



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В теленгрире ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leqslant 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$①) xy = -6z + z^2 \quad (1)$$

$$yz = -6x + x^2 \quad (2)$$

$$(1) - (2) : y(x-z) = 6(x-z) - (x+z)(x-z)$$

$$(x-z)(y-6+x+z) = 0 \quad (3)$$

$$zx = -6y + y^2 \quad (4)$$

i) Предположим, что $y-6+x+z=0$. ($x+y+z=6$)

$$x = 6 - y - z$$

$$(2) yz = x(x-6) = (6-y-z)(-y-z)$$

$$yz = (y+z-6)(y+z)$$

$$yz = (y+z)^2 - 6(y+z) = y^2 + 2yz + z^2 - 6y - 6z$$

$$yz = y^2 + 2yz + z^2 - 6y - 6z$$

$$y^2 + z^2 + x^2 - 6x - 6y - 6z = 0$$

$$y^2 + z^2 + x^2 - 6(x+y+z) = 0 \quad (3)$$

$$(x+y+z-6)(x+y+z) = 0 \Rightarrow (x+y+z)^2 - 6(x+y+z) = 0 \Rightarrow$$

$$0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) - 6(x+y+z) = 0$$

$$\text{Из } (3) \Rightarrow 2(xy + yz + zx) = 0 \Rightarrow (xy + yz + zx) = 0$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (-y-z)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 =$$

$$= y^2 + 2yz + z^2 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 =$$

$$= 2yz + 2yx + 2zx + 36 + 36 = 0 + 72 = 72$$

ii) Предположим, что $x-z=0$. ($x=z$)

~~Изобразив то же что и в пункте i), но не с (1) и (2), а с (1) и (4) мы получим аналогичное (5) равенство~~

$$(y-z)(y-6+x+z) = 0 \quad \text{т.к. случаи, когда } x+y+z=6$$

или $y+z+x \neq 6 \Rightarrow y \neq z$.

~~Получаем $x=z=y$:~~

$$x^2 = -6x + x^2$$

$$(1) : x^2 = y(y-6) \Rightarrow (y+6)x = y(y-6) \Rightarrow x = \frac{y(y-6)}{y+6}$$

$$(2) : x^2 = y^2 + 6x \Rightarrow (1) : xy = -6x + x^2$$

~~2x = 6x + 4~~

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 2(x-6)^2 + (y-6)^2 = 2\left(\frac{y(y-6)}{y+6} - 6\right)^2$$

$$+ (y-6)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Не теряя обуздости скажем, что не $x=2, a y=2$.

$$y^2 = -6x + x^2$$

$$y_x = -6y + y^2$$

$$x = \frac{-6y + y^2}{y}$$

$$y^2 = -6\left(\frac{-6y + y^2}{y}\right) + \frac{(-6y + y^2)^2}{y^2} \mid \cdot y^2$$

$$y^4 = 36y^2 - 6y^3 + 36y^2 - 12y^3 + y^4$$

$$0 = 236y^2 - 18y^3$$

$$0 = 18y^2(4 - y) \quad y \neq 0 \Rightarrow y = 4 = 2$$

$$(y-6)^2 + (z-6)^2 = 4+4=8$$

$$y^2 = 16 = -6x + x^2$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = -2$$

Не трудно подставить в систему и проверить, что оба корня подходит.

$$x_1 = 8 \quad (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 64 + 8 = 72$$

$$x_2 = -2 \quad (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 64 + 8 = 72$$

Ответ: 72.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Заметим, что число состоящее из 20002 девятки это $10^{20002} - 3$.
Тогда $n^3 = (10^{20002} - 1)^3 = 10^{60006} - 3 \cdot 10^{40004} + 3 \cdot 10^{20002} - 1$.

$$2) 10^{60006} = 1 \underbrace{000\dots000}_{2002} \underbrace{000\dots000}_{2002} \underbrace{000\dots000}_{2002} = 10^{20002} \cdot 10^{40004}$$

$$3 \cdot 10^{40004} = 3 \underbrace{000\dots000}_{2002} \underbrace{000\dots000}_{2002} = 3 \cdot 10^{40004}$$

$$10^{60006} - 3 \cdot 10^{40004} = (10^{20002} - 3) 10^{40004} = (10^{20002} - 1 - 2) \cdot 10^{40004}$$

