МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D. Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω, отличная от D. Найдите AF, если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M, которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D, для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \quad (1) \\ yz = 4x + x^2 \quad (2) \\ zx = 4y + y^2 \quad (3) \end{cases} \qquad (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 - ?$$

$$\begin{cases} xy = z(z+4) \\ yz = x(x+4) \\ zx = y(y+4) \end{cases} \to \begin{cases} \left(\frac{xy}{z}\right)^2 = (z+4)^2 \\ \left(\frac{yz}{x}\right)^2 = (x+4)^2 \end{cases}$$

$(1)+(2)+(3)$: $xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 + 4(x+y+z)$

$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16 =$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 48$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$n = \underbrace{999\ldots99}_{25000}$

Заметим, что $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + 3n(n+1) + 1$

• $(n+1)^3 = (\underbrace{9\ldots9}_{25000} + 1)^3 = (\underbrace{100\ldots0}_{25000})^3 = \underbrace{100\ldots00}_{75000}$

• $3n(\underbrace{n+1}_{\underbrace{10\ldots0}_{25000}}) = \underbrace{300\ldots0}_{25000} \cdot n =$

$$\begin{array}{r} \overbrace{99\ldots9}^{25000}\,\overbrace{00\ldots0}^{25000} \\ \times \qquad 3 \\ \hline \underbrace{299\ldots97}_{24999}\,\underbrace{00\ldots0}_{25000} \end{array} = \underbrace{299\ldots97}_{24999}\underbrace{00\ldots0}_{25000}$$

• $3n(n+1) + 1 = \underbrace{299\ldots97}_{24999}\underbrace{00\ldots0}_{25000} + 1 = \underbrace{299\ldots97}_{24999}\underbrace{00\ldots01}_{24999}$

Получается, что $\underbrace{100\ldots00}_{75000} = n^3 + \underbrace{299\ldots97}_{24999}\underbrace{00\ldots01}_{24999} \Rightarrow$

$$\Rightarrow n^3 = \begin{array}{r} \overbrace{100\ldots00}^{25000}\,\overbrace{00\ldots00}^{25000}\,\overbrace{00\ldots00}^{25000} \\ -\quad 2\,99\,97\,00\ldots01 \\ \hline \underbrace{9\ldots97}_{24999}\,00.02\,\underbrace{99\ldots99}_{25000} \end{array}$$

Т.е. n^3 имеет в своей десятичной записи $24999 + 25000 = 49999$ „9"

Ответ: 49999

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

• ~~Рас~~ Проведём AD. $\angle ADB = 90$, т.к. вписанный, опир на диаметр AB.
(тогда $\angle ADC = 90$ - как смежный)

• По метрическим соотношениям в прямоуг. $\triangle ADC$:

$$DF^2 = AF \cdot FC$$

$$\frac{5\cdot(30-1{,}5x)^2}{9} = x\cdot(20-x)$$

$$5\cdot(30-1{,}5x)^2 = 9x\cdot(20-x)$$

$$5\cdot(900-90x+2{,}25x^2) = 180x-9x^2$$

$$4500-450x+11{,}25x^2 = 180x-9x^2$$

$$20{,}25x^2-630x+4500=0$$

$$D = 630^2-4\cdot4500\cdot20{,}25 = 396900-81\cdot4500 = 32400;\ \sqrt{D}=\sqrt{324\cdot100}=180$$

$$x_{1,2} = \frac{630\pm180}{40{,}5} = \left[\begin{array}{l}\frac{810}{40{,}5}=20\\ \frac{450}{40{,}5}=11\frac{45}{405}=11\frac{3}{81}=11\frac{1}{9}\end{array}\right.$$

Но $x=20$ - не подх, т.к. т. F и т. C не совпадают по условию.

