



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В теленгрире ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{cases} xy = z^2 + z^2 \\ yz = zx + x^2 \\ zx = yz + y^2 \end{cases} \quad \leftarrow \quad x = \frac{z^2 + z^2}{y}$$

$$x \neq y \neq z \neq 0 \quad z^2 + z^2 = y^2 + y^2$$

$$z(z-y)(z+y) = (y-z)(y^2 + yz + z^2)$$

$$-z^2 - 4yz = y^2 + z^2 + yz$$

$$y^2 + x^2 + z^2 + zx + z^2 + yz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx = 0 \Rightarrow$$

$$(y+2)^2 + (x+2)^2 + (z+2)^2 - 12 = 0$$

$$(y+4)^2 + (x+4)^2 + (z+4)^2 - 4x - 4y - 4z - 16 - 16 - 16 = 0$$

$$(y+4)^2 + (x+4)^2 + (z+4)^2 - (x+4) + 4(y+4) - 4(z+4) = 0$$

$$4(y+4) + x(x+4) + z(z+4) = 0$$

$$A = 4(x+y+z) + 48 = -y^2 - x^2 - z^2 + 48$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l} \text{v2} \\ n^3 = ? \\ n = \underbrace{9999\dots9}_{25000} \end{array}$$

$$\begin{aligned} n^3 &= 8 \cdot (10^{25} + 10^{24} + \dots + 10^0)^3 = 8 \cdot 729 \cdot \underbrace{(111111\dots1)}_{25000}^3 = \\ &= \cancel{729} \cdot \underbrace{1233\dots3321}_{24936} \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что
их можно будет 25000

Ответ: 25000



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n 5

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow a_4 \\ \nearrow a_5 \end{array}$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow a_2 \\ \nearrow a_3 \end{array}$$

1) \bar{x}_0 и \bar{v} вспомогательные:

$$\begin{cases} a_4 + a_5 = a^2 - a \\ a_4 \cdot a_5 = \frac{2-a^3}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 + a_7 = \frac{a^3 - a^2}{2} \\ a_2 \cdot a_7 = -a^6 - 4a - 2 \end{cases}$$

2) a_n -арифм. прогрессия:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 7d = a^2 - a \\ a_1^2 + 7a_1d + 12d^2 = \frac{2-a^3}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 7d = \frac{a^3 - a^2}{2} \\ a_1^2 + 7a_1d + 6d^2 = -a^6 - 4a - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Подставляем их в gp-е:

$$\textcircled{I} \quad a=0: \quad \begin{cases} x^2 + \frac{2}{3} = 0 \\ 2x^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad -\emptyset$$

$$\textcircled{II} \quad a=1$$

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{3} = 0 \\ 2x^2 - 14 = 0 \end{cases} \quad -\emptyset$$

$$\textcircled{III} \quad a=2$$

$$6d^2 = -2 + \cancel{64} + 8 + 12$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 = 0 \\ 2x^2 - 4a - 148 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2a - 74 = 0 \end{cases}$$

$$d = 2\sqrt{3}$$

Продолжение:

$$a_1 = 1 - 7\sqrt{3}$$

$$1 - 14\sqrt{3} + 147 + 14\sqrt{3} - 289 + \cancel{14} = -74$$

$$-74 = -74 \quad \text{верно}$$

Ответ: $a=2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \angle CON = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} 3) S_{\phi} &= 2 \left(\frac{\pi}{4} (R^2 - r^2) + BC \cdot BK + \frac{1}{6} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot CN \cdot ON \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{4} (36^2 - 12^2) + 6 \cdot 18\sqrt{3} + \frac{1}{6} \pi \cdot 12^2 - \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 18 \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot 24 \cdot 48 + 24\pi - 54\sqrt{3} \right) = 26 \cdot 24\pi - 108\sqrt{3} = 664\pi - 108\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ответ: $664\pi - 108\sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

