



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 15$ ,  $BE = 10$ .
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$  являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$  являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  по часовой стрелке. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle DBC = 35^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

21

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$x \neq y \neq z \neq 0$$

$$\cancel{(x+y)} A = (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 - ?$$

$$x = \frac{4z + z^2}{y}$$

$$4z^2 + z^3 = 4y^2 + y^3$$

$$4(z-y)(z+y) = (y-z)(y^2 + yz + z^2)$$

$$-4z - 4y = y^2 + z^2 + yz$$

$$y^2 + x^2 + z^2 + 4x + 4z + 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{xy + y + z} \quad xy + yz + zx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y+2)^2 + (x+2)^2 + (z+2)^2 - 12 = 0$$

$$(y+4)^2 + (x+4)^2 + (z+4)^2 - 4x - 4y - 4z - 16 - 16 - 16 = 0$$

$$(y+4)^2 + (x+4)^2 + (z+4)^2 - 4(x+4) + 4(y+4) - 4(z+4) = 0$$

$$\cancel{y(y+4) + x(x+4) + z(z+4) = 0}$$

$$A = 4(x+y+z) + 48 = -y^2 - x^2 - z^2 + 48$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12  
 $n^3 = ?$

$$n = 9999 \dots 9$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{25000}$$

$$n^3 = 9^3 \cdot (10^{25} + 10^{24} + \dots + 10^0)^3 = 729 \cdot \underbrace{(111111 \dots 1)}_{25000}^3 =$$

$$= 729 \cdot \underbrace{1233 \dots 3321}_{24996}$$

Отсюда получаем, что  
из числа будет 25000

Ответ: 25000



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0 \rightarrow a_2 \rightarrow a_7$$

1) По м. Виетта:

$$\begin{cases} a_4 + a_5 = a^2 - a \\ a_4 \cdot a_5 = \frac{2 - a^3}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 + a_7 = \frac{a^3 - a^2}{2} \\ a_2 \cdot a_7 = -a^6 - 4a - 2 \end{cases}$$

2)  $a_n$  - ариф. прогрессия:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_4 &= a_1 + 3d \\ a_5 &= a_1 + 4d \\ a_7 &= a_1 + 6d \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 7d = a^2 - a \\ a_1^2 + 7a_1d + 12d^2 = \frac{2 - a^3}{3} \end{cases}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 7d = \frac{a^3 - a^2}{2} \\ a_1^2 + 7a_1d + 6d^2 = -a^6 - 4a - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Подставим их в гр-я:

Ⓘ  $a = 0$ :  $\begin{cases} x^2 + \frac{2}{3} = 0 \\ 2x^2 - 4 = 0 \end{cases} - \emptyset$

Ⓜ  $a = 1$

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{3} = 0 \\ 2x^2 - 14 = 0 \end{cases} - \emptyset$$

Ⓝ  $a = 2$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 2 = 0 \\ 2x^2 - 4a - 148 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2a - 74 = 0 \end{cases}$$

$$6d^2 = -x + \frac{64}{6} + 8 + x$$

$$d = 2\sqrt{3}$$

$$a_1 = 1 - 7\sqrt{3}$$

Проверка:

$$1 - 14\sqrt{3} + 147 + 14\sqrt{3} - 289 + 144 = -74$$

$$-74 = -74 \text{ верно}$$

Ответ:  $a = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☒

7  
☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \angle CON = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} 3) S_{\varphi} &= 2 \left( \frac{\pi}{4} (R^2 - r^2) + BC \cdot BK + \frac{1}{6} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot CN \cdot ON \right) = \\ &= 2 \left( \frac{\pi}{4} (36^2 - 12^2) + 6 \cdot 18\sqrt{3} + \frac{1}{6} \pi \cdot 12^2 - \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 18 \right) = \\ &= 2 \left( \frac{\pi}{4} \cdot 24 \cdot 48 + 24\pi - 54\sqrt{3} \right) = 26 \cdot 24\pi - 108\sqrt{3} = 664\pi - 108\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \underline{664\pi - 108\sqrt{3}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