3)

$$10^{60006} - 3 \cdot 10^{40004} = \underbrace{999\dots999}_\text{20000} \underbrace{7000\dots000}_\text{20002} \underbrace{000\dots000}_\text{20002}$$

\nearrow
Это n -число состоящее из 20002 девятки. Тогда
 $10^{20002} - 3$ это число
состоящее из 2000 девяток
и 6 единиц 7 ($\underbrace{99\dots99}_\text{20000}, 7$)

$$3 \cdot 10^{20002} - 1 = 2 \underbrace{999\dots999}_\text{20001}$$

$$10^{60006} - 3 \cdot 10^{40004} + 3 \cdot 10^{20002} - 1 =$$

$$= \underbrace{999\dots999}_\text{20000} \underbrace{7000\dots000}_\text{20002} \underbrace{000\dots000}_\text{20002}$$

\downarrow

$$+ 2 \underbrace{999\dots999}_\text{20001} = \underbrace{999\dots99}_\text{20000} \underbrace{7000\dots00}_\text{20002} \underbrace{299\dots99}_\text{20001}$$

Всего ~~все~~ единиц в числе n^3 $200004 + 20001 = 40005$

Ответ: 40005.



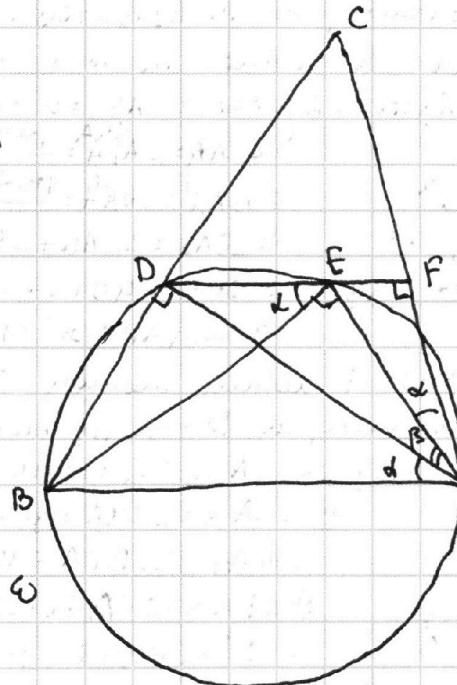
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} AC &= 20 \\ AB &= 10 \\ BE &= 9 \\ DF \perp AC \\ AF - ? \end{aligned}$$



$$\Rightarrow AD^2 = \frac{AF^2 \cdot AB^2}{AE^2} \Rightarrow AF \cdot AC$$

$$AF \cdot AB^2 = AC \cdot AE^2$$

$$AF = \frac{AC \cdot AE^2}{AB^2}$$

$$\text{No Th. Пифагора: } AE^2 = AB^2 - BE^2$$

$$AF = \frac{AC \cdot (AB^2 - BE^2)}{AB^2} = \frac{20(100 - 81)}{100} = \frac{20 \cdot 19}{100} = 3,8$$

Ответ: 3,8

1) Т.к. AB - диаметр ω (по усл.) и точки $A, B, D, F \in \omega$, то $\angle BDA = \angle BEA = 90^\circ$ (как опирающиеся на диаметр). Так же по усл. $\angle DFA = 90^\circ \Rightarrow \triangle AFD, \triangle ADC, \triangle AEB$ - прямоугольные.

2) Пусть угол $DAB = \alpha$, а $DAE = \beta$. Из вписанных $\angle BDE = \angle DAB = \alpha$ (как опирающиеся на одну дугу) \Rightarrow $\angle BDE$ - сумма углов треугольника $\angle BEB = \angle DAB = \alpha$ (как опирающиеся на другую дугу) \Rightarrow $\angle BEB = 90^\circ - \alpha$ \Rightarrow $\angle BEB$ - сумма углов треугольника $\angle FEA = \alpha$

3) $\triangle AEB \sim \triangle AFD$ (по двум углам)
 $\triangle AFD \sim \triangle ADC$ (по двум углам)
 $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AD} \text{ и } \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \quad AD^2 = AF \cdot AC \quad \left. \begin{array}{l} AD = \frac{AF \cdot AB}{AE} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть всего было n коробок (из условия есть, что $n \geq 9$).
 В первом случае (т.е. когда игрок должен указать на 5 коробок) всего существует C_n^5 вариантов указать на 5 коробок (т.к. это кол-во способов выбрать множество из 5 коробок). Из них выигрышными являются те, в которых игрок выбрал три коробки с маркировкой, а остальные 2 наудачу. Получается кол-во "счастливых" множеств из 5 коробок, равно $C_3^2 C_{n-3}^2$. Тогда вероятность выигрыша будет: $P_1 = \frac{C_{(n-3)}^2}{C_n^5}$.