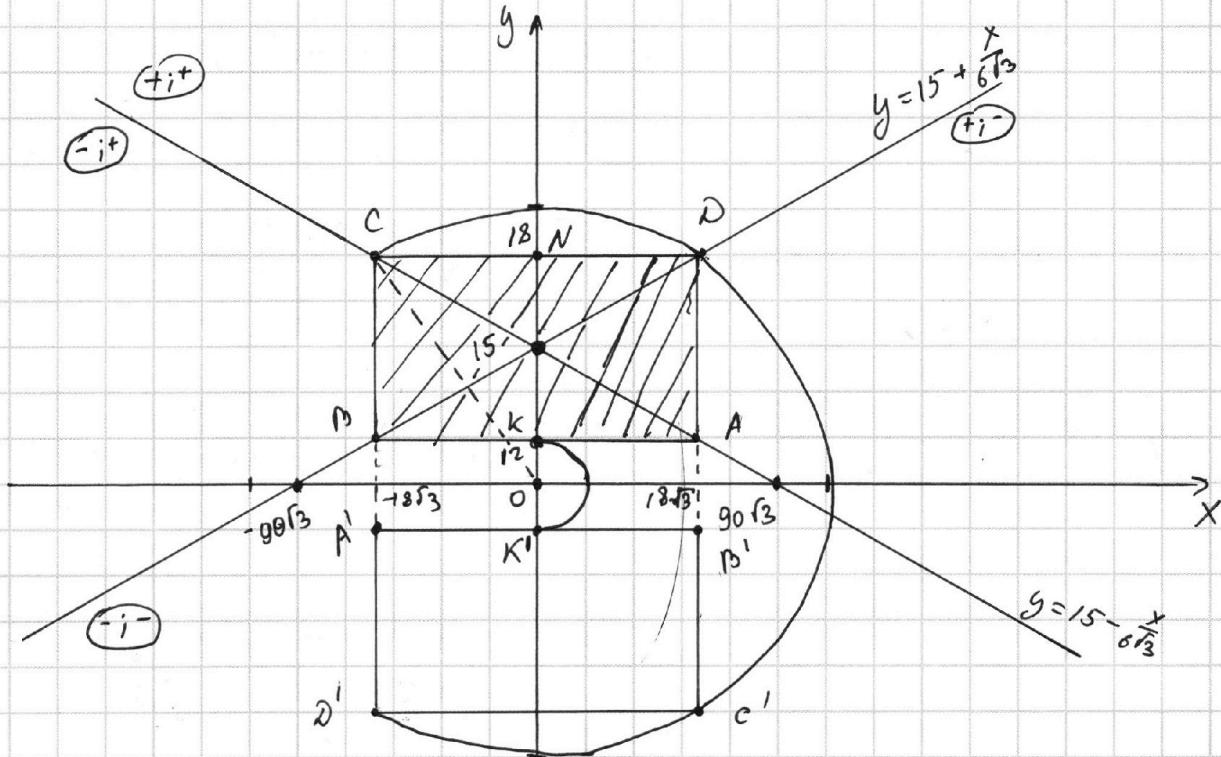
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N 6

$$|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 6 \quad S = ?$$



1) (+;+): $2y - 30 \leq 6$

$$y \leq 18$$

2) (+;-): $x \leq 18\sqrt{3}$

5) из ABCD в A'B'C'D' через симметрию относительно м. О

3) (-;-): $-2y + 30 \leq 6$

$$y \geq 12$$

6) Замети, что при таком движении тоек X движение по окр. с радиусом ОX и преодолевает расстояние в половину окр.

Каким образом будет двигаться (в силу симметрии). Например C и D; A и B (точка лежит на другой окр.).

