



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$48 + (x+y+z)^2 = 48 + x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz =$$

$$= 48 + x^2 + y^2 + z^2 + 2(4z + z^2) + 2(4x + x^2) + 2(4y + y^2) =$$

$$= 48 + x^2 + y^2 + z^2 + 8z + 8x + 8y + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 =$$

III. Система симметрична, то
 1) $xy = 4z + z^2$
 2) $yz = 4x + x^2$
 3) $zx = 4y + y^2$

$$48 + (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz + 48 =$$

$$= 48 + x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2xy - 2yz - 2zx =$$

$$= (x+y+z)^2 - 8x - 8y - 8z - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = (x+y+z)^2 - 8(x+y+z)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(x+y+z)^2 - 8(x+y+z)}{3}$$

$$H = (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 48 + (x+y+z)^2 - 2 \cdot \frac{(x+y+z)^2 - 8(x+y+z)}{3}$$

2. 3

$$yz - xy = x^2 + 4x - z^2 - 4z$$

$$y(z-x) = x(x+z-z^2) + 4(x-z)$$

1) $z \neq x$ $:(x-z)$

$$-y = x+z+4$$

$$x+y+z = -4$$

тогда

$$H = 48 + 16 - 2 \cdot \frac{16 + 32}{3} = 32$$

2) $z = x$

$$x^2 = 4y + y^2$$

$$x^2 - y^2 = 4y$$

тогда $x^2 - y^2 = 4y$, то $x = y = z$

тогда $x = y = z$, то $x = y = z = 0$
 или $x^2 = 4x + x^2$, то $x = 0$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{999 \dots 99}_{25000} = 10^{25001} - 1$$

$$n^3 = \underbrace{25000 \ 25001 \ 3}_{75003 \ 50002 \ 25001} = (10^5 - 1)^3 = 10^{15} - 10^{10} + 10^5 - 1$$

Вычет по таблице

Прислужа	$\begin{matrix} 45003 \\ 45002 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 50003 \\ 50002 \\ 50001 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 25002 \\ 25001 \\ 25000 \end{matrix}$	$\dots$	$\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} 10 \\ 00 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 000 \\ 010 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 010 \\ 000 \end{matrix}$	$\dots$	$\begin{matrix} 00 \\ 01 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} 9 \\ 8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 880 \\ 880 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 008 \\ 008 \end{matrix}$	$\dots$	$\begin{matrix} 88 \\ 88 \end{matrix}$
	$75002 - 50002 + 1 =$	25001	$25000 - 1 + 1 =$		25000

$$25001 + 25000 = 50001$$

Ответ: 50001



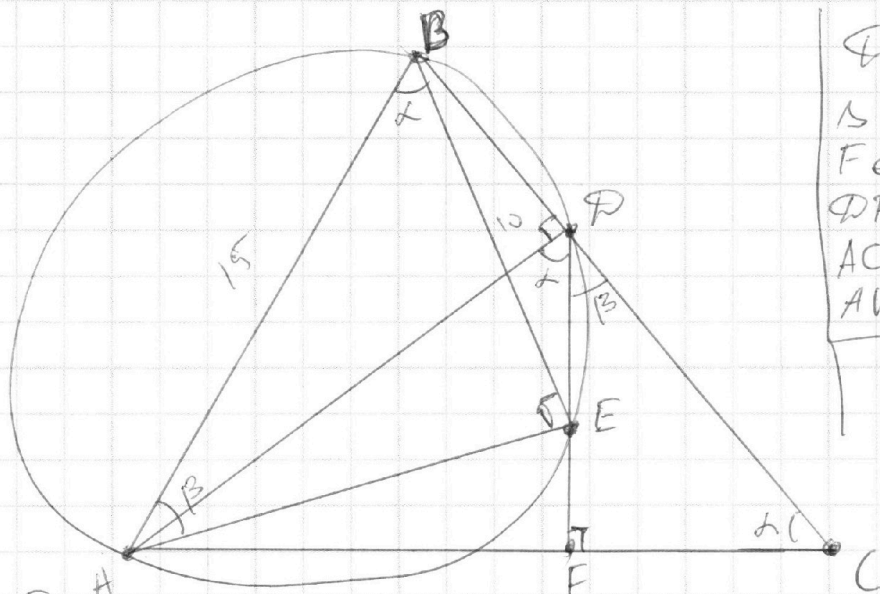
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Доказ: окр ω
 $\triangle ABC$; $BC \cap \omega = D$
 $F \in AC$; $DF \perp AC$;
 $DF \cap \omega = E$
 $AC = 20$; $BE = 10$
 $AB = 15$
 $AF = ?$