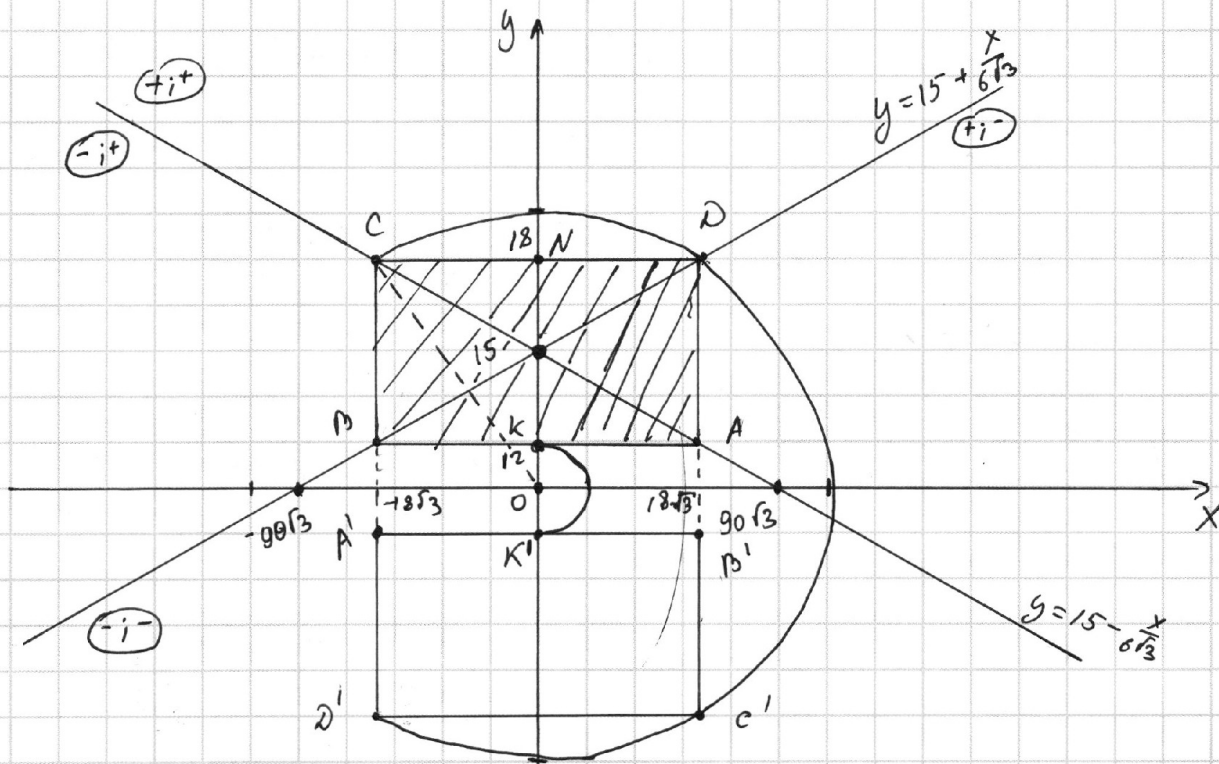
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

$$|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 6$$

$S = ?$



1)  $(+; +): 2y - 30 \leq 6$

$y \leq 18$

2)  $(+; -): x \leq 18\sqrt{3}$

3)  $(-; -): -2y + 30 \leq 6$

$y \geq 12$

4)  $(-; +): x \geq -18\sqrt{3}$

5) из  $ABCD$  в  $A'B'C'D'$  через симметрию отн. м.  $O$

6) Затем, что при таком переносе, каждая точка  $X$  движется по окр. с радиусом

$OX$  и преодолевает расстояние в погловину окр.

Таким образом всегда будет две (в силу симметрии). например  $C$  и  $D$ ;  $A$  и  $B$  (они лежат на одной окр.

7) Итоговая площадь будет площадь фигуры  $KBCD'A'K'$  (ко - мин. радиус,  $CO$  - макс. рад.)