2) Во втором случае (т.е. когда игрок должен указать на 9 коробок) всё аналогично. Всего существует C_n^9 вариантов указать на 9 коробок. Из них выигрышных $C_{(n-3)}^6$. Тогда $P_2 = \frac{C_{(n-3)}^6}{C_n^9}$.

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\binom{6}{(n-3)} \cdot \binom{5}{n}}{\binom{9}{n} \cdot \binom{2}{(n-3)}}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots2\cdot1}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} \cdot \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}}{\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)} \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2\cdot1}} = \frac{9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\left(\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\right) \cdot \left(\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}\right)}{\left(\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}\right) \left(\frac{(n-2)(n-1)}{2\cdot1}\right)} = \frac{9\cdot8\cdot7}{35\cdot4}$$

Это не зачёркнуто, а сокращение.

Ниже написано без сокращения.

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3} = \frac{6\cdot7}{5} = 8,4$$

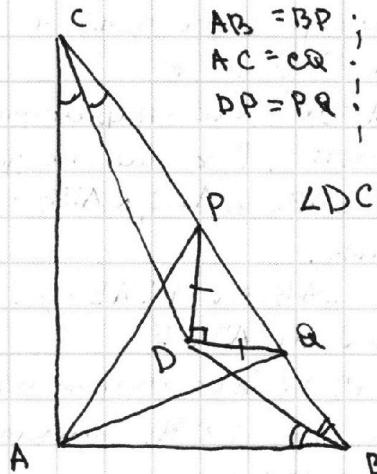
Ответ: 8,4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $AB = BP ; \angle CAB = 90^\circ$;
 $AC = CQ ; \angle PDB = 90^\circ$
 $DP = PQ ; \angle CBA = 46^\circ$

1) Докажем, что не существует случая, когда Q лежит между C и P .

Пусть $\angle ACB = 2d \Rightarrow \angle ABC = 90 - 2d$

$\angle CAP = \angle ACP = \frac{180 - 2d}{2} = 90 - d$

$\angle BAP = \angle BPA = \frac{180 - 90 + 2d}{2} = 45 + d$

$\angle CAB = \angle CAQ + \angle QAP + \angle PAB =$
 $= 90 - d + 45 + d + \angle QAP = 90^\circ$

$\angle QAP = 90^\circ - 135^\circ = -45^\circ$

значит P лежит между C и Q .

2) Докажем, что D -центр описанной $\triangle APQ$. Пусть $\angle ACB = 2d \Rightarrow \angle ABC = 90 - 2d$

$\angle CAP = \angle CQA = 90 - d$

$\angle BAP = \angle BPA = 45 + d$

$\angle PAQ = \angle CPA + \angle BAP - \angle BAC =$
 $= 90 - d + 45 + d - 90^\circ = 45^\circ$

Точка D по условию равнодistantна от P и $Q \Rightarrow$ лежит на серединном перпендикуляре к PQ . $\angle PDQ = 90^\circ$ по условию, что PQ больше $\angle PAQ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle PDQ$ -центральный, опирающийся на дугу PQ в описанной $\triangle APQ \Rightarrow$
 $\Rightarrow D$ -центр описанной $\triangle APQ$.

3) Из того, что D -центр описанной $\triangle APQ$ следует, что D лежит на серединном перпендикуляре PA и AQ .

т.к. $\triangle ACQ$ - равнобедренный ($AC = CQ \Rightarrow$ срединный перпендикуляр к AQ - биссектриса $\angle ACQ$). Аналогично срединный перпендикуляр AP - биссектриса $\angle PBA \Rightarrow$

D -точка пересечения биссектрис углов $\angle ABC$ и $\angle ACB \Rightarrow$
 $\Rightarrow D$ -центр вписанной $\triangle ACB$.