1) Пусть $\angle BHE = \beta$, $\angle ABE = \alpha$, учтем т.к AB - диаметр, то $\angle AEB = 90^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

2) $\angle ABE = \angle ADE = \alpha$ (т.к. окружность на гуд AE)

3) $\angle ADB = 90^\circ$ т.к. AB - диаметр, $\angle FDC = \beta$, т.к. $\angle ADE = \alpha$ и $\angle ADB = 90^\circ$

~~4) $\triangle ADB \sim \triangle AEB$ и $\triangle AEB \sim \triangle AEC$~~

4) т.к. $\angle FDC = \alpha$ и $\angle DFC = 90^\circ$, то $\angle C = \alpha$

5) $\triangle AEB \sim \triangle AFC$ т.к. $\angle C = \angle ABE$ и $\angle DFC = \angle AEB$

6) т.к. $\triangle AEB \sim \triangle AFC$, то $\frac{BE}{FC} = \frac{AB}{AC}$
 $FC = \frac{AC \cdot BE}{AB}$

$$FC = \frac{20 \cdot 10}{15} = \frac{8}{3}$$

$$7) \cos \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$8) FC = DC \cdot \cos \alpha = \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9}$$

$$9) AF = AC - FC = 20 - \frac{16}{9} = \frac{180 - 16}{9} = \frac{164}{9}$$

$$\text{Ответ: } \frac{164}{9}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть телеведущий берёт n -коробок, тогда
 $P_1 = \frac{C_{n-3}}{C_n^5}$, где C_{n-3}^2 - это количество исходов

т.е. для фикс. 3 коробки с цифрами, а остальные выбираем как угодно. C_n^5 - кол-во коробок выберем 5 коробок

Аналогично $P_2 = \frac{C_{n-3}}{C_n^2}$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^5 \cdot C_n^5}{C_n^2 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{\frac{(n-3)! \cdot n!}{5! \cdot 5! \cdot (n-5)! \cdot (n-8)!}}{\frac{n! \cdot (n-3)!}{(n-8)! \cdot 8! \cdot (n-5)! \cdot 3!}} = \frac{8! \cdot 3!}{5! \cdot 5!} =$$

$$= \frac{6 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{84}{5} = 16,8$$

Ответ: в 16,8 раз



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^2 - (a^2 - a)x + \frac{a^3}{3} = 0$$

Если $f(x)$ имеет корни, то пусть это корни x_1 и x_2

$$x_1 = x_0 + 3p, \quad p \neq 0$$

$$x_2 = x_0 + 4p; \quad x_{\text{ср}} = \frac{a^2 - a}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_0 + 3,5p$$

$$x_0 = \frac{a^2 - a}{7}$$

$$g(x) = 2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0, \quad \text{Аналогично пусть корни}$$

x_3 и x_4 , то пусть

$$x_3 = x_0 + p$$

$$x_4 = x_0 + 6p; \quad x_{\text{ср}} = \frac{a^3 - a^2}{4} = \frac{x_3 + x_4}{2} = x_0 + 3,5p$$

$$\frac{a^3 - a^2}{4} = \frac{a^2 - a}{2} \Rightarrow 2a^2(a - 1) - 4a(a - 1) = 0$$

$$a(a - 1)(2a - 4) = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 2 \end{cases}$$

Осталось проверить, что при таких a $f(x)$ и $g(x)$ имеют корни

1) $a = 0$, тогда

$$f(x) = x^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

но т.к. a не может быть 0, то $a = 0$ не подходит

2) $a = 1$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{3} \Rightarrow \text{корни есть}$$

$$g(x) = 2x^2 - 2 - 8 \cdot 1 - 4 \Rightarrow \text{корни есть}$$

$a = 1$ - подходит

3) $a = 2$

$$f(x) = x^2 - 2x - 2 = 0$$

$D_1 \geq 0 \Rightarrow$ корни есть

$$g(x) = 2x^2 - 4x - 128 - 16 - 4 = 0$$

$D_2 > 0 \Rightarrow$ корни есть

Значит $a = 2$ - подходит

Ответ: $a \in \{1; 2\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| y - 15 + \frac{x}{653} \right| + \left| y - 15 - \frac{x}{653} \right| \leq 6$$

Лемма 1 $|a+b| + |a-b| = 2 \cdot \max(|a|; |b|)$

1) $a \geq b$ Докажем это дальше!

