



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 2(3+z) \\ yz = 3x(3+x) \\ zx = y(3+y) \end{cases} \quad \begin{aligned} 3+z &= \frac{xy}{2} \\ 3+x &= \frac{yz}{3} \\ 3+y &= \frac{zx}{y} \end{aligned} \quad \text{или } x, y, z \neq 0$$

$$A = (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} = \frac{3x^2 y^2 z^2}{x^2 y^2 z^2} = 3$$

выражение равно 3 при всех $x, y, z \neq 0$, для удобства значения выражения обозначим как A

Рассмотрим значения выражения тогда, переменные могут равняться 0, т.к. переменные взаимно исключаются, рассмотрим только 3 случая, где 1, 2 или 3 переменные равны 0:

1 переменная: $(x=0)$!
пусть $x=0$

$$\begin{cases} 0 = 2(3+z) \\ yz = 0 \\ 0 = 3(y+y^2) \\ 0 = y(3+y) \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= 3^2 + 0^2 + 3^2 = 18 \\ A &= 0^2 + 9^2 + 9^2 = 27 \\ A &= 3^2 + 0^2 + 3^2 = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z = -3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ответ: выражение может принимать значения 3, 18, 27

max AF = $3\frac{1}{18}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Рассчитайте вероятность с 5 поражениями.

Количество выигрышных способов $\rightarrow$

Во всех выигрышных способах будут выбраны 3 правых порошка, тогда кол-во способов зависит от двух других выбранных порошков. Пусть x будет количество порошков:

$$\frac{(x-3)(x-4)}{2} - \text{кол-во выигрышных способов}$$

$$\frac{x(x-3)(x-2)(x-3)(x-4)}{5!} - \text{кол-во способов выбрать 5 порошков}$$

$$\text{Когда вероятность выигрыша } P_0 = \frac{(x-3)(x-4) \cdot 5!}{2 \cdot x(x-3)(x-2)(x-3)(x-4)} =$$

$$= \frac{60}{2(x-1)(x-2)}$$

Аналогично, но для 6 порошков

$$\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{3!} - \text{кол-во выигрышных способов}$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{6!} - \text{общее кол-во способов выбора}$$

$$P = \frac{(x-3)(x-4)(x-5) \cdot 6!}{3! \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{120}{x(x-1)(x-2)}$$

Вероятности увеличились в:

$$\frac{120 \cdot x(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2) \cdot 60} = 2 \text{ раза}$$

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$⑤ \quad x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

по Т. Виета:

$$\begin{cases} a_5 + a_6 = a^2 - a \\ a_5 \cdot a_6 = a - 5 \end{cases}$$

где a_5 и a_6 — члены арифм. прогрессии

$$\begin{cases} a_3 + a_8 = \frac{a^3 - a^2}{4} \\ a_3 \cdot a_8 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \end{cases}$$

распишем a_5, a_6, a_3 и a_8 по формулам члена арифм. прогрессии

$$\begin{cases} a_1 + 4d + a_1 + 5d = a^2 - a & (1) \\ (a_1 + 4d)(a_1 + 5d) = a - 5 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d + a_1 + 7d = \frac{a^3 - a^2}{4} & (2) \\ (a_1 + 3d)(a_1 + 7d) = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} & (4) \end{cases}$$

приравняем (1) и (2):

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0$$

$$d = \frac{25}{16} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{a^3}{4} - \frac{5a^2}{4} + a = 0$$

$$a = 0 \quad a = 1$$

$$a = \frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$a = \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = 4$$

Подставим эти значения a в (3) и (4)

$$a = 0$$

$$\begin{cases} (a_1 + 4d)(a_1 + 5d) = 4 - 5 \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 7d) = -\frac{4}{4} \end{cases}$$

$$a = 1$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 9da_1 + 20d = -4 \\ a_1^2 + 9da_1 + 24d = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 9da_1 + 20d = -5 \\ a_1^2 + 9da_1 + 24d = -\frac{4}{4} \end{cases}$$

$$-4d = -3\frac{3}{4}$$

$$d = \frac{8}{16}$$

$$a = 4$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 9da_1 + 20d = -1 \\ a_1^2 + 9da_1 + 24d = \end{cases}$$

$$-4d = -4$$

$$d = \frac{1}{4}$$

имеем $a = 0; 1; 4$



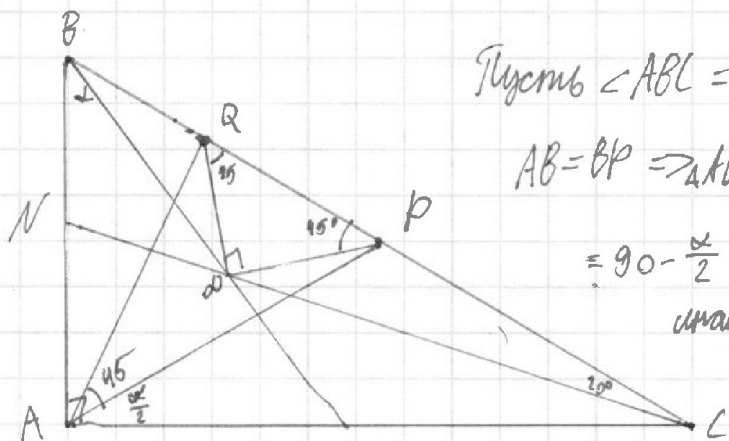
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(7)



Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle ACB = 90 - \alpha$

$AB = BP \Rightarrow \triangle ABP$ - р/д $\Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \frac{180 - \alpha}{2} =$

$= 90 - \frac{\alpha}{2}$; м.к. $\angle ABC = 90$ $\angle PAC = \frac{\alpha}{2}$

аналогично $QC = AC \Rightarrow \triangle AQC$ - р/д

$\angle QAC = \angle AQC = \frac{180 - \frac{\alpha}{2}}{2} =$
 $= 45 + \frac{\alpha}{2}$

$\angle APC = \frac{\alpha}{2}$, $\angle QPC = 45 + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle AQP = 45^\circ$

$\angle QAP = 45^\circ \Rightarrow \angle NBQ = 45^\circ$

$\angle BPQ = 135^\circ$ м.к. $\angle QPC = 180^\circ - \angle BPQ = 180 - 45 = 135^\circ$

аналогично $\angle QCB = 135^\circ$

$\angle BPC = 180 - 135 - 20 = 25^\circ$

$\angle NBQ = 180 - 90 - 25 = 65^\circ$

$\angle BQD = \angle NBQ - \angle NBQ = 65^\circ - 45^\circ = 20^\circ$

$\angle BQC = 180^\circ - \angle NBQ - \angle BQD = 180^\circ - 20^\circ - 135^\circ = 25^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$AC=10$ $AB=6$ $BE=5$

$\sin 2\alpha = \frac{H}{AC}$
 $\tan 2\alpha = \frac{H}{AC-2}$
 $\tan \beta = \frac{H}{AB-2}$
 $H = (AB-2) \tan \alpha$

$\tan \beta = \frac{\tan 10(AC-2)}{AB-2}$

$AE = 26$
 $AE = \sqrt{11^2 + 18^2 + 20^2} = \sqrt{9801} = 99$

$AD = \frac{AF}{AC} = \cos \alpha$
 $AD = \frac{6 \cos \alpha}{10} = AC \cos \alpha$
 $AE \cos \alpha = AC \cos \alpha$
 $AF = AC \cos^2 \alpha$

$AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC = 180 - 45 - \frac{\alpha}{2} = 135 - \frac{\alpha}{2}$

$AB=2$ $AC=2$
 $\tan 2\alpha = \frac{x}{AC-2}$
 $DP=135$
 $BP=25$
 $180 - 25 - 45 - \frac{\alpha}{2} = 110 - \frac{\alpha}{2}$

$\alpha - \beta = 180 - 160 + \alpha - 65 + \beta$
 $90 - 10 - \alpha = 2\beta$
 $180 - 160 - \alpha = -45$
 $\alpha = 22,5$

$x + 25 + 65 + 90 = 180$
 $65 - 2 = x$
 $360 - 65 - 65 = -2 - x$

$xy = 2(3+x)$
 $y^2 = 2(3+x)$
 $zx = y(3+y)$

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} =$
 $= \frac{2x^2 + 2y^2 + z^2}{2} = \frac{324}{2} = 162$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = (x - a_5)(x - a_6) =$$

$$= x^2 - a_5x - a_6x \quad (a_5 + a_6)(a_5 + a_6) = a_5^2 + 5a_5a_6 + 4a_6^2 + 20a_6$$

$$a_5 + a_6 = a^2 - a$$

$$a_5 + a_6 = a^3 - a^2$$

$$a_5 \cdot a_6 = a - 5$$

$$a_5 \cdot a_6 = 2a^4 - 2a^2 - a^6 - 4$$

$$a_5 + 9d = a^2 - a$$

$$a_5 + 9d = a^3 - a^2$$

$$a^2 - a^3 = a^3 - a^2$$

$$a^2 + 9da_5 + 4d20d = a - 5$$

$$a^3 - 2a^2 + a = 0$$

$$a(a^2 - 2a + 1) = 0$$

$$a_5 - a_6 =$$

$$a_5 + 9d = 0$$

$$a = 0 \quad a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$a^2 + 9da_5 + 20d = a - 5$$

$$a_5 = -9d$$

$$9 = 4 - 4 = 0$$

$$a_5 + 9da_5 + 24d = 2a^4 - 2a^2 - a^6 - 4$$

$$9d = -a_5$$

$$a = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

$$d = -\frac{a_5}{9} = \frac{20a_5}{9}$$

$$-9d = a - 5 - 2a^4 + 2a^2 + a^6 + 4$$

$$-9d = a^6 - 2a^4 + 2a^2 + a - 1$$

$$a^2 + -a_5 \cdot a_5 + \frac{20a_5^2}{9}$$

$$a^3 - a - 4(2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4)$$

$$1 - 1 - 4(2 + 2 - 1 - 4) =$$

$$= -4(-1) = 4$$

$$f = -\frac{5}{16} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$$

$$\frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1$$

$$0 - 1 - 4(1 - 5) = 16$$

$$0 - 0 - 4(0 - 5) = 20$$

$$\frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{16} = 4$$

$$2 \cdot 2^9 + 2^5 - 2^{12} - 2^2 =$$

$$= 2^2(2^7 + 2^5 - 2^{10} - 1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