4) $\Rightarrow \angle DCB = \angle DCA = \frac{1}{2} \angle ACB =$
 $= \frac{1}{2} (90^\circ - \angle ABC) = \frac{1}{2} (90^\circ - 46^\circ) = 22^\circ$

Отв: 22° .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_n^5$$

$$C_n^9$$

$$\frac{8 \cdot 7}{(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{(n-6)(n-7)(n-8)}$$

$$C_n^2$$

$$C_n^6$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$$

$$\frac{n(n-1)}{2} : \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\frac{n(n-5) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$\frac{3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{(n-6)(n-7)(n-8) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$\frac{6 \cdot 7}{5} ($$

$$(n-2)(n-2-1)$$

$$(n-2)^2 \cancel{(n-3-1)} \cdot 3$$

$$C_n^9$$

$$n^2 - 2n - 3n + 6$$

$$(n^2 - 5n + 6)(n-4)$$

$$n^3 - 5n^2 + 6n + 20n^2 - 24$$

$$n^3 + 15n^2 + 6n - 24$$

$$\frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{6 \cdot 7^2 \cdot 6}{5}$$

$$3 \cdot 2 \cdot 7 \quad 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7$$

$$\frac{2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9}{5^2}$$

$$\frac{C_{(n-3)}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)(n-4) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{x \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$\frac{C_{(n-3)}^6}{C_n^9} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}$$

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{n(n-1)(n-2)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{6 \cdot 7}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

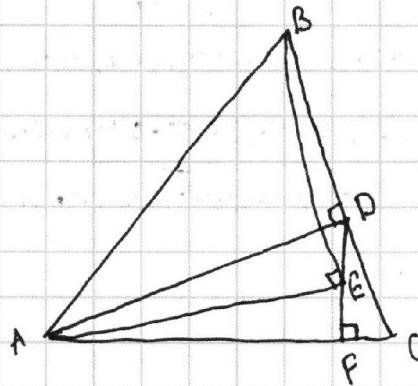
5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$42/5 \quad -234$$

$\triangle AFD, \triangle ADC, \triangle AEB$

$$AD = \frac{AF \cdot AB}{AE}$$

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB}$$

$$AF \cdot FC = DF^2$$

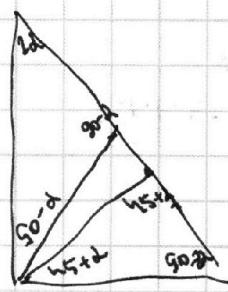
$$\frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AD}$$

$$AD^2 = AC \cdot AF$$

$$AD = \frac{AF \cdot AB}{AE}$$

$\triangle AFE \sim \triangle ADB$

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AD}{AB}$$



$$AC + AB > CB$$

$$AC^2 + AB^2 = CB^2$$

$$AC + AB > 0$$

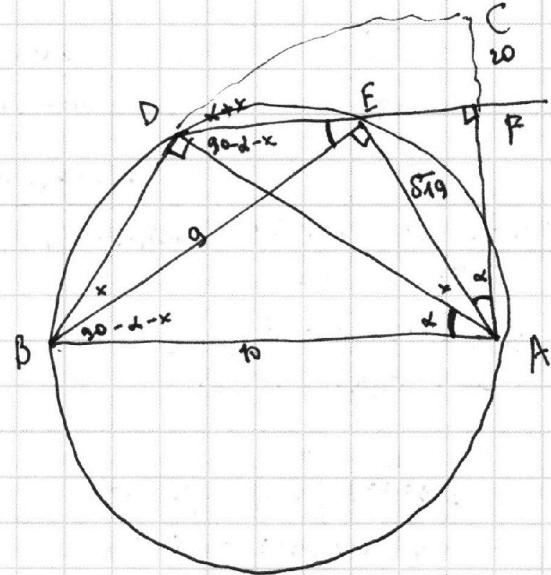
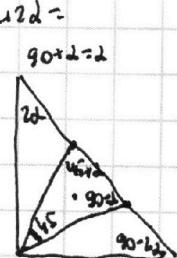
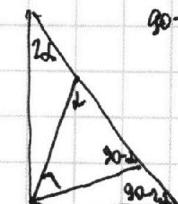
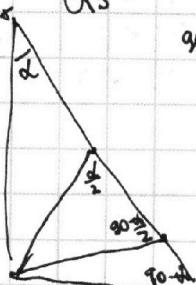
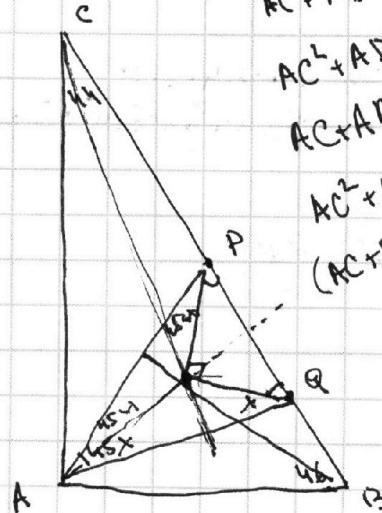
$$AF = \frac{AC \cdot AE}{AB}$$

