



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В теленгре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

√1

$$\begin{cases} xy = z(z-2) \textcircled{1} \Rightarrow z = \frac{xy}{z-2} \\ yz = x(x-2) \textcircled{2} \\ zx = y(y-2) \textcircled{3} \Rightarrow y = \frac{zx}{y-2} \end{cases} \Rightarrow yz = x(x-2) = \frac{xy \cdot zx}{(z-2)(y-2)} \Rightarrow x^2 yz = x(x-2)(y-2)(z-2) \quad | : x \text{ т.к. } x \neq 0$$
$$xyz = (x-2)(y-2)(z-2)$$

$$(x-2)(y-2)(z-2) = (xy - 2x - 2y + 4)(z-2) = xyz - 2xy - 2xz + 4x - 2yz + 4y + 4z - 8 = xyz$$
$$xy + zx + zy - 2x - 2y - 2z = -4 \quad \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} : xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 2x + 2y + 2z - 4$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = -4$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = -4 + 12 = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ $99^3 = 9801 \cdot 99 = 970299$

$999^3 = 998001 \cdot 999 = 997002999$ и т.д.

• $9 \cdot 9 = (10-1)(10-1) = 10^2 - 20 + 1$ тогда

$\underbrace{99 \dots 9}_n^2 = (10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 20^n + 1$

тогда $\underbrace{999 \dots 9}_{30.001}^2 = (10^{30001} - 1)^2 = 10^{60002} - 20^{30001} + 1 = \underbrace{9 \dots 9}_{n-1} \underbrace{80 \dots 01}_{n-1}$

$\underbrace{9 \dots 9}_{n-1} \underbrace{80 \dots 01}_{n-1} \cdot \underbrace{9 \dots 9}_n = \underbrace{99 \dots 9}_{n-1} \underbrace{70 \dots 02}_{n-1} \underbrace{9 \dots 9}_n \Rightarrow \text{кол-во } 9 = 2n-1$

Ответ: 60.001

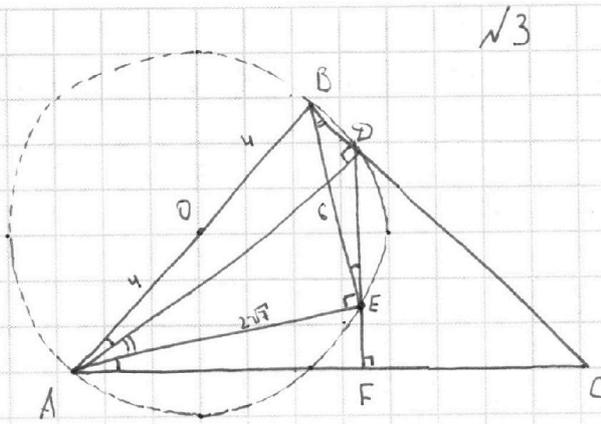


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $\angle BEA = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр

2) по т. Пифагора для $\triangle ABE$

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

3) $\angle BED = \angle EAF$ т.к.

$$\left. \begin{aligned} \angle EAF + \angle AEF &= 90^\circ \\ \angle BED + \angle AEF &= 180^\circ - 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{равны}$$

4) $\angle BED = \angle