Значит, $x = 11\frac{1}{9} = AF$

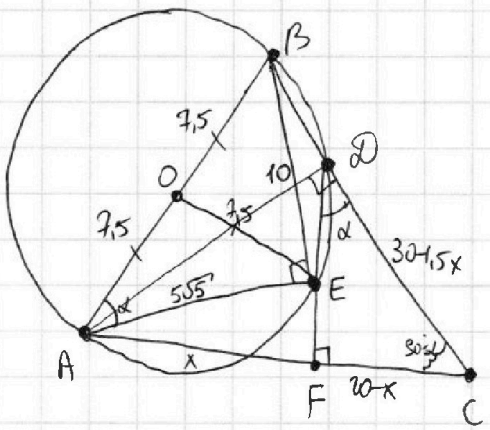
Ответ: $11\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Решение:

Пусть O-центр окр. ω ⇒
⇒ $AO = OB = \frac{AB}{2} = 7,5$ – как радиусы

$\angle AEB = 90°$, т.к. впис. и опир на диаметр AB

$OE = AO = OB = 7,5$ – как радиусы

• По т. Пифагора для △ABE:

$AE = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{225-100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

• Пусть $\angle BAE = \alpha$, тогда $\angle FDC = \alpha$ – т.к. ABDE – вписанный; $\angle DCF = 90 - \alpha$.

• $\triangle ABE \sim \triangle DCF$ (по 2-ум углам) ⇒ $\frac{AB}{DC} = \frac{BE}{CF} = \frac{AE}{DF}$

Пусть $AF = x$, тогда $FC = 20 - x$.

• Из треуг. ABE:

$\cos\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\alpha = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

• В треуг. DFC:

$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha = \frac{DF}{DC} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow DF = \frac{\sqrt{5}\cdot DC}{3} = \frac{\sqrt{5}\cdot(30-1,5x)}{3}$

• В треуг. DFC:

$\sin\alpha = \frac{FC}{DC} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow DC = \frac{FC\cdot 3}{2} = \frac{(20-x)\cdot 3}{2} = \frac{60-3x}{2} = 30 - 1,5x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего n коробок, в которые кладут шарики.

1) Было (игрок откр. ~~по~~ 5 коробок):

• всего комбинаций: C_n^3

• $\underbrace{OOOOO}_{\text{5 коробок открыли}}$

$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ – ~~различных~~ комбинаций с 1 открытия 5-ти коробок

Значит, P_1(„все три шарика в коробках") $= \frac{10}{C_n^3}$

2) Стало (игрок откр. 8 коробок):

• всего комбинаций – C_n^3

• $\underbrace{OOOOOOOO}_{\text{8 коробок}}$

$C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6}} = 56$ – комбинаций с одного открытия 8-коробок.

Значит, P_2(„все три шарика в коробках") $= \frac{56}{C_n^3}$

$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{56}{\cancel{C_n^3}}}{\frac{10}{\cancel{C_n^3}}} = \frac{56}{10} = 5{,}6$ раз увеличилась вероятность выигр.

Ответ: в 5,6 раз

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Продолжим проверку $a=2$:

(1) $x^2-2x-2=0$

$D=4+8=12$

$x_{4,5}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=\left[\begin{array}{l}1+\sqrt{3}=x_5\\1-\sqrt{3}=x_4\end{array}\right.$

(2) $x^2-2x-74=0$

$D=4+296=300$

$x_{1,7}=\frac{2\pm10\sqrt{3}}{2}=\left[\begin{array}{l}1+5\sqrt{3}=x_7\\1-5\sqrt{3}=x_2\end{array}\right.$

x_2	x_4	x_5	x_7
$1-5\sqrt{3}$	$1-\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$	$1+5\sqrt{3}$

Арифмети. прогрессия с $d=2\sqrt{3}$, $a_1=1-7\sqrt{3}$ — подходит.

Ответ: при $a=2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(1) $x^2-(a^2-a)x+\frac{2-a^3}{3}=0$

• Пусть корни этого уравн.: x_4, x_5

(2) $2x^2-(a^3-a^2)x-2a^6-8a-4=0$

• Пусть корни этого ур.: x_2 и x_7.