7) Четвертая точка будет двигаться до - чура KBCD'A'K' (ко - это радиус, со - макс радиус)

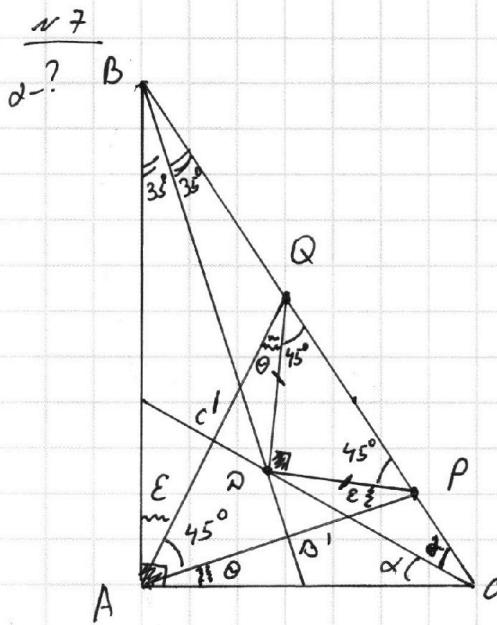
$$r = OK = 12; CO = \sqrt{KB^2 + NO^2} = \sqrt{18^2 + (18\sqrt{3})^2} = 36 = R$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \triangle ABP - p/5 \Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \beta$$

$$\triangle ACQ - p/5 \Rightarrow \angle QAC = \angle QCA = \delta$$

2) Думать $\angle QAP = \gamma$, тогда

$$\beta + \gamma - \delta = 90^\circ \Rightarrow \beta + \gamma = 90^\circ + \delta$$

$$\angle AQP + \angle QPA + \angle PAQ = 180^\circ$$

~~$$\gamma + \beta - \delta = 180^\circ$$~~

$$\gamma + \beta + \delta = 180^\circ \Rightarrow \delta = 45^\circ$$

$$3) \text{Думать } \angle APD = \epsilon = \beta - 45^\circ = \angle BAC \\ \angle ACD = \theta = \gamma - 45^\circ = \angle PAC$$

4) Получаем, что $AD = AP$

5) ~~?~~ = 4) Получаем, что $AB' = B'P \Rightarrow BB' - \text{биссек.}$
 $\triangle ABP - p/5$

$$ABB' = B'B P = 35^\circ$$

3) Аналогично CC' - биссектриса

$$2\alpha + 35^\circ \cdot 2 = 80^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ$$

Ответ: 10°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten notes and calculations:

