel{x!}}{\cancel{5!} \cancel{(x-5)!}}} \frac{\cancel{(x-3)!}}{\cancel{2!} \cancel{(x-5)!}} = \\ &= \frac{7! \cdot 2!}{5! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 2!}{4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{7}{2} = 3,5 \end{aligned}$$

Ответ: 6 3,5 раза.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 3 : \text{ I ур-е: } x^2 - (3^2 - 2 \cdot 3)x + 3^2 - 3 - 7 = 0$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\text{II ур-е: } 3x^2 - (3^3 - 2 \cdot 3^2)x + 6 - 3 = 0$$

$$x^2 - (3^2 - 3 \cdot 2)x + 2 - 3 = 0$$

$$x^2 - 3x - 7 = 0$$

$$\text{Корни I ур-е: } \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Корни II ур-е: } \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 7}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{3 \pm 5\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ни ариф. прогрессию } a_n = \frac{3 - 13 - \sqrt{13} + 2\sqrt{13}(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{3 - 53\sqrt{13} + 2\sqrt{13}n}{2}$$

$$a_4 = \frac{3 - 13\sqrt{13} + 8\sqrt{13}}{2} = \frac{3 - 5\sqrt{13}}{2}$$

$$a_9 = \frac{3 - 13\sqrt{13} + 18\sqrt{13}}{2} = \frac{3 + 5\sqrt{13}}{2}$$

$$a_6 = \frac{3 - 13\sqrt{13} + 12\sqrt{13}}{2} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$a_7 = \frac{3 - 13\sqrt{13} + 14\sqrt{13}}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

Корни II ур-е

Корни I ур-е

$a = 3$ подходит

Ответ: $a = 3$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 15 Гуское число ^{ариф} $\{a_n\}$.

↓

№ 3 Вместо

$$\begin{cases} a_6 + a_7 = a^2 - 2a & \left(\text{т.к. } a^2 - 2a - \text{квадр.член } x \right) \\ a_4 + a_9 = \frac{a^3 - 2a^2}{3} & \left(\text{аналогично} \right) \end{cases}$$

↓

$$\begin{aligned} a^2 - 2a &= a_6 + a_7 = a_1 + 5d + a_1 + 6d = a_1 + 3d + a_1 + 8d = \\ &= a_4 + a_9 = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \Rightarrow a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 3a^2 - 6a &= a^3 - 2a^2 \Rightarrow \cancel{a^2 - 2a} \quad a^3 - 5a^2 + 6a = 0 \\ a(a-3)(a-2) &= 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5a + 6) = 0 \\ a &\in \{0, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} a = 0 &\Rightarrow x^2 - 7 = 0 \quad - \text{I ур-е} \\ 3x^2 + 6 &= 0 \quad - \text{II ур-е} \quad - \text{у него нетвещ. корней} \\ \hline a = 2 &\Rightarrow x^2 + 2^2 - 2 - 7 = 0 \quad - \text{I ур-е} \Rightarrow x^2 - 5 = 0 \\ 3x^2 + 6 - 2^2 &= 0 \quad - \text{II ур-е} \Rightarrow 3x^2 + 6 - 32 = 0 \\ 3x^2 - 26 &= 0 \quad x^2 - \frac{26}{3} = 0 \end{aligned}$$

Корни I ур-е: $\pm \sqrt{5}$
Корни II ур-е: $\pm \sqrt{\frac{26}{3}}$. Гуское такое ариф. прогрессии?

Гусь её разность d . $\Rightarrow \sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = md \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m, n \neq 0$

$$\sqrt{\frac{26}{3}} - (-\sqrt{\frac{26}{3}}) = nd \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m, n \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{26}{3}}} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{\frac{15 \cdot 26}{26}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{15}{26}} \in \mathbb{Q}$$

$a=2$ не подходит

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



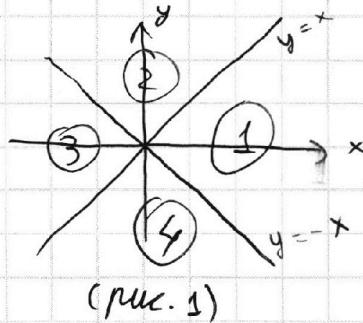
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6
Найдем область ГМТ точек $(x; y)$ где коэффициенты
верно $|x - y| + |x + y| \leq 4$.

