



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

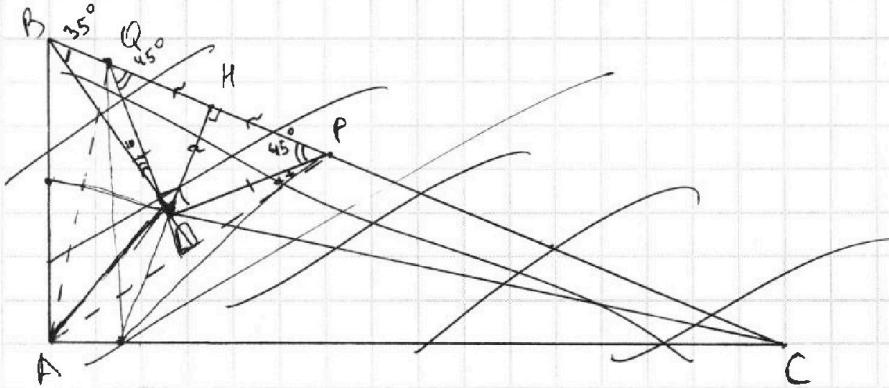
2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E – точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В теленгрире ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leqslant 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

сложим систему и получим:

$$xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z \quad | \cdot 2$$

$$2xy + 2yz + 2zx = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x + 8y + 8z$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + 8(x + y + z) = 0$$

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 + 8(x+y+z) = 0$$

ПЕРЕД РАСКРОЕМ скобки в данном в условии выражениии

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 48$$

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \frac{xy}{z} \\ y+z = \frac{yz}{x} \\ z+x = \frac{xz}{y} \end{cases} \leftarrow x, y, z \neq 0$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{xz}{y}\right)^2 =$$

$$\frac{(xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2}{(xyz)^2} = \cancel{\frac{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}{(xyz)^2}} \cancel{\frac{x^4 y^4 z^4 \cdot (x+y)^4 \cdot (y+z)^4 \cdot (z+x)^4}{(xyz)^2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАМЕТИМ, ЧТО $n = \underbrace{999\dots9}_{\text{9}}$ $\Rightarrow n = 10^{25000} - 1$

$$\begin{aligned}
 n^3 &= (10^{25000} - 1)^3 = (10^{25000} - 1)(10^{25000} - 1)^2 = (10^{25000} - 1)(10^{50000} - 2 \cdot 10^{25000} + 1) = \\
 &= 10^{75000} - 2 \cdot 10^{50000} + 10^{25000} - 10^{50000} + 2 \cdot 10^{25000} - 1 = \\
 &= 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1 = (10^{75000} - 1) - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} \quad (=)
 \end{aligned}$$

$$(10^{75000} - 1) = \underbrace{9999\dots99}_{75000} ; 3 \cdot 10^{50000} = \underbrace{30000\dots0}_{50000} ; 3 \cdot 10^{25000} = \underbrace{3000\dots0}_{25000}$$

$$\textcircled{=} \quad \underbrace{99999\ldots999}_{75000} - \underbrace{30000\ldots0}_{50000} + \underbrace{300000\ldots0}_{25000}$$

$$\begin{array}{r}
 9999\dots99 - 3000\dots00 = 999\dots96999\dots9 \\
 \underline{75000} \quad \underline{50000} \quad \underline{50000} \\
 29999 \quad 50000 \\
 + 9999\dots96999\dots999 \\
 \underline{300\dots000} \\
 \underline{25000} \\
 \hline
 99\dots999700029;99999 \\
 \underline{29999} \quad \underline{25000}
 \end{array}$$

(ПОСЛЕДНИЕ 50000
 "9" ОСТАНУТСЯ Т.К. НА
 КОНЕЦ 3.10⁵⁰⁰⁰ 50000,,0")

$$49999 + 25000 = 49\ 999 \quad \text{к.девяносто}$$

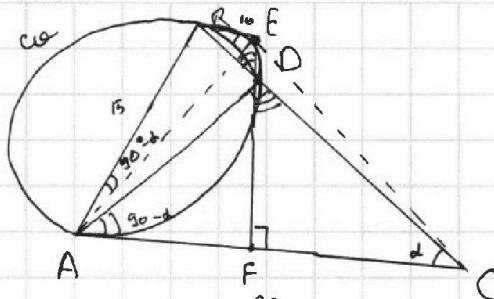
① TBET : 49999

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Т.к. AB - диаметр $\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$ (КАК ВЛІСАННІЙ, ОПИР-СЯ НА ДІАМЕТР)