1.1) $a \geq 0$

$$|a+b| + |a-b| = 2a$$

Аналогично для $b \geq a$

1.2) $a < 0$

$$|a+b| + |a-b| =$$

$$-a-b + a-b = -2b = 2|b|$$

Тогда лемма переносит условие

$$2 \cdot \max(|y-15|; \left| \frac{x}{653} \right|) \leq 6$$

1) $|y-15| \leq 3$

2) $\left| \frac{x}{653} \right| \leq 3$

$y \in [12; 18]$

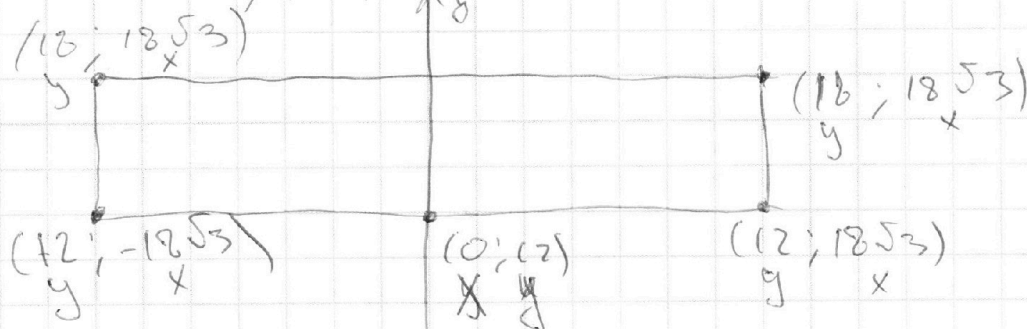
$$|x| \leq 1853$$

$$x \in [-1853; 1853]$$

Получается, что D — это прямоугольник

с вершинами: $(-18; -1853)$, $(18; 1853)$,

$(12; -1853)$, $(12; 1853)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Лемма 1. Докажемся

1) ~~0 > a > b~~

$$a \geq b \geq 0$$

$$|a+b| + |a-b| = \\ = 2a = 2 \max(|a|, |b|)$$

2) ~~0 > a > b~~

$$2.1) |a| \geq |b|$$

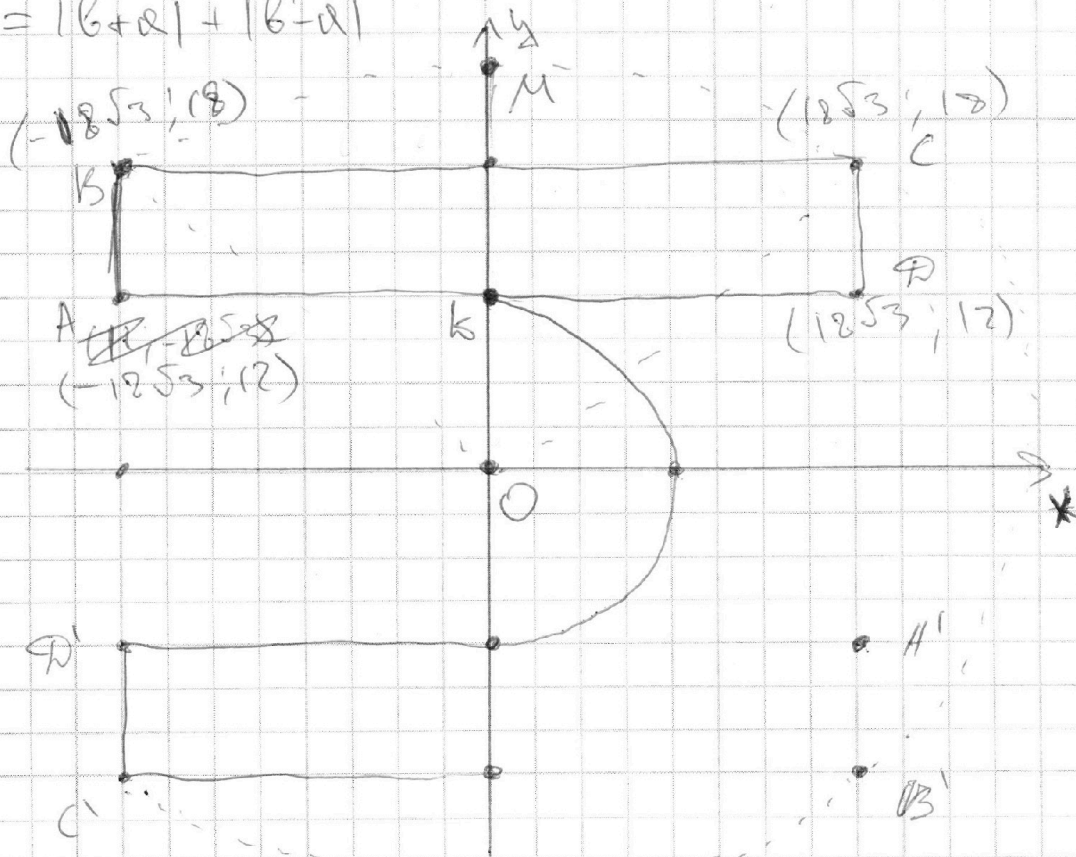
$$|a+b| + |a-b| = 2a = \\ = 2 \max(|a|, |b|)$$