Модули обнуляются на 2-ух прямых: $y = x$
 $y = -x$.



(рис. 1)

В первом и четвёртом:

$$x - y + x + y \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$$

Во втором:

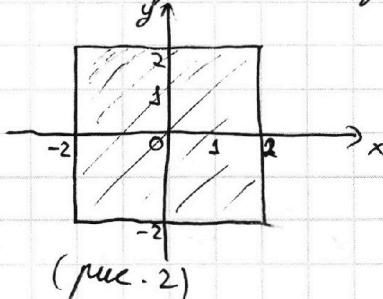
$$y - x + y + x \leq 4 \Rightarrow y \leq 2$$

В третьем: ~~хэх хэх хэх хэх хэх~~

В четвёртом: ~~хэх хэх хэх хэх хэх~~

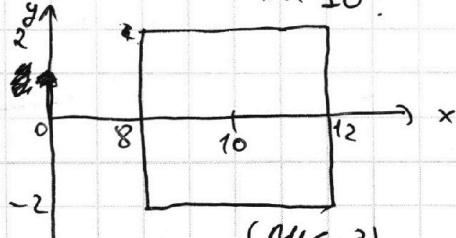
$$x - y - x - y \leq 4 \Rightarrow y \geq -2$$

Получаем такую фигуру:



(рис. 2)

ГМТ точек $(x; y)$ где коэффициенты
верно $|x - 10 + y| + |x - 10 + y| \leq 4$
есть исходная фигура сдвинутая
вправо O_x на 10:



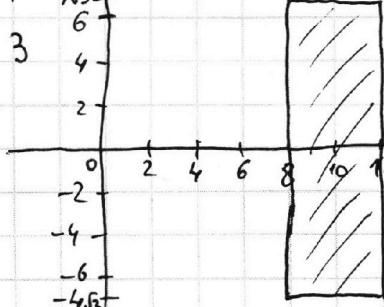
(рис. 3)

ГМТ точек ~~(x; y)~~
($x; y$) таких, что

$$\left| x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| + \left| x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| \leq 4$$

есть фигура с рисунка 3
размещенная от O_x в

$2\sqrt{3}$ раза.



(рис. 4)



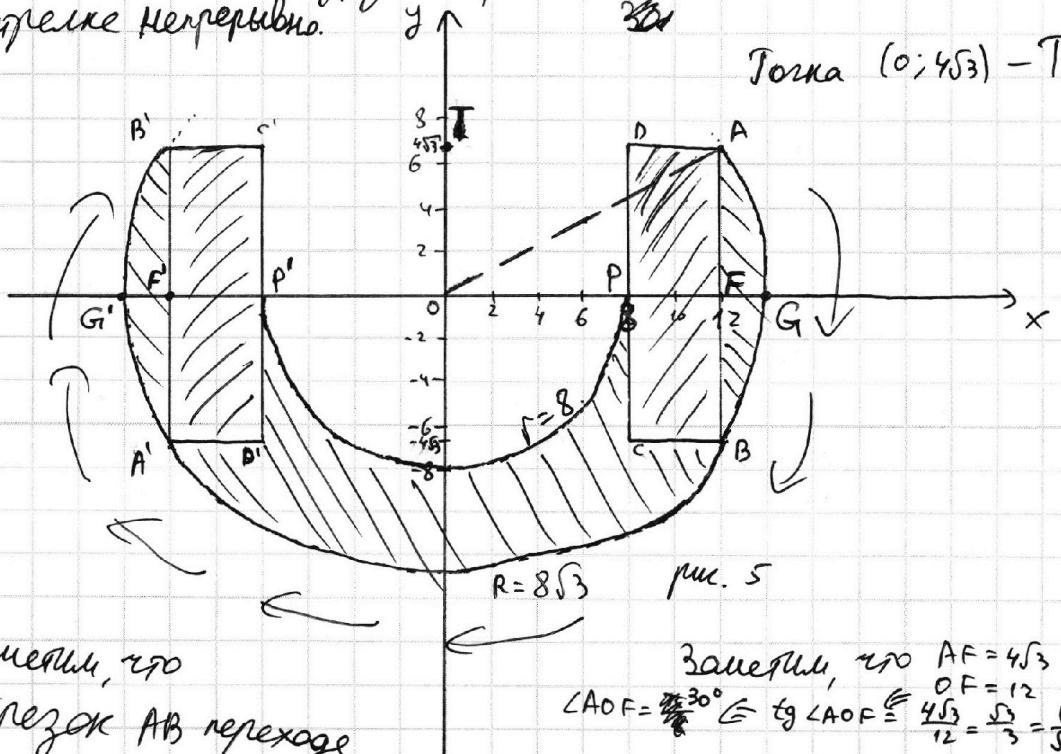
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь поменяй, ~~какое~~ какая получится фигура, если повернуть фигуру с рис. 4 на π по часовой стрелке непрерывно. № продолжение