$r = OK = 12$ ;  $CO = \sqrt{KB^2 + NO^2} = \sqrt{18^2 + (18\sqrt{3})^2} = 36 = R$

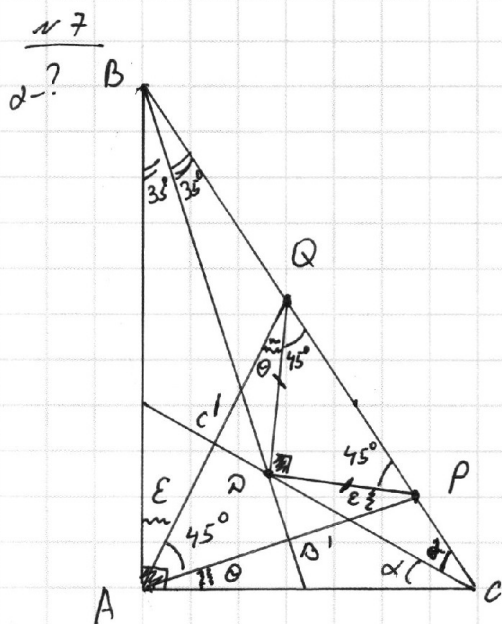


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \triangle ABP - p/d \Rightarrow \angle BAB = \angle BPA = \beta$$

$$\triangle ACQ - p/d \Rightarrow \angle QAC = \angle QCA = \gamma$$

2) Пусть  $\angle QAP = \delta$ , тогда

$$\beta + \gamma - \delta = 90^\circ \Rightarrow \beta + \gamma = 90^\circ + \delta$$

$$\angle AQP + \angle QPA + \angle PAQ = 180^\circ$$

$$\gamma - 45^\circ + \beta - 45^\circ + \delta = 180^\circ$$

$$\gamma + \beta + \delta = 180^\circ \Rightarrow \delta = 45^\circ$$

$$3) \text{ Пусть } \angle APD = \epsilon = \beta - 45^\circ = \angle BAQ$$

$$\angle AQD = \theta = \gamma - 45^\circ = \angle PAC$$

4) Получаем, что  $AQ = AP$

5) ~~то~~

4) Получаем, что

$$AB' = B'P \Rightarrow BB' - \text{биссек.}$$

$$\triangle ABP - p/d$$

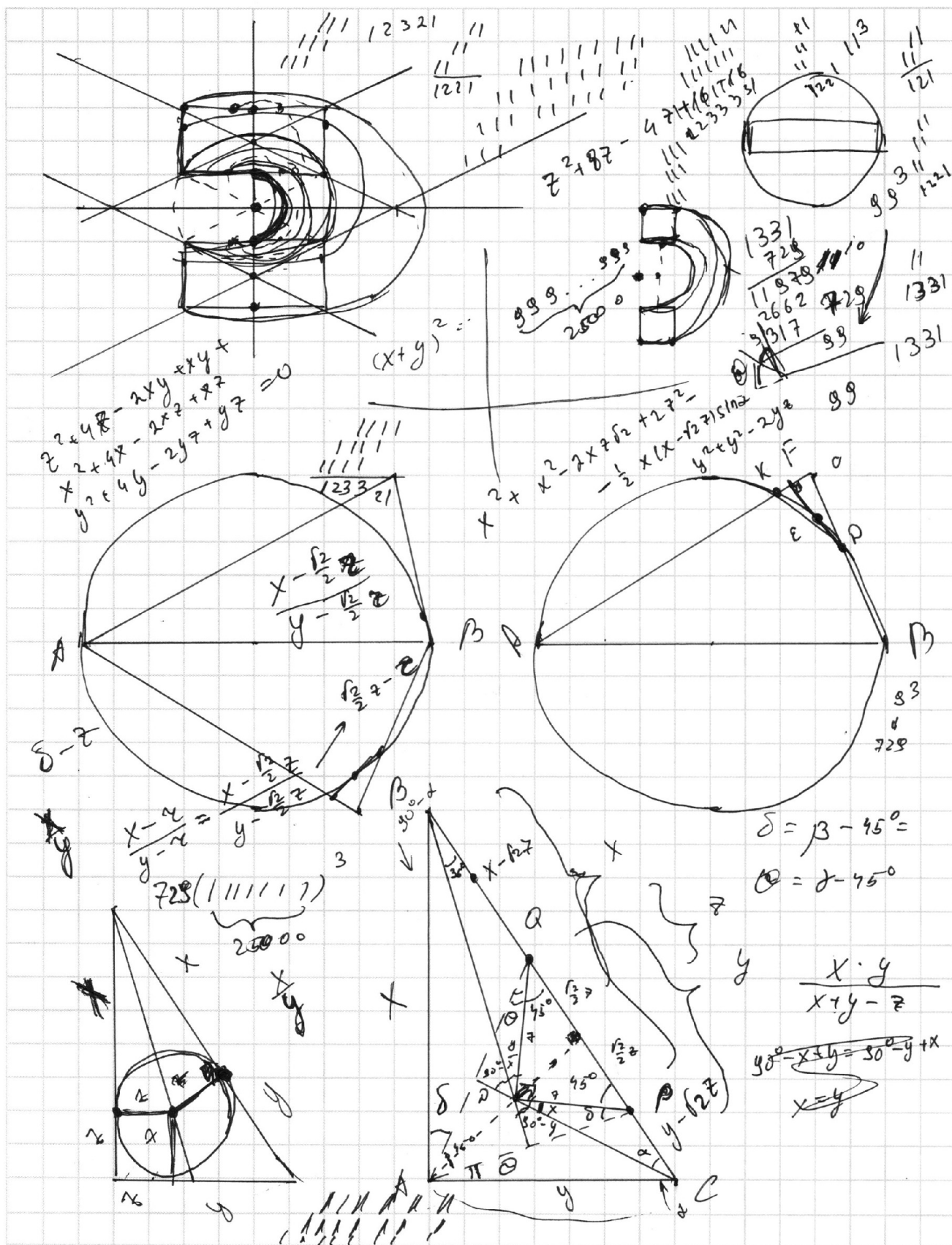
$$\angle AB'B = \angle B'BP = 35^\circ$$