ТОРДА $\triangle ABE$ - ПРЯМОУГОЛЬНИЙ, ПРИЧЕМ AB -ГІПОТЕНУЗА. ТОРДА ПО Т. ПИФАГОРА:

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

2) Пусть $\angle ACB = \alpha$; $\angle ADB = 50^\circ$ (КАК ВЛІСАННІЙ, ОПИР-СЯ НА ДІАМЕТР.)
 $\Rightarrow \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow$ из $\triangle ADC$: $\angle DAC = 180^\circ - \angle ADC - \angle DCA = 90^\circ - \alpha$
 из $\triangle CFD$: ($DF \perp AC$ по ЧСР $\Rightarrow \angle DFC = 90^\circ$) $\angle CDF = 90^\circ - \alpha$
 т.к. F, D, E - одна пряма и C, D, B - одна пряма, то $\angle FDC = \angle EDB = 90^\circ - \alpha$ (КАК ВЕРТИКАЛЬНІ)

$$ABED - \text{вліс.} \Rightarrow \angle EDB = \alpha \angle EAB = 50^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \angle EAB = \angle DAC = 90^\circ - \alpha$$

$$3) \text{ из прямоугольного } \triangle ABE: \sin \angle BAE = \frac{BE}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\angle BAE = \angle DAC \quad \cos \angle BAE = \frac{AE}{AB} = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{т.к. из п. 2) } \angle EAB = \angle DAC, \text{ то } \sin \angle BAE = \sin \angle DAC = \frac{2}{3} \\ \cos \angle BAE = \cos \angle DAC = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{5}}{3}$$

4) РАССМОТРИМ ПРЯМОУГОЛЬНИЙ $\triangle ADC$ ($\angle ADC = 90^\circ$), AC - ГІПОТЕНУЗА

$$CD = \sin \angle DAC \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot 20 = \frac{40}{3}$$

$$AD = \cos \angle DAC \cdot AC = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot 20 = \frac{20\sqrt{5}}{3}$$

5) из ПРЯМОУГОЛЬНОГО $\triangle FDC$ ($\angle DFC = 90^\circ$) НАЙДЕМ DF

$$DF = CD \cdot \cos \angle CDF$$

$$\angle CDF = 90^\circ - \alpha = \angle DAC \Rightarrow \cos \angle CDF = \cos \angle DAC = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow DF = CD \cdot \cos \angle CDF = \frac{40}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{40\sqrt{5}}{9}$$

6) из ПРЯМОУГОЛЬНОГО $\triangle AFD$ ($\angle AFD = 90^\circ$)

$$AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} \text{ (по Т. ПИФАГОРА)}$$

$$\Rightarrow AF = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{40\sqrt{5}}{9}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{40\sqrt{5}}{9}\right)^2} \left(\frac{20\sqrt{5}}{3} + \frac{40\sqrt{5}}{9}\right) =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{60\sqrt{5}}{9} - \frac{40\sqrt{5}}{9}\right) \left(\frac{60\sqrt{5}}{9} + \frac{40\sqrt{5}}{9}\right)} = \sqrt{\frac{20\sqrt{5}}{9} \cdot \frac{100\sqrt{5}}{9}} = \sqrt{\frac{100^2}{9^2}} = \frac{100}{9} =$$

$$= 11\frac{1}{9}$$

ОТВЕТ: $11\frac{1}{9}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА 3. Арики сидят в коробки в кот-е положили шарики. Пусть всего коробок n штук. Рассмотрим сначала сколько существует наборов состоящих из 5-и коробок кот-е содержит 3 коробки с шариками. Это количество равно количеству способов выбрать 2 коробки из $n-3$ т.к.

3 заданных коробки однозначно состоят в наборе, тогда останется $n-3$ коробки из которых мы должны выбрать 2 чтобы получить набор из 5-и коробок. Сделать это есть ровно C_{n-3}^2 способа. Причём всего таких наборов (наборов из любых 5 коробок) ровно C_n^5 . Тогда вероятность выигрыша a_1 в первом случае:

$$a_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

Аналогично расчитаем сколько наборов подходит нам во втором случае для победы. У нас также есть 3 коробки с шариками, кот-е точно попадают в набор, но теперь нам надо выбрать ещё 5 коробок из $n-3$, чтобы дополнить набор до 8 коробок, поэтому подходящих наборов ровно C_{n-3}^5 , а всего наборов из 8 коробок C_n^8 . Тогда вторая вероятность a_2 равна: $a_2 = \frac{C_{n-3}^5}{C_n^8}$

Тогда посчитаем во сколько раз a_2 больше a_1 :