Заметим, что

отрезок АВ переходит

в отрезок А'В' ~~после~~ скользит по окружности радиуса

$$R = OA = \sqrt{12^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 3} = 4\sqrt{3}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{12} = 8\sqrt{3} \text{ с центром в } O$$

P переходе в P' заметим окружность с центром в O и радиуса r = OP = 8 \Rightarrow при вращении вокруг начала координат получится фигура как на рис. 5.

Сначала посчитаем площадь фигуры, чи которой y \leq 0.

$$S_1 = \frac{1}{2} (\pi \cdot R^2 - \pi r^2) = \frac{\pi}{2} \cdot (64 \cdot 3 - 64) = \frac{\pi}{2} \cdot 64 \cdot 2 = 64\pi.$$

Теперь достаточно посчитать площадь PDAGP = S_2 и $S = S_1 + 2S_2$ (в силу симметрии)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_2 = S_{\text{AOG}} - S_{\triangle AOF} + S_{\text{POAF}} = \text{№ 6 задание}$$

$$= \pi R^2 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} - \frac{4\sqrt{3} \cdot 12}{2} + 4 \cdot 4\sqrt{3} =$$

$$= \frac{\pi R^2}{12} - 24\sqrt{3} + 16\sqrt{3} = \frac{\pi R^2}{12} - 8\sqrt{3} = \frac{\pi \cdot 64 \cdot 3}{12} - 8\sqrt{3} =$$

$$= \frac{\pi \cdot 64}{4} - 8\sqrt{3} = 16\pi - 8\sqrt{3}$$

II

$$S = S_1 + 2S_2 = 64\pi + 2(16\pi - 8\sqrt{3}) =$$

$$= 64\pi + 32\pi - 16\sqrt{3} = 96\pi - 16\sqrt{3}$$

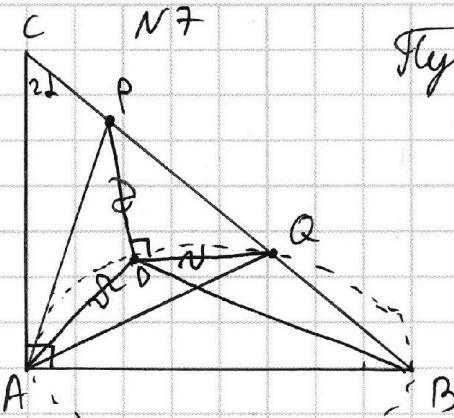
Ответ: $S = 96\pi - 16\sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle ACP = 2d$ (P лежит **внадалеку**)
 $d = 25^\circ$

т.к. $\angle ACQ = 115^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle CAQ = 90^\circ - d$$

т.к. $\triangle ABC - \text{rt}\triangle \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ - 2d$

т.к. $\angle ABP = 115^\circ$

$$\angle PAB = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2d)}{2} =$$

$$= 45 + d.$$

дано:
 $\triangle ABC - \text{rt}\triangle$
 $P, Q \in BC$
 $PB = BA$
 $CQ = CA$
 $DQ = DP$
 $\angle PDB = 90^\circ$
 $\angle ACB = 50^\circ$

$$\angle CAB + \angle PAQ = \angle CAQ + \angle PAB = 90^\circ - d + 45^\circ + d = 135^\circ$$

