



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 10$ ,  $AB = 6$ ,  $BE = 5$ .
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$  являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$  являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DBC$ , если известно, что  $\angle DCB = 20^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \begin{cases} xy = z(3+z) \\ yz = 3x(3+x) \\ zx = y(3+y) \end{cases} \begin{cases} 3+z = \frac{xy}{z} \\ 3+x = \frac{yz}{x} \\ 3+y = \frac{zx}{y} \end{cases} \text{ или } x, y, z \neq 0$$

$$A = (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} = \frac{3x^2 y^2 z^2}{x^2 y^2 z^2} = 3$$

выражение равно 3 при всех  $x, y, z \neq 0$ , для удобства значения выражения обозначим как  $A$

Рассмотрим значения выражения тогда, переменные могут равняться 0, т.к. переменные взаимно замкнутые рассмотрим только 3 случая, где 1, 2 или 3 переменные равны 0:

1 переменная:  $(x=0)$ !  
пусть  $x=0$

$$\begin{cases} 0 = z(3+z) \\ yz = 0 \\ z = 3(y+y^2) \\ 0 = y(3+y) \end{cases} \begin{cases} A = 3^2 + 0^2 + 3^2 = 18 \\ A = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 27 \\ A = 3^2 + 0^2 + 3^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -3 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -3 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ответ: выражение может принимать значения 3, 18, 27







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Рассчитаем вероятность с 5 перекрестками.

Количество выигрышных способов  $P_0$

Во всех выигрышных способах будут выбраны 3 правых перекрестка, тогда кол-во способов зависит от двух других выигрышных перекрестков. Пусть  $x$  будет количество перекрестков:

$$\frac{(x-3)(x-4)}{2} - \text{кол-во выигрышных способов}$$

$$\frac{x(x-3)(x-2)(x-3)(x-4)}{5!} - \text{кол-во способов выбрать 5 перекрестков}$$

$$\text{Когда вероятность выигрыша } P_0 = \frac{(x-3)(x-4) \cdot 5!}{2 \cdot x(x-3)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{60}{2(x-1)(x-2)}$$

Аналогично, но для 6 перекрестков

$$\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{3!} - \text{кол-во выигрышных способов}$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{6!} - \text{общее кол-во способов выбора}$$

$$P = \frac{(x-3)(x-4)(x-5) \cdot 6!}{3! \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{120}{x(x-1)(x-2)}$$

Вероятности увеличилась в:

$$\frac{120 \cdot x(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2) \cdot 60} = 2 \text{ раза}$$

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$⑤ \quad x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \quad 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

по Т. Виета:

$$\begin{cases} a_5 + a_6 = a^2 - a \\ a_5 \cdot a_6 = a - 5 \end{cases}$$

где  $a_5$  и  $a_6$  — члены арифм. прогрессии

$$\begin{cases} a_3 + a_8 = \frac{a^3 - a^2}{4} \\ a_3 \cdot a_8 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \end{cases}$$

рассмотрим  $a_5, a_6, a_3$  и  $a_8$  по формулам члена арифм. прогрессии

$$\begin{cases} a_1 + 4d + a_1 + 5d = a^2 - a & (1) \\ (a_1 + 4d)(a_1 + 5d) = a - 5 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d + a_1 + 7d = \frac{a^3 - a^2}{4} & (2) \\ (a_1 + 3d)(a_1 + 7d) = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} & (4) \end{cases}$$

приравняем (1) и (2):

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$\frac{a^3 - 5a^2 + a}{4} = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 1) = 0$$

$$a = 0 \quad a = 1$$

$$d = \frac{25}{16} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$$

$$a = \frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$a = \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = 4$$

Подставим эти значения  $a$  в (3) и (4)

$$\begin{cases} a=0 \\ (a_1 + 4d)(a_1 + 5d) = 4 - 5 \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 7d) = -\frac{4}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ (a_1^2 + 9da_1 + 20d) = -4 \\ (a_1^2 + 9da_1 + 24d) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 9da_1 + 20d = -5 \\ a_1 + 9da_1 + 24d = -\frac{4}{4} \end{cases}$$

$$-4d = -3 \frac{3}{4}$$

$$d = \frac{8}{16}$$

$$-4d = -4$$

$$d = \frac{1}{4}$$

$$a=4 \quad \begin{cases} a_1^2 + 9da_1 + 20d = -1 \\ a_1^2 + 9da_1 + 24d = \end{cases}$$