Т.к. x_4, x_5, x_2, x_7 – являются членами непост. арифм. прогрессии $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ они все различны и представимы в виде:

$\overset{1\text{-ый}}{a_1}$ $\overset{2\text{-ой}}{a_1+d}$ a_1+2d $\overset{4\text{-ый}}{a_1+3d}$ $\overset{5\text{-ый}}{a_1+4d}$ a_1+5d $\overset{7\text{-ой}}{a_1+6d}$, где

a_1 – первый член прогр.

d – шаг прогр. $d \neq 0$

~~Заметим, что~~ По условию: $x_4=a_1+3d$, $x_5=a_1+4d$ и $x_2=a_1+d$, $x_7=a_1+6d$

Заметим, что $\boxed{x_4+x_5=x_2+x_7}=2a_1+7d$.

По т. Виета для ур. (1):

$x_4+x_5=a^2-a$

По т. Виета для ур. (2):

$x_2+x_7=\frac{a^3-a^2}{2}$

Т.е. $x_4+x_5=x_2+x_7$: $a^2-a=\frac{a^3-a^2}{2} \Leftrightarrow 2a^2-2a=a^3-a^2$

$a^3-3a^2+2a=0 \mid :a\neq 0$

$a^2-3a+2=0$

$a^2-a-2a+2=0$

$a(a-1)-2(a-1)=0$

$(a-1)(a-2)=0$

$a=1$ или $a=2$

! Сразу проверим $a=0$:

(1) $x^2+\frac{2}{3}=0$ – нет корней $\Rightarrow a=0$ – не подх.

(2) $2x^2-4=0$

Проверим $a=1$:

(1) $x^2+\frac{1}{3}=0 \to$ нет корней $\Rightarrow a=1$ – не подх.

(2) $2x^2-2-8-4=0$

Проверим $a=2$:

(1) $x^2-2x-2=0$

(2) $2x^2-(8-4)x-\underbrace{2^7}_{128}-16-4=0$

$2x^2-4x-198=0 \mid :2$

$x^2-2x-99=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

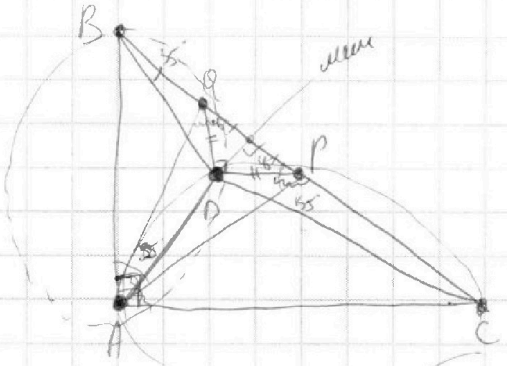
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



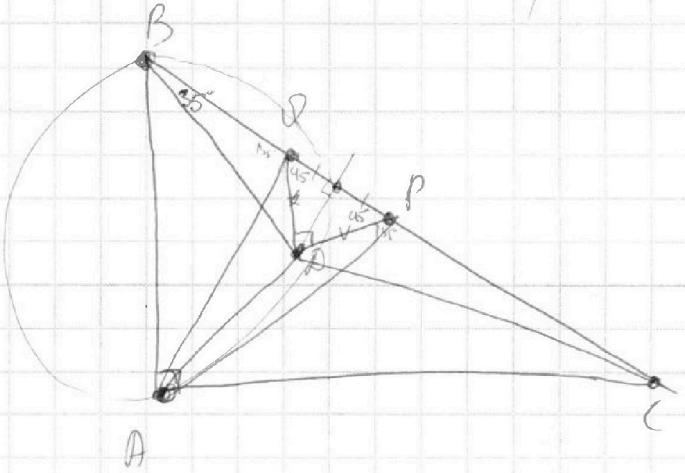
$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 = z(z+4) = xy \\ yz = 4x + x^2 = x(x+4) = yz \\ zx = 4y + y^2 = y(y+4) = zx \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2}$$

$$\begin{cases} xy = z(z+4) \\ yz = x(x+4) \\ zx = y(y+4) \end{cases}$$

$$\frac{x^2y^2}{z^2} = (z+4)^2$$

$$\left(\frac{yz}{x}\right)^2 = (x+4)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