$$\angle PAQ = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

Д-члены
отличаются
одинаково

$\triangle PAQ$

$\angle ADQ = 115^\circ \Rightarrow AD = DQ \Rightarrow$ т.к. $\triangle DPQ - \text{rt}\triangle \text{ r/r}$ \Rightarrow

$$\Rightarrow \angle DQP = 45^\circ$$

докажем, что $\angle DAB = 45^\circ$

$$\angle DAB = \angle DAQ + \angle QAB = \underbrace{\frac{180^\circ - \angle ADQ}{2}}_{\text{т.к. } \angle ADQ = 115^\circ} + \underbrace{\frac{90^\circ - \angle CAQ}{2}}_{\text{т.к. } \angle CAB = 90^\circ} =$$

$$= 180^\circ - \angle CAQ - \frac{\angle AOD}{2} = 180^\circ - (90^\circ - d) - \frac{2\angle APB}{2} =$$

$$= 90^\circ + d - \angle APB = 90^\circ + d - \frac{180^\circ - \angle ABP}{2} = d + \frac{\angle ABP}{2} =$$

$$= d + \frac{90^\circ - \angle ACB}{2} = d + 45^\circ - \frac{\angle ACB}{2} = d + 45^\circ - \frac{2d}{2} = 45^\circ \Rightarrow \angle DAB = \angle DQP = 45^\circ$$

$$\angle DBQ = \frac{90^\circ - 2d}{2} = \angle DBQ = \frac{\angle ABC}{2} \Leftarrow \angle ABD = \angle DBQ$$

$$= 45^\circ - d \Rightarrow \angle DBQ = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$$

адд. \angle при $\angle DQB$

$\angle DQB - \text{внеш}$

т.к. $AD = DQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADO = \angle DQO$

Оконч.: $\angle DBQ = 20^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$D = a^2 \cdot a - 7$$

$$x^2 - (a^2 - 2a) \times + a^2 - a - 7 = 0$$

$$\frac{p+3q}{p+9q} \times 2 - \frac{a^3 - 2a^2}{3} x + 6 - a^5 = 0.$$

$$\begin{cases} p+5q + p+6q = a^2 - 2a \\ (p+5q)(p+6q) = a^2 - a - 7. \end{cases}$$

$$6p + 36q = a^3 - 2a^2$$

$$(p+3q)(p+9q) = 6 - a^5$$

$$6p + 33q = 3a^2 - 6a$$

$$6p + 36q = a^3 - 2a^2$$

$$q = \frac{a^3 - 5a^2 + 6a}{3}$$

$$p = \frac{a^2 - 2a - \frac{11a^3 - 55a^2 + 66a}{3}}{3} = \frac{3a^2 - 6a - 11a^3 + 55a^2 - 66a}{3} =$$

$$= -\frac{11a^3 + 58a^2 - 72a}{3}$$

$$65 + 70 - 90 = 45$$

$$6 \cdot 666 \cdot C + 6 \cdot 666 \cdot v_2 \cdot O_1 = T - v_1 \cdot \varepsilon + (v_2 - v_1) \cdot v_2 \cdot \varepsilon = T - v_1 \cdot \varepsilon + v_2 \cdot \varepsilon - v_1 \cdot \varepsilon = \varepsilon (T - v_1 \cdot \varepsilon)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$A = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 - ?$$

Если какие-то числа из x, y, z равны между собой:

$$600 \quad x=y \Rightarrow \begin{cases} x^2 = z^2 - 2z \\ x^2 = x^2 - 2x \quad | :x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = z^2 - 2z \\ z = x-2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= (x-2)^2 - 2(x-2) \\ x^2 &= x^2 - 4x + 4 - 2x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \Leftrightarrow z = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow y = x = \frac{11}{3} \\ &= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{64}{9} = \frac{72}{9} = 8 \quad \left(\text{достигается при } x=y=\frac{4}{3}, z=-\frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Если все числа попарно разные:

$$xy - yz = -2z + z^2 + 2x - x^2$$

$$y(x-z) = -(x-z)(x+z) + 2(x-z) \quad | : (x-z) \neq 0$$

$$y = -x - z + 2 \Rightarrow x + y + z = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 4$$

$$4 - 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 2(x+y+z) \quad \begin{matrix} // 4 \\ (\text{сложим бычий хвост}) \end{matrix}$$

$$4(xy + yz + zx) = 0 \Rightarrow xy + yz + zx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\begin{aligned} A &= x^2 + y^2 + z^2 - 4(x+y+z) + 4 \cdot 3 = \\ &= 4 - 4 \cdot 2 + 12 = 8 \end{aligned}$$