имеем  $a = 0; 1; 4$



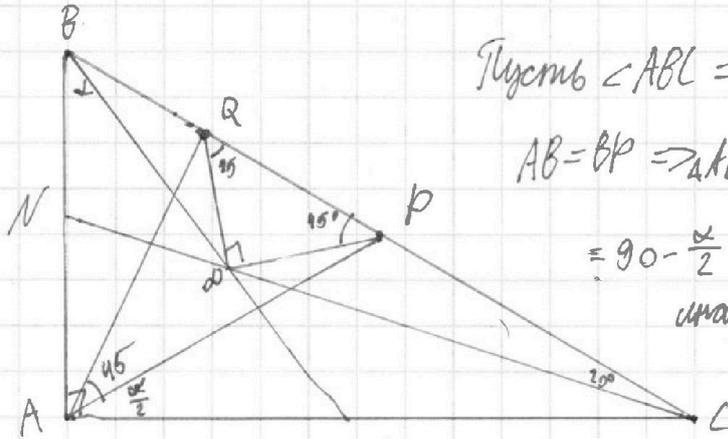
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7



Пусть  $\angle ABC = \alpha$ , тогда  $\angle ACB = 90 - \alpha$

$$AB = BP \Rightarrow \triangle ABP - \text{равнобедренный} \Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \frac{180 - \alpha}{2} =$$

$$= 90 - \frac{\alpha}{2}; \text{ т.к. } \angle ABC = 90 \Rightarrow \angle PAC = \frac{\alpha}{2}$$

аналогично  $QC = AC \Rightarrow \triangle AQC - \text{равнобедренный}$

$$\angle QAC = \angle AQC = \frac{180 - \alpha}{2} = 45 + \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle APC = \frac{\alpha}{2}, \angle QPC = 45 + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle AQP = 45^\circ$$

$$\angle QAP = 45^\circ \Rightarrow \angle NPB = 45^\circ$$

$$\angle NPQ = 135^\circ \text{ т.к. } \angle QPC = 180^\circ - \angle NPQ = 180 - 45 = 135^\circ$$

аналогично  $\angle QCB = 135^\circ$

$$\angle NPQ = 180 - 135 - 20 = 25^\circ$$

$$\angle NPQ = 180 - 90 - 25 = 65^\circ$$

$$\angle BQP = \angle NPQ - \angle NPB = 65^\circ - 45^\circ = 20^\circ$$

$$\angle PQC = 180^\circ - \angle BQP - \angle QCB = 180^\circ - 20^\circ - 135^\circ = 25^\circ$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = (x - a_5)(x - a_6) =$$

$$= x^2 - a_5x - a_6x \quad (a_5 + a_6)(a_5 + a_6) = a_5^2 + 5a_5a_6 + 4a_6^2 + 20d$$

$$a_5 + a_6 = a^2 - a$$

$$a_3 + a_4 = a^3 - a^2$$

$$a_5 \cdot a_6 = a - 5$$

$$a_3 \cdot a_4 = 2a^4 - 2a^2 - a^6 - 4$$

$$a_0 + 9d = a^2 - a$$

$$a_0 + 9d = a^3 - a^2$$

$$a^2 - a^3 = a^3 - a^2$$

$$a^2 + 9da_0 + 4d \cdot 20d = a - 5$$

$$a^3 - 2a^2 + a = 0$$

$$a(a^2 - 2a + 1) = 0$$

$$a_5 - a_6 =$$

$$a_0 + 9d = 0$$

$$a = 0 \quad a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$a^2 + 9da_0 + 20d = a - 5$$

$$a_0 = -9d$$

$$9 = 4 - 4 = 0$$

$$a_0 + 9da_0 + 24d = 2a^4 - 2a^2 - a^6 - 4$$

$$9d = -a_0$$

$$a = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

$$d = -\frac{a_0}{9}$$

$$-9d = a - 5 - 2a^4 + 2a^2 + a^6 + 4$$

$$= \frac{20a_0}{9}$$

$$-9d = a^6 - 2a^4 + 2a^2 + a - 1$$

$$a^2 + -a_0 \cdot a_0 + \frac{20a_0}{9}$$

$$a^3 - a - 4(2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4)$$

$$1 - 1 - 4(2 + 2 - 1 - 4) =$$

$$= -4(-1) = 4$$

$$g = \sqrt{\frac{5}{16} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{4}{16}$$

$$\frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1$$

$$1 - 1 - 4(1 - 5) = 16$$

$$0 - 0 - 4(0 - 5) = 20$$

$$\frac{5 + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{16} = 4$$

$$2^2 \cdot 2^9 + 2^5 - 2^{12} - 2^2 =$$

$$= 2^2(2^7 + 2^5 - 2^{10} - 1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