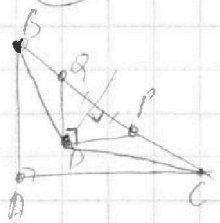
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4+xy = 4z+z^2+4 \\ 4+yz = 4x+x^2+4 \\ 4+zx = 4y+y^2+4 \end{cases}$$

$(x+4)^2+(y+4)^2+(z+4)^2 =$

$= (x^2+8x+16)+(y^2+8y+16)+(z^2+8z+16) =$

$= x^2+y^2+z^2+8(x+y+z)+48$



$x^2+y^2+z^2+8(x+y+z) \to$ найти, или

$xy+yz+zx = x^2+y^2+z^2+4(x+y+z)$

$4(x+y+z) = xy-z^2+yz-x^2+zx-y^2$

$-x^2-y^2-z^2+2xy+2yz+2zx$

$4+xy = (z+2)^2$

$$\begin{cases} xy = z(z+4) \\ yz = x(x+4) \\ zx = y(y+4) \end{cases}$$

$x^2y^2z^2 = \cancel{xyz}\,(z+4)(x+4)(y+4)$

$(xyz)^2 = (z+4)^2(x+4)^2(y+4)^2$

$(z+4)^2 = z^2+8z+$

$$\begin{cases} 4z+xy+16 = 4z+z^2+4z+16 \\ 4x+yz+16 = 4x+x^2+4x+16 \\ 4y+zx+16 = y^2+4y+\underbrace{16+4y} \end{cases}$$

$z^2+4z+4z+16$

$(x+4)^2+(y+4)^2+(z+4)^2 = 4(x+y+z)+xy+yz+zx+48$

$4(x+y+z) = xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2$

$(x+4)^2+(y+4)^2+(z+4)^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) =$

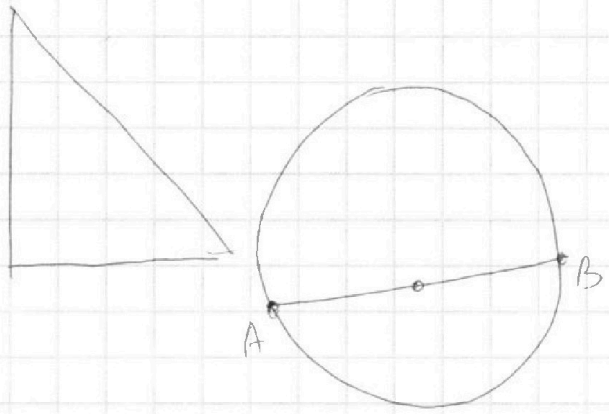
$= (x+y+z+12)^2-2($

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\alpha =$

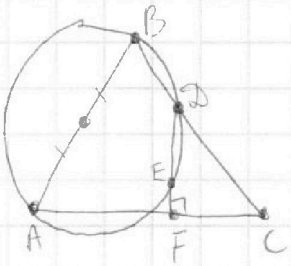
$\cos\alpha =$

$\sin(90-\alpha) =$

$\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{DF}{DC}$

$DF = \frac{\sqrt{5}\cdot(20-3x)}{3}$

AB можем найти?