$$2.2) |a| < |b|$$

$$|a+b| + |a-b| = -a-b+a-b = \\ = 2|b| = 2 \max(|a|, |b|)$$

3) ~~0 > a > b~~

$$|a+b| + |a-b| = -a-b-b+a = 2 \max(|a|, |b|) \\ \text{Если } b > a, \text{ то тоже вышло, так как } |a+b| + |a-b| = \\ = |b+a| + |b-a|$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получается, что заданная фигура будет как ~~квадрат~~ на рисунке

Его площадь будет равна

$$S = \frac{\pi R_1^2}{2} - \frac{\pi R_2^2}{2} + S_{ABCO} + \frac{\pi R_1^2 - S_{BCB'C'}}{4}, \text{ где}$$

$$R_1 = OB; R_2 = OK$$

$$S_{ABCO} = 6 \cdot 36\sqrt{3} = 216\sqrt{3}$$

$$S_{BCB'C'} = 36 \cdot 36\sqrt{3}$$

$$S = \frac{\pi \cdot (R_1^2 - R_2^2)}{2} + 216\sqrt{3} + \frac{\pi R_1^2 - 36^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R_1 \text{ по т. Пифагора } R_1 = \sqrt{(18^2 + 18^2\sqrt{3}^2)} =$$

$$= 4 \cdot 18 = 72$$

$$\text{По т. Пифагора } R_2 = \sqrt{}$$

$$R_2 = 12$$

$$S = \frac{\pi \cdot 60 \cdot 84}{2} + 216\sqrt{3} + \frac{\pi \cdot 72^2 - 36^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 30\pi \cdot 84 + 216\sqrt{3} + \frac{36^2\pi(4 - \sqrt{3})}{4} =$$

$$= 2520\pi + 216\sqrt{3} + 324\pi(4 - \sqrt{3})$$

$$\text{Ответ: } 2520\pi + 216\sqrt{3} + 324\pi(4 - \sqrt{3})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n



$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!}} = \frac{(n-5)! \cdot 5!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{(n-4)(n-3)(n-2)}$$

$$\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8} = \frac{(n-2)! \cdot 8!}{(n-5)! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{(n-5)(n-6)(n-7)}$$
$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (n-4)(n-3)(n-2)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (n-5)(n-6)(n-7)} = \frac{28}{5} \cdot \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-5)(n-6)(n-7)}$$

$$12 \cdot 7 = 70 \pm 14 = 84$$

$$\begin{matrix} x & \rightarrow & -x \\ y & \rightarrow & -y \end{matrix}$$

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 &= \\ x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z + 48 &= \end{aligned}$$

$$2x^2 + 8z + 2x^2 + 8x + 2y^2 + 8y = 2xy + 2yz + 2zx \quad | + 48$$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = -(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - 48)$$

$$2(2+4) + \sqrt{x(x+4)} + y(y+4) = x(y+y^2) + y(z+z^2) + z(x+x^2) + 48$$

$$(2+4)^2 + (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z + 48$$

$$48 + (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z + 48 = 3xy + 3yz + 3zx + 4x + 4y + 4z$$