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \frac{\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8}}{\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}} = \frac{C_{n-3}^5 \cdot C_n^5}{C_n^8 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5} = 5,6 \end{aligned}$$

ОТВЕТ: в $\frac{28}{5}$ раз

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

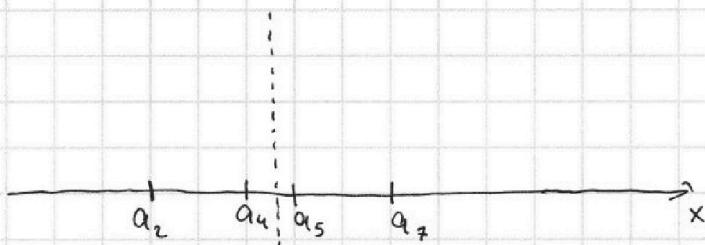


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим ось Ox и начнём на неё 2, 4, 5, 6, 7 члены арифметической прогрессии. Пусть первый член равен a_1 , i -й член равен a_i ; d — разность прогрессии.



Заметим, что a_4 и a_5 и a_6 и a_7 симметричны относительно прямой $x = a_5 + 3,5d$. И правда от a_2 до $x = a_5 + 3,5d$ расстояние по оси Ox равно $2,5d$, аналогично для a_7 , а для a_4 и a_5 это расстояние равно $0,5d$. Т.к. a_4 и a_5 — корни квадратного уравнения, то они симметричны относительно симметрии графика этого уравнения, тогда т.к. a_4 и a_5 симметричны относительно $x = a_5 + 3,5d$, то это и есть ось симметрии параболы являемся графиком уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{4} = 0$ (1)

аналогично получаем, что $x = a_5 + 3,5d$ — ось симметрии параболы $2x^2 - (a^2 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ (2)

тогда координаты вершин по оси Ox обеих парабол равны.

по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$ найдём вершины парабол (1) и (2)

для (1): $x_0 = \frac{a^2 - a}{2}$ для (2): $x_0 = \frac{a^3 - a^2}{4}$, тогда т.к. мы доказали,

что абсциссы вершин обеих парабол равны, то

$$\frac{a^2 - a}{2} = \frac{a^3 - a^2}{4} \quad | \cdot 4$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 2a = a^3 - a^2$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$a(a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = 2$$

$\Rightarrow a$ может принимать только значения 0, 1, 2

Поставим и проверим каждое значение:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1) $a=0$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = x^2 + \frac{2}{3} \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3} \quad ? \quad (x^2 \geq 0)$$

2) $a=1$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = x^2 + \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \quad ? \quad (x^2 \geq 0)$$

3) $a=2$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = x^2 - 2x - \frac{6}{3} = x^2 - 2x - 2 = 0$$

Корни данного уравнения:

$$D = 2^2 + 4 \cdot 2 = 12$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

$$2x^2 - (a^2 - a)x - 2a^2 - 8a - 4 = 2x^2 - 4x - 148 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 148 = 0 \quad (:2)$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$D = 2^2 + 4 \cdot 74 = 4 + 296 = 300$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2 + \sqrt{300}}{2} = 1 + 5\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{300}}{2} = \frac{2 - 10\sqrt{3}}{2} = 1 - 5\sqrt{3}$$

Остается проверить что полученные корни являются членами
общей и той же арифметической прогрессии. Пусть $a_4 = 1 - \sqrt{3}$; $a_5 = 1 + \sqrt{3}$
тогда $d = a_5 - a_4 = 2\sqrt{3} \Rightarrow a_2 = a_4 - 2d; a_7 = a_5 + 2d:$
 $\Rightarrow a_2 = a_4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 1 - 5\sqrt{3}$ (является корнем второго
уравнения)
 $a_7 = a_5 + 2 \cdot 2\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 1 + 5\sqrt{3}$ (является корнем второго
уравнения)
 $\Rightarrow a=2$ подх.