$$AF^2 \cdot AB^2$$

$$\frac{AF^2 \cdot AB^2}{AB^2} = AC \cdot AF^2$$

$$\frac{20}{19}$$

$$\frac{19}{20}$$



I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 99999 \dots 999$$

20

$$x \cdot 10^k + 9 \cdot 10^{k-1} + y = h^3$$

$$10^{k-1}(10x+9) + y = h^3$$

$$\begin{array}{r} n=0 \\ n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ n=4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} h^3=0 \\ h^3=1 \\ h^3=8 \\ h^3=27 \\ h^3=64 \end{array}$$

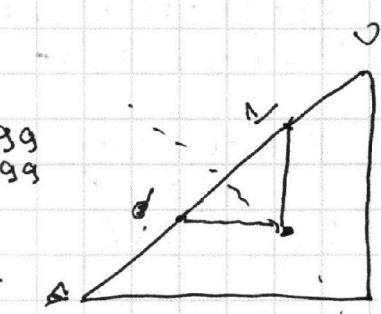
$$(x \cdot 10^k + y)^3$$

$$x^3 \cdot 10^{3k} +$$

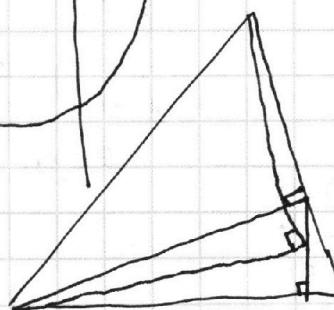
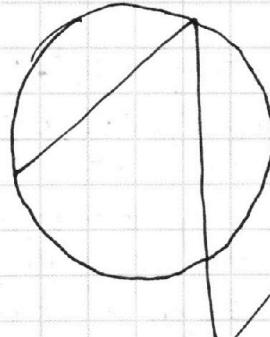
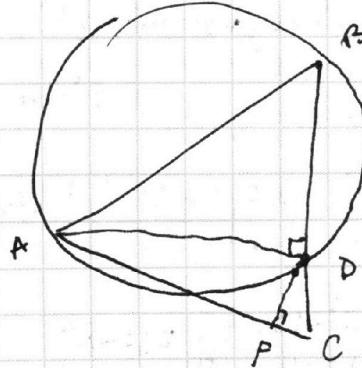
$$\begin{array}{r} 5 \\ 9 \cdot 9 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999 \\ 999 \\ \hline 99 \end{array}$$

$$(9 \cdot 30^n + 9999)^3$$



$$\begin{array}{r} 9 \\ 9 \\ \hline 81 \\ 9 \\ \hline 729 \end{array}$$



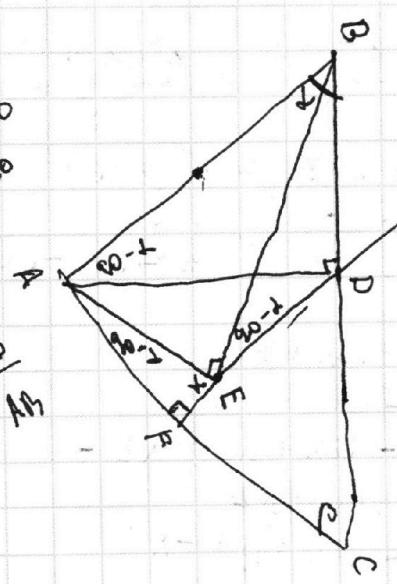
$$\textcircled{2} \quad \frac{\sin \alpha}{AD} = 2R$$