3) Анализируя  $CC'$  - биссектриса

$$2\alpha + 35^\circ \cdot 2 = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ$$

Ответ:  $10^\circ$









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical solution on grid paper, featuring geometric diagrams and algebraic calculations.

**Geometric Diagrams:**

- Top left: A circle with points A, B, C, D, E, F and various lines and angles.
- Top right: A circle with points A, B, C, D, E, F and various lines and angles.
- Middle left: A circle with points A, B, C, D, E, F and various lines and angles.
- Middle right: A circle with points A, B, C, D, E, F and various lines and angles.
- Bottom left: A triangle with points A, B, C, D, E, F and various lines and angles.
- Bottom right: A triangle with points A, B, C, D, E, F and various lines and angles.

**Algebraic Calculations:**

- $4z^2 + z^3 = 4y^2 + y^3$
- $x = 5$
- $y = 5$
- $z = 5$
- $5 \cdot 5 = 4 \cdot 5 + 5$
- $x_0 = -x_0$
- $y = -2$
- $x = -2$
- $y = -2$
- $25 = -20 + 25$
- $5 \cdot 5 = 5$
- $36 - 24$
- $xy + yz + zx = 47 + 4x + 4y + x^2 + y^2 + z^2$
- $(x+4)^2 - 4x - 16 - xy + (y+4)^2 - 4y - 16 - yx + (z+4)^2 - 4z - 16 - yz = 0$
- $xy + yz + zx = 4(x+y+z) + (x+y+z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz$
- $(y+2)^2 + (z+2)^2 + (x+2)^2 - 12 = 0$
- $x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16 = A$
- $x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) +$
- $4(z-y) = -y^2 - yz - z^2$
- $y^2 + 4z + z^2 + 4y + yz = 0$
- $y^2 + 4z + z^2 + 4y + x^2 = 0$
- $(y+2)^2 + (z+2)^2 + (x+2)^2 - 12 = 0$
- $y^2 + z^2 + x^2 - 4(x+y+z) = 0$
- $4z^2 + z^3 = 4y^2 + y^3$
- $4(2-y)(2+y) = (y-2)(y^2 + yz + z^2)$
- $-4y - 4z = y^2 + yz + z^2 + x^2 + z^2$
- $xz = 4(x+z) + yz$
- $(y+2)^2 + (z+2)^2 + (x+2)^2 - 12 = 0$
- $xy + yz + zx = 47 + 4x + 4y + x^2 + y^2 + z^2$
- $x = y$
- $x^2 = 4z + z^2$
- $xz = 4x + x^2$
- $xz = x + x^2$
- $\beta + \gamma = 135^\circ$
- $\beta + \gamma = 90^\circ$
- $\beta + \gamma + \delta = 180^\circ$
- $2\delta = 90^\circ$
- $\delta = 45^\circ$
- $\alpha = ?$
- $\alpha = 120^\circ$
- $x = \frac{4z + z^2}{y}$
- $4z^2 + z^3 = 4y^2 + y^3$