$\sqrt{15^2-10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

$\frac{DF}{DC} = \frac{AE}{AB}$

$\sqrt{25-x^2}$

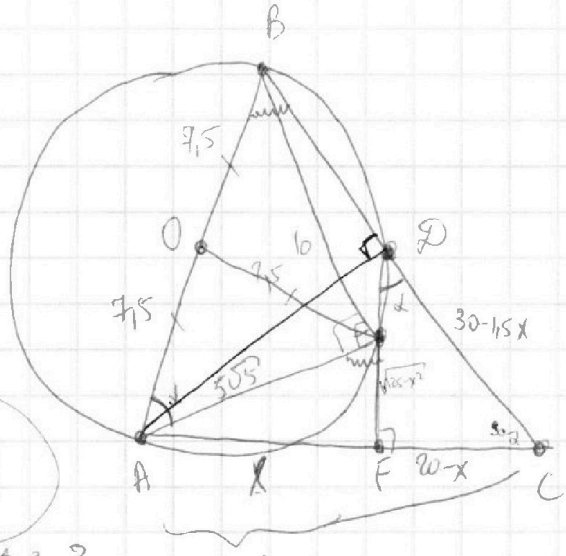
DCF

$\triangle ABE \sim \triangle$ ~~CDF~~

$90-\alpha+\beta+\alpha+\beta = 180$

2β

~~$90-\beta+\alpha+\beta+90-\alpha=180$~~



$\sin\alpha = \frac{10}{15}$

$\cos\alpha =$

$\frac{20-x}{DC} = 10\alpha$

$\frac{100}{112,5} - 1 = -\cos\alpha$

$2DC = 60-3x$

$\cos\alpha = -\frac{100}{112,5}$

$DC =$

$\frac{DF}{DC} =$

$BE^2 = BO^2 + OE^2 - 2BO\cdot OE\cdot\cos\alpha$

$100 = 2\cdot 7,5^2 - 2\cdot 7,5^2\cdot\cos\alpha$

$100 = 2\cdot 7,5^2(1-\cos\alpha)$

$75 \times 7,5$

75×75

375

525

$56,25 \times 2$

$112,50$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$n = \underbrace{99\ldots9}_{25000}$ $\quad n^3 -$

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + 1 + 3n\underbrace{(n+1)}_{\underbrace{100\ldots0}_{26000}}$

$3n\underbrace{(n+1)}_{10} = \underbrace{100\ldots0}_{\underbrace{30\ldots0}_{27000}} \cdot 3 \cdot n = \underbrace{300\ldots0}_{25000} \cdot n =$

$\overset{2\ 2\ 2}{99\ldots99}00\ldots0$

$\times \quad 3$

$29\ldots9970\underbrace{\ldots00}_{21000} + 1 = 29\ldots997\underbrace{00\ldots0}_{25000} + 1$

$3n\underbrace{(n+1)}_{\underbrace{10\ldots0}_{25000}} = \underbrace{300\ldots0}_{25000} \cdot n =$

$\overset{2\ 2\ 2\ 2}{99\ldots9999}00\ldots0$

$\times \quad 3$

$\underbrace{29\ldots997}_{24998}\underbrace{0\ldots00}_{21000}$

Т.е. $\underbrace{29\ldots997}_{24998}\underbrace{00\ldots0}_{25000} + 1 = \underbrace{29\ldots997}_{24998}\underbrace{00\ldots01}_{24999}$

75000 → нулей

$\underbrace{100\ldots0}_{75000} = n^3 + \overset{1\ 1\ 1\ 1\ 1}{29\ldots97}\underbrace{00\ldots01}_{25000}$

$10\ldots002\underbrace{9\ldots99}_{25000}$

$$\begin{array}{r} \overbrace{100\ldots0}^{29000}\underbrace{00\ldots0}\underbrace{00.00} \\ - \quad 2\underbrace{9\ldots97}\underbrace{00.01} \\ \hline \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases} \rightarrow \quad x^2+y^2+z^2+4(x+y+z) = xy+yz+zx$$

$$(x+4)^2+(y+4)^2+(z+4)^2 = (x^2+8x+16)+(y^2+8y+16)+(z^2+8z+16)$$

$$z^2+x^2+y^2+4(x+y+z) = xy+yz+zx$$

$$(x^2+4x)+(z^2+(4z))+(y^2+4y) = xy+yz+zx$$

$$\underbrace{(x^2+4x)+(y^2+4y)+(z^2+4z)}_{xy+yz+zx} + 4x+16+4y+16+4z+16 =$$

$$= \cancel{(4x+xy+16)+(4y+} \; 4(x+y+z)+48+\cancel{xy+z} \; xy+yz+zx$$

$$(x+4)^2+(y+4)^2+(z+4)^2 = x^2+y^2+z^2+8x+8y+8z+16+16+16 \text{ — найти — ?}$$

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2+4(x+y+z)}_{xy+yz+zx} + 4(x+y+z)+16+16+16 = 4(x+y+z)+48+xy+yz+zx =$$

$$= 4x+xy+4y+yz+4z+zx+48$$

$z(z+4)$

$$4x(y+4)+y(z+4)+z(x+4)+48$$

$\frac{1}{2}x^2 = xy+\frac{1}{2}y^2$

$z($

$$4x+4y+4z+xy+yz+zx+48$$

$$x^2+y^2+z^2+4(x+y+z)-xy-yz-zx=0$$

$$\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}x-\sqrt{\tfrac{1}{2}}y\right)^2+\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}y-\sqrt{\tfrac{1}{2}}z\right)^2+\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}z-\sqrt{\tfrac{1}{2}}x\right)^2 = -4(x+y+z)$$

$$4x+xy+4y+yz+4z+zx+48 = -4(x+y+z)$$

$$xy+yz+zx-\frac{1}{2}(x-y)^2-\frac{1}{2}(y-z)^2-\frac{1}{2}(z-x)^2 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X		

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2+y^2+z^2+4(x+y+z)=xy+yz+zx$ $\quad (x+4)^2+(y+4)^2+(z+4)^2=$

$\cancel{\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2=-4(x+y+z)}$ $\quad =x^2+8x+16+y^2+8y+16+z^2+8z+16$

$48+8(x+y+z)+x^2+y^2+z^2$ - найти

$\underbrace{x^2+y^2+z^2+4(x+y+z)}_{xy+yz+zx}=\cancel{-4(x+y+z)}$

$\cancel{xy+yz+zx+4(x+y+z)+48}$

$(x-y-z)(x+y-z)=$

$+48$ $\quad xy+yz+zx+4(x+y+z)$ — ? $\quad =x^2-xy-zx+y^2+yz$

$xy-z^2+yz-x^2+zx-y^2$

$z(z+4)=xy$

$2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2=\cancel{(x+y+z)^2-2xy-2yz-2zx)}=$

$x^2+y^2+z^2+z(x+y+z)$

$=4(x$

$\cancel{x^2+y^2+z^2+z(x+z)+z}$

$x(x+8)+y(y+8)+z(z+8)=\cancel{x(x+4)}$

$x(x+4)+4x+y(y+4)+4y+z(z+4)+4z=\boxed{xy+yz+zx+4(x+y+z)}$

$\begin{cases}\cancel{\frac{1}{2}xy=2z+\frac{1}{2}z^2}\\ \cancel{\frac{1}{2}yz=2x+\frac{1}{2}xz}\\ \cancel{\frac{1}{2}zx=2y+\frac{1}{2}yz}\end{cases}$ $\quad 2(xy+yz+zx)-x^2-y^2-z^2$

$-((x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx))$

25000 — „8"

$\underbrace{88\ldots88}_{25000}=n$

$\text{НЕ}\ (n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1=n^3+3n(\underbrace{n+1}_{\underbrace{100\ldots0}_{26000}})+1$

$\underbrace{100\ldots0}_{\cancel{26000}}$

$=78000$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ корзины}}$

a_1 (2ой) a_1+d a_1+2d a_1+3d (4ый) a_1+4d (5ый) a_1+5d a_1+6d (7ой)

Было:

~~$2a_1+7d=2a_1+7d$~~ — сумма равна

всего комбинаций: C_n^3

$x^2-9x+14=0$

$\underbrace{00000}_{C_5^3=10}$ $\frac{10}{C_5^1}$ — вероятность ~~равна~~

сколько успешных событий:

$D=4+256=300$

~~Пусть~~ $10\frac{3}{C_n^3}$ — было 8!, если 8! 3 шара

$x_{1,2}=\frac{9\pm10\sqrt{3}}{2}$

$1\pm5\sqrt{3}$

$C_8^3=\frac{8!}{5!\cdot3!}=\frac{8\cdot7\cdot6}{6}$

$\frac{10}{C_n^3}$ — было

$\frac{56}{C_n^3}$ — стало

$\frac{\frac{56}{C_n^3}}{\frac{10}{C_n^3}}=5{,}6$ раз

$x^2-(a^2-a)x+\frac{2-a^3}{3}=0$ → корни 4,5 числа

~~Пусть~~ $x_1+x_2=a^2-a$

$\parallel$

$x_3+x_4=a^3-a^2$

$2a^2-2a=a^3-a^2$

$a^3+3a^2+2a=0$

$x^2-9x-2=0$

$a^3-a^2=a^2-a$

$D=4+8=12$

~~$a^3-a^2-a^2+a=0$~~

$x^2-(4-2)$

$x_{1,2}=\frac{9\pm2\sqrt{3}}{2}$ $\begin{cases}4+\sqrt{3}\\4-\sqrt{3}\end{cases}$