А может равнеться только 8. Равенство

может достигаться, когда $x=y=\frac{4}{3}; z=-\frac{2}{3}$

Ответ: 8.

$$\begin{aligned} x > 2 \\ x > y \\ x - y > 0 \\ \frac{x}{z} > 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot 12 &= 48 \\ 48 &= 8 \cdot 6 \\ 8 &= 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 2 &= 4 \cdot 2 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

$$= 192 + 504 = 696$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 | СТРАНИЦА |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------|

— из —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$xy = z^2 - 2z.$$

$$\frac{xy}{z} = z - 2$$

$$5x - h + R + x$$

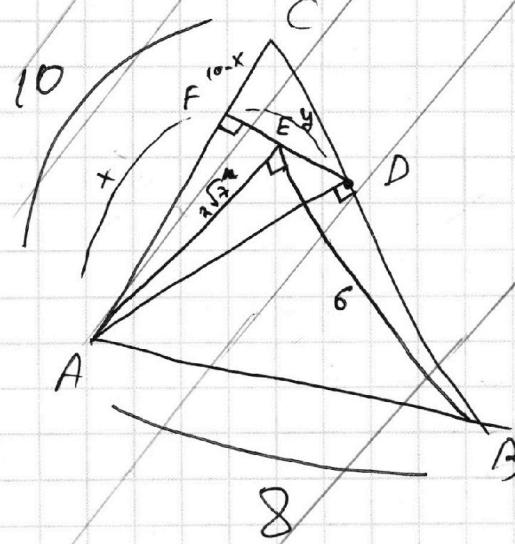
$$2 \neq x$$

$$5x^2$$

$$h < x$$

$$5(R-x) + h + x$$

$$(10^n - 1)^3 = 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$



$$\frac{xyz}{z} = z^2 - 2z.$$

$$x^2 - 2x - \frac{A}{x} = 0.$$

$$x^3 - 2x^2 - A = 0.$$

||

$$x + y + z = 2$$

$$xy + yz + zx = 0$$

~~2x = 2x~~

$$xyz = A$$

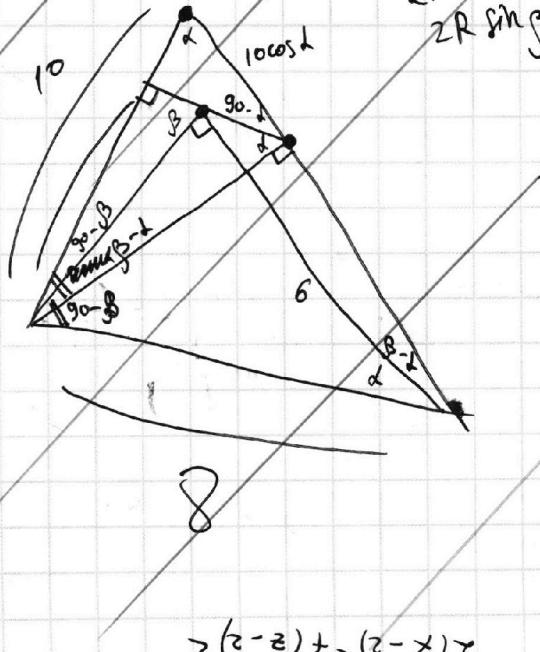
$$y(x-2) = (2-x)(2+x) - 2(2-x)$$

$$y - yz = 2^2 - x^2 - 2z + 2x$$

$$2R \sin \alpha = 8$$

$$2R \sin \beta = 10$$

$$8^2 - 6^2 = 2 \cdot 14 = (2\sqrt{7})^2$$



$$h \leq |h-x| + |h+x|$$

$$-2(x-z) = z^2 - 2z$$

$$2z - 2x = z^2 - 2z$$

$$z^2 - 2z - 2x = z^2 - 2z$$

$$2x + z^2 - 2z - 2x = z^2 - 2z$$

$$h \leq |h-x| + h + x$$

$$2(x-z)^2 + (z-2)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases} \quad \text{чертёж}$$