$$(x+y+z)^2 + 8z + 2z^2 + 8x + 2x^2 + 8y + 2y^2 + 48 =$$

$$48 + (x+y+z)^2 = (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$$

$$z = x = y = 0$$

$$x = z$$

$$x^2 = 4y + y^2 \quad (x+y)^2 = 4y + y^2 \quad x = y = z = 0 \quad z = x$$

$$(x, y)$$

$$z^2 + 4z - x^2 - 4x = y(y-4)$$

$$2(y-x) = (x-y)(x+y) + 4(x-y)$$

$$x(y-x) = (y-y)(x+y) + 4(y-x)$$

$$(z-x)(z+x) + 4(z-x) = y(y-x) \quad 48 + (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 8y + 8z + 48$$

$$2x + 4 = -y$$

$$\boxed{2x + y = -4}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x+y+z)^2 - 2xy - 2yz - 2zx \\ x^2 + y^2 + z^2 &= (x+y+z)^2 - 8z - 2x^2 - 8x - 2y^2 - 8y \end{aligned}$$

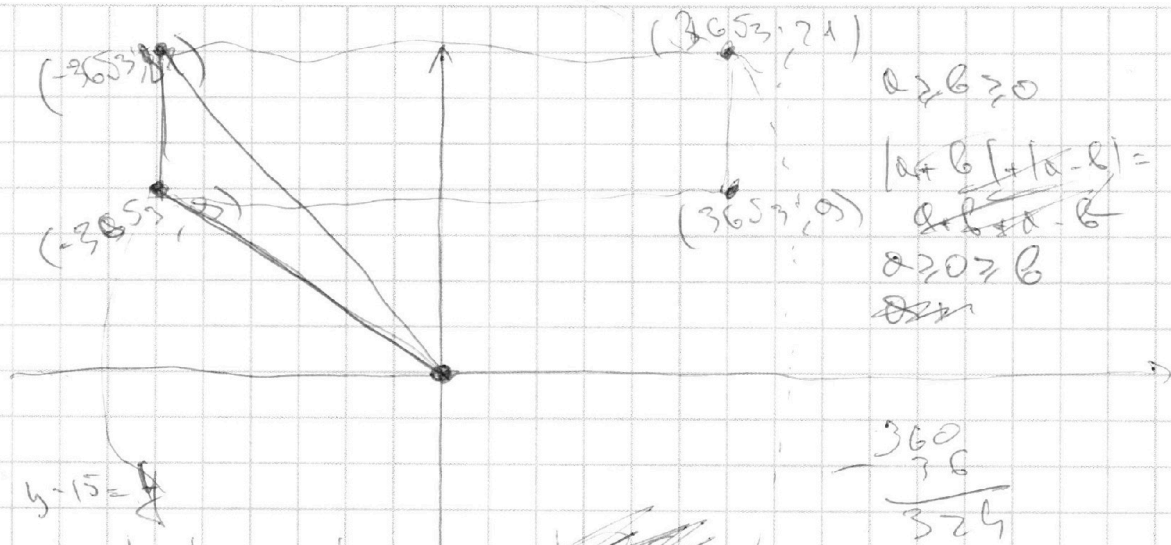


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$\left|1 + \frac{x}{653}\right| + \left|1 - \frac{x}{653}\right| \leq 6$$

$$x_1 \quad x \mapsto 653x \\ y \mapsto y+15$$

$$|y+15| + |y-x| \leq 6$$

$$|2x| \quad 2y$$

$$|a+b| + |a-b| = 2|a|$$

$$1) \quad a \geq b$$

$$|a+b| + |a-b| = 2|a|$$

$$2) \quad b > a = 2|b|$$

$$1) \quad a > b$$

$$1.2) \quad a > 0$$

$$|a+b| + |a-b|$$

$$1) \quad |a| > |b|$$

$$|a+b| + |a-b|$$

$$|a+b| + |a-b| =$$

$$a \geq b$$

$$1) \quad |a| \geq |b|$$

$$|a+b| + |a-b|$$

$$\max(|y-15|, |\frac{x}{653}|) \leq 6$$

$$1) \quad y \in [9; 21]$$

$$2) \quad x \in [-3653; 3653]$$

$$\frac{x}{653} \leq 6 \\ |x| \leq 3653$$