$a^3-2a^2+a=0$

$\frac{2-8}{3}$

$1+\sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ... ○

n коробок

Было:

C_n^3 – всего комбинаций

Игрок: C_n^5 – может открыть коробок

$P(\text{„угадал"}) = \frac{\text{успешных}}{\text{всего} = C_n^3} = \frac{y}{C_n^3} = \frac{10}{C_n^3} = \frac{10}{C_n^3}$

успешных $= \frac{10}{C_n^3}$

○○○○○

$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

C_n^5 – он может выбрать

$\frac{10}{C_n^3} \cdot C_n^5$

$\frac{10 \cdot C_n^5}{(C_n^3)^2}$ – было

Стало:

○○○○○○○○

$C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$

$\frac{56 \cdot C_n^3}{(C_n^3)^2}$

$\frac{C_n^6}{C_n^5} = \frac{\frac{n!}{(n-8)!\,8!}}{\frac{n!}{5!\,(n-5)!}}$

$\frac{\frac{10 \cdot C_n^5}{(C_n^3)^2}}{\frac{56 \cdot C_n^3}{(C_n^3)^2}} =$

$= \frac{10 \cdot C_n^5}{56\, C_n^3} = 10.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

630
×630
189
378
396900

63

630
×630
189
378
396900

20,25 4 = 81

4500
×81
14500
36000
405000

405 | 5
81

9

45

45
×9
405

450

396900
−405000
324000

4500
×81
4500
36000
364500

336900
−364500
32400

1
630
+180
810

630
−180
450

18
×18
144
18
24

4500 | 405
−405 | 11
450
−405
45

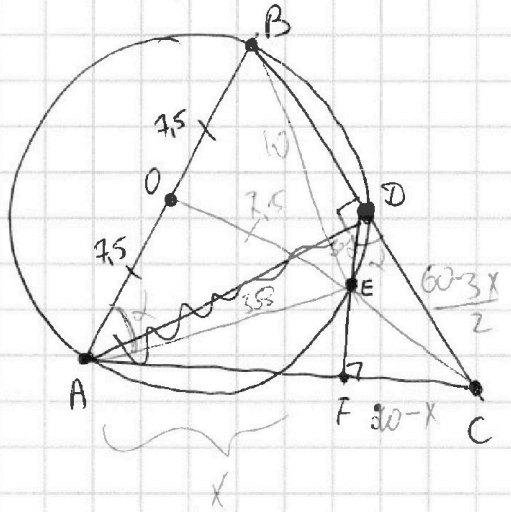
4500 | 405
−405 | 11
450
−405
45

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X		

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Решение:

Пусть O – центр окр. ω ⇒
⇒ $AO = OB = \frac{AB}{2} = 7{,}5$ – как радиусы

$\angle ADB = 90°$, т.к. вписан опир. на диам. AB.

$\sin\alpha = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$\frac{FC}{DC} = \frac{2}{3}$

$\frac{20-x}{DC} = \frac{2}{3}$

$DC = \frac{60-3x}{2}$

$5(30-1{,}5x)^2 = 3x(20-x)$

$5(900-90x+2{,}25x^2) = 180x - 3x^2$

$4500 - 450x + 12{,}25x^2 = 180x + 3x^2$

$21{,}25x^2 - 630x + 4500 = 0$

$D = 630^2 - 85 \cdot 4500$

4500 × 85 = 382500

45 × 85 = 225 + 360 = 382500

630 × 63 = 189000 + 378 = 40680

382500

406800 − 382500 = 24400

$\sqrt{100 \cdot 244}$

2,25 × 15 = 11,1

21,25 × 4 = 85,00