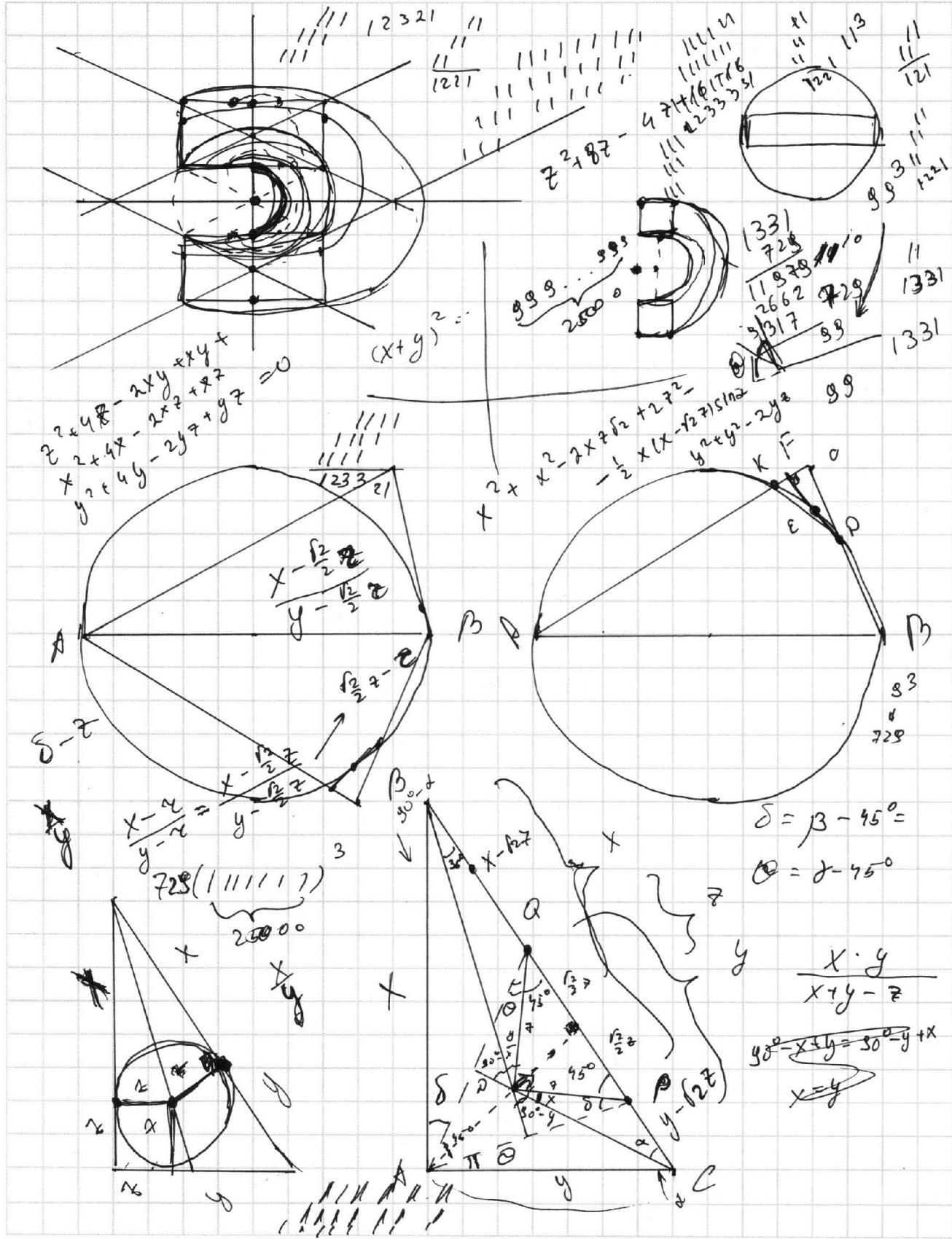
- Top left: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{matrix}$
- Top right: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & u_2 = 1 - \frac{7}{2}d \\ 2 & 4 & a_1 = \frac{1}{2}d \end{matrix}$
- Middle left: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & x = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \\ 3 & 4 & \end{matrix}$
- Middle right: $A\bar{F} = ? \quad 11^3 \quad 1331$
- Bottom left: $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \quad a_4 \quad a_5$
- Bottom middle: $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$
- Bottom right: $\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ a^4 - 2a^3 + a^2 - \frac{8}{3} + \frac{4}{3}a^3 & a^2 - \frac{8}{3}a^3 - \frac{4}{3}a^6 - \frac{12}{3}a^4 - \frac{12}{3}a^2 \\ a^4 - \frac{2}{3}a^6 + a^2 - \frac{8}{3}a^3 - \frac{4}{3}a^6 - \frac{12}{3}a^4 - \frac{12}{3}a^2 \end{matrix}$
- Bottom center: $\frac{a_5 + a_7}{2} = a_6 \quad \frac{a_7 + a_9}{2} = a_8 \quad \frac{a_7 + a_9}{2} = a_5 \quad a_2 = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$
- Bottom right center: $a_2 = a_1 + d \quad a_4 = a_1 + 3d \quad a_5 = a_1 + 4d \quad a_7 = a_1 + 6d$
- Bottom right corner: $a = 0 \quad a = 2 \quad a = 1$
- Bottom left corner: $1 - 14\sqrt{3} + 48 \cdot 3 + 7(-7\sqrt{3})$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