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

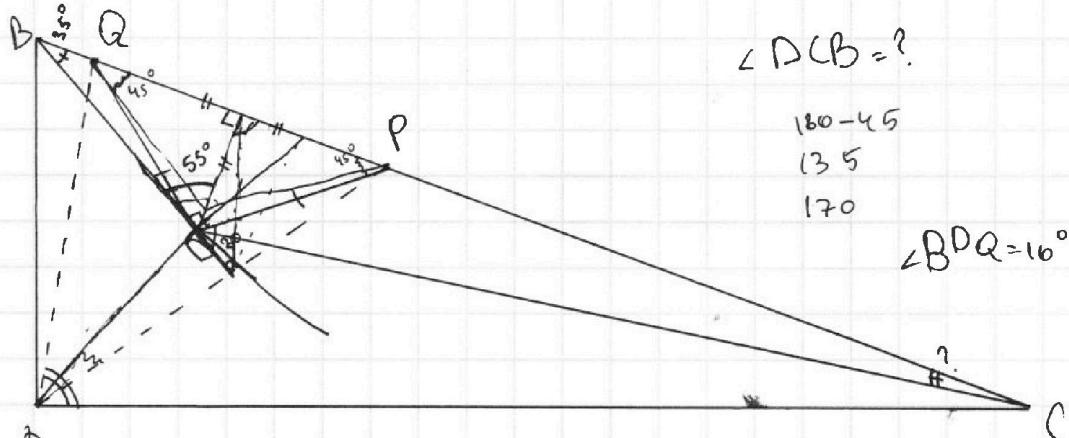


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

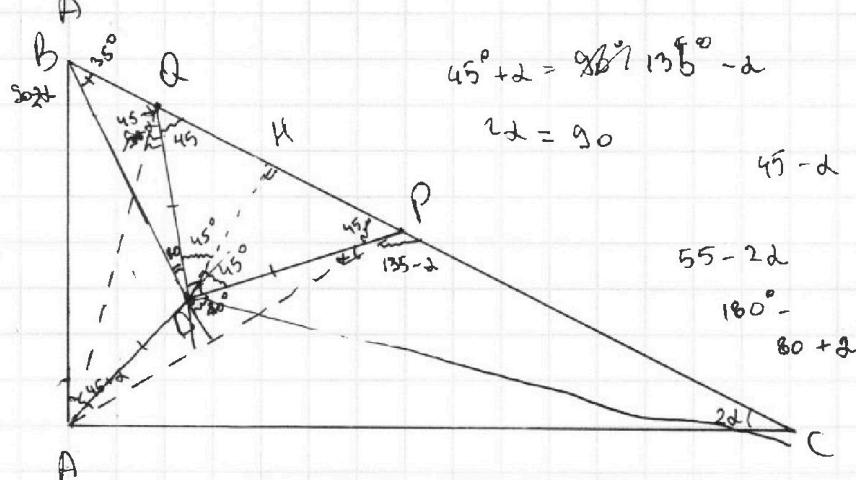
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.)



A



$$xy = 4z + z^2$$

$$yz = 4x + x^2$$

$$zx = 4y + y^2$$

искомое равно

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{xz}{y}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2$$

$$\frac{(4z+z^2)^2}{xyz^2} = \frac{16z^2+8z^3+z^4}{xyz^2} = \frac{16z+8z^2+z^3}{xy}$$

~~$(xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4$~~

$$\frac{(xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4}{x^2y^2z^2}$$

$$= 2x^2y^2z^2$$

$$- 2x^2 - 2y^2 - 2z^2$$

$$y(z-x) = 4(x+y+z) - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2$$

$$4z + 4x + 4y + x^2 + y^2 + z^2 =$$

$$= 4(x+y+z) + ((x+y+z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz)$$

$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x}\right)^2 = \dots$$

$$\left(\frac{(xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2}{xyz}\right)^2 = \dots$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть всего коробок n штук

Кол-во способов выбрать 3 коробки куда положат царяки C_n^3

Кол-во способов выбрать 5 коробок ровно C_n^5

из этих ↗

нам подходят наборы из 3-х выбранных заранее коробок и еще каких-то двух

поскольку таких наборов столько, сколько

способов выбрать 2 коробки из $n-3$

$$\text{т.е. } C_{n-3}^2$$

$$\Rightarrow \text{Вероятность выигрыша } \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

если он выбирает в коробок то благоприят. исходов

$$C_{n-3}^5 \Rightarrow \text{искомая разница: } \frac{C_{n-3}^5}{C_n^5}, \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{C_{n-3}^5}{C_{n-3}^2}$$

$$\frac{(n-3)(n-2)}{2} \cdot \frac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2} = \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{60}$$

Проверим для $n=8$

~~$$C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$~~

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\Rightarrow \text{вероятность } 1 = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