$$\begin{array}{l} AC = 20 \\ AB = 10 \\ BC = 9 \\ AE = \sqrt{19} \end{array}$$

$$\frac{\sin \alpha}{AC} = \frac{\sin \beta}{AB}$$

$$\frac{AD}{AB \cdot AC} = \frac{AO}{AB \cdot AC}$$

$$\frac{AP}{AE} = \frac{AD}{AB}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 xy + yz + zx + 6(x+y+z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\
 x^2(x+y+z) &= (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \\
 z(z-6) &= xy \quad (z-6)^2 + \dots = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{xz}{y}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 = \\
 x(x-6) &= yz \\
 y(y-6) &= xz \\
 -6z + z^2 &= \\
 x &= \frac{-6z + z^2}{y} \quad \frac{z(z-6)}{y} = \frac{y(y-6)}{z} \quad -6z - 6y = xy - z^2 \\
 x &= \frac{-6y + y^2}{z} \quad z^2(z-6) = y^2(y-6) = x^2(x-6) \\
 \frac{z-6}{y-6} &= \frac{xy}{zx} \quad \frac{y^2}{z^2} = \frac{(z-6)}{(y-6)} \quad (z-y)(z^2 + x^2 + y^2 - 6x - 6y - z^2) = 0 \\
 z(z-6) + x(x-6) + y(y-6) &= 0 \\
 z^3 - y^3 &= 6z^2 - 6y^2 \quad z^2 - 12z \\
 (z-y)(z^2 + zy + y^2) &= 6(z-y)(z+y) \\
 (z-y)(z^2 + zy + y^2 - 6z - 6y) &= 0 \\
 (z-y)(z^2 + zy + y^2 + xy + zx - z^2 - x^2) &= 0 \\
 (z-y)(zy + xy + zx) &= 0 \quad z^2 - 12z = 0 \\
 z(zy+x) + y(zy+x) + x(zy+x) &= 0 \quad z^2 - 12z = 0 \\
 z(z-6) &= xy \\
 (z-6)^2 &= \left(\frac{xy}{z}\right)^2 \\
 x &= \frac{z(z-6)}{y} \quad \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{xz}{y}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \\
 yz &= -\frac{6(z-6)z}{y} + \frac{z^2(z-6)^2}{y^2} \quad z^2 - 12z = 0 \\
 y^3 z &= -6(z-6)zy + z^2(z-6)^2 \quad z \neq 0 \\
 y^3 &= z(z-6) - 6y(z-6) \\
 y^3 &= (z^2 - 6z - 6y)(z-6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 12x + 36 \\
 x^2 - 6x = y^2 \\
 x^2 - 12x + 36 = y^2 - 6x + 36 \\
 2x^2 - 12x = y^2 \\
 x^2 - 12x = y^2 - x^2
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \cancel{1\ 000000} \\ - 20001 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 300000\ 000^2 \\ - \cancel{1\ 000000} \\ \hline 3 \end{array} \quad y^2 + z^2 + k^2 + 2\ldots = 0$$

$$\begin{array}{r} \cancel{9\ 999\ 997\ 0000\ 000} \\ - 2000 + \cancel{3\ 000000} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{9\ 999\ 7\ 0000\ 3} \\ - 30000 \\ \hline 29999 \end{array}$$

$$(y-6) + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 4$$

$$\begin{array}{l} y+z \\ x+y+z = 0 \end{array}$$

$$y^2 + 12y + 36$$

$$z^2 - 12z + 36$$

$$x^2 + y^2 + 2xy$$

$$2x - 6y + 36$$

$$xy - 6z + 36$$

$$z^2 + y^2 + 2z^2$$

$$2x + 2y + 36$$

$$xy + yz + 36$$

$$\begin{cases} y - 6 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 4 \end{cases}$$

$$2\sqrt{3}y - 40\sqrt{3} + x \geq 0$$

$$x \geq 40\sqrt{3} - 2\sqrt{3}y$$

$$x \leq$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 = 36 \quad y(x-2) = 6(x-2) + (x+2)(x-2)$$

$$x^2 - 12x + 36$$

$$(x-2)(y-6 + x+2) = 0$$

$$y^2 - 6y + 36$$

$$x-2 = 0$$

$$xy - 6z + 36$$

$$x+y+z = 6$$

$$yz - 6y + 36$$

$$x = 6 - y - z$$

$$yz = y^2 + 2yz + z^2 - 6y - 6z$$

$$yz = -36 + 6y + 6z + (6-y-z)^2$$

$$y^2 + yz + z^2 - 6(y+z) = 0$$

$$yz = (6-y-z)(-y-z)$$

$$y^2 + z^2 + x^2 - 6(x+y+z) = 0$$

$$yz = (y+z-6)(y+z)$$