$$(y-1)^2 - 1 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 - ?$$

Если какие-то 2 числа из x, y, z равны между собой:

$$500 \quad x = y \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -2z + z^2 \\ xz = -2x + x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = -2z + z^2 \\ z = x-2 \end{cases}$$

$$x+y+z=2 \quad A = 8 + 8 + 2 \quad x+y+z = -4 + z^2 + x^2 + y^2 \quad x^2 = (x-2)^2 - 2(x-2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 4 \quad A = 4 \quad x^2 = x^2 - 4x + 4 - 2x + 4$$

$$A = 8 + 8 + 2(-4 + A) = 4 \quad A + 2A = 12 \quad 0 = -6x + 8$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - 2\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{64}{9} =$$

$$= \frac{8+64}{9} = \frac{72}{9} = 8 \quad (\text{достигли при } x=y=\frac{4}{3}, z=-\frac{2}{3})$$

Если все три числа x, y, z попарно различны:

$$xy = -2z + z^2 \Rightarrow z^2 - 2z = \frac{xy^2}{z} \quad (\text{так как } A = xyz)$$

Взглянем из I ур-ия системы:

Решение №1
Вероятность = $\frac{\# \text{решений}}{\# \text{всего}}$
(n крат)

$$= \frac{(x-3)(x-2)}{C^n_x} = \frac{(-8)}{C^n_x} = \frac{16}{C^n_x} = \frac{16}{C_5^3} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$= \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{5!} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

$$= \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{1}{30}$$

$$= \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{4!} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{720} = \frac{1}{720} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3600}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$1 \times \frac{y}{2\sqrt{3}} + \left(x - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right) \leq \frac{36}{252} \cdot 9 \cdot 25 = 180 + 45 = 225$$

$$\frac{(a^3 - 2a^2)^2}{3} - \frac{4(6-a^5)}{3} = 25(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7)$$

$$(a^3 - 2a^2)^2 - 12(6-a^5) = 225(a^2 - 2a)^2 - 36(a^2 - a - 7)$$

$$(a^6 - 4a^5) + (4a^4) - 72 + 12a^3 = 225a^4 - 900a^3$$

$$P(x) - P(a) : (r-a) \quad P(a) : (r-a)$$

$$480 : (r+1) \quad -480 : (r+5)$$

$$+ 900a^2 \\ - 36a^2 + 36a + 252$$

$$a^6 + 8a^5 - 221a^4 - 900a^3 - 864a^2 - 36a - 324 = 0$$

$$\frac{1}{-7} - 8 - 221 + 900 - 864 + 36 - 324 = 672 - 864 + 36 - 324 = \\ - 708 - 864 - 324 =$$

$$(480, 324) = 7040 - 860 - 320 =$$

$$\frac{221}{16} = 2(240, 16) = 4(120, 8) = 12(40, 2) = 150 + 12 = 700 - 1100 - 80 = \\ - 400 - 80 = - 480$$

$$64 - 8 \cdot 2^5 - 221 \cdot 16 + 900 \cdot 8 - 864 \cdot 4 + 72 - 324 = \frac{864}{3456}$$

$$- 64 - 256 - 3536 + 7200 - 3456 + 72 - 324 =$$

$$= 64 - 256 - 36 + 3700 - 3456 + 72 - 324 =$$

$$= 64 - 256 - 36 + 244 + 72 - 324 = \frac{3 - 11\sqrt{13} + 2\sqrt{13}(n-1)}{2}$$

$$= 36 - 256 + 244 - 324 = - 156 + 240 - 320 =$$

$$76 : (r+2) = 156 + 220 - 300 = 156 - 80 = 76$$

$$(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7) = \pm \sqrt{13} - 647$$

$$= a^4 - 4a^3 + 4a^2 + 4a + 28 = \pm 5\sqrt{13} - 449$$

$$a_1 + 6\sqrt{13} = -5\sqrt{13} \quad d = 2\sqrt{13} \quad 5d = 10\sqrt{13} \quad \Leftrightarrow \quad 5\sqrt{13} = a_1 + 8d$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