~~$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 336$$~~

~~$$C_5^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$~~

вероятно что $2 = 1$

$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-3)(n-4)}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-3)(n-4)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$xy = z(4+z)$$

$$yz = x(4+x)$$

$$zx = y(4+y)$$

$$= \frac{xy}{z} = (4+z)$$

$$\frac{yz}{x} = (x+4)$$

$$\frac{zx}{y} = (y+4)$$

$$xy = 4z + z^2$$

$$xy = z(4+z)$$

$$z = \frac{xy}{4+z}$$

$$x, y, z \neq 0$$

СИСТЕМА ИМЕЕТ 21 РЕШ. ПРИ
 $x, y, z \neq 0$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = ?$$

$$\left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2 =$$

$$\frac{(yz)^2}{x^2} + \frac{(zx)^2}{y^2} + \frac{(xy)^2}{z^2} =$$

$$= \frac{(yz)^4 + (zx)^4 + (xy)^4}{x^2 y^2 z^2} =$$

$$= \frac{z^4(z+4)^4 + y^4(y+4)^4 + x^4(x+4)^4}{x^2 y^2 z^2} =$$

$$= z^4(z+4)^4 + y^4(y+4)^4 + x^4(x+4)^4$$

$$xyz(z+4)(y+4)(x+4)$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16 =$$

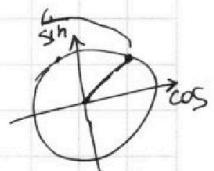
$$= x(x+8) + y(y+8) + z(z+8) + 48$$

$$\sin ADE = \sin(90 + EDB)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos EDB = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

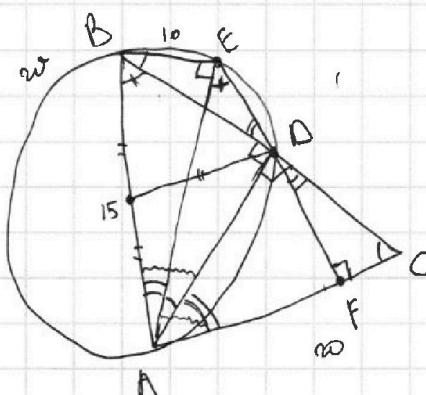
$$\cos EDB = \frac{15}{5\sqrt{5}} = \frac{3}{5\sqrt{5}}$$



$$-\cos EDB$$

$$n = \dots 99999 \dots 999$$

$\underbrace{}_{25000 \text{ ",9"}}$



$$\begin{array}{r} x \\ \times 9 \\ \hline x 81 \\ \times 9 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle BAE} =$$

$$\frac{ED}{\sin \angle ADE} = 15$$

$$Af = ?$$

$$AC = 20$$

$$AB = 15$$

$$BE = 10$$

$$\sin \angle ABC =$$

$$\frac{AC}{AB}$$

$$\frac{AC}{AB} =$$

$$\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{20}{\sin \angle ABC} = \frac{15}{\sin \angle ACB}$$

$$\sin \angle BAE = \frac{2}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = z(4+z) \\ yz = x(4+x) \\ zx = y(4+y) \end{cases}$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2$$

$$n = \left(10^{25000} - 1\right)^3$$

$$\left(10^{25000} - 1\right)^3 =$$

$$(x-1)^3 = (x-1)(x^2 - 2x + 1)$$

$$(10^{25000} - 1)^2 = (10^{50000} - 2 \cdot 10^{25000} + 1)(10^{25000} - 1) = \\ = 10^{75000} - 2 \cdot 10^{50000} + 10^{25000} - 10^{50000} + 2 \cdot 10^{25000} - 1$$

$$10^{75000} - 1 = \underbrace{999\dots9}_{75000}$$

$$\underbrace{(10^{25000} - 1)}_{999\dots6\dots9999} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000}$$

$$(10^3 - 1) - 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 = (10^3 - 1) - 3 \cdot 10(10 + 1)$$

$$999 - 300 + 30$$

$$699 = 729$$

$$999999 - 30000 + 300 \\ + \underbrace{999999}_{300} + 300 = 999999$$

$$(x+4)(z-x-4)+y$$

$$xy + yz + zx = 4x + 4y + 4z + x^2 + y^2 + z^2 \quad | \cdot 2$$

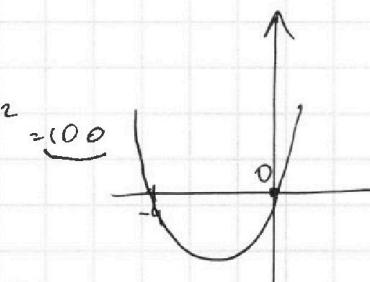
$$2xy + 2yz + 2zx = 8x + 8y + 8z + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = -8(x+y+z)$$

$$x(y+z) + y(u+z) + z(u+x) + 48$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16$$

$$xy + yz + zx + 4x + 4y + 4z + 48$$



$$\begin{array}{r} 699999 \\ + 300 \\ \hline 700299 \end{array}$$

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

700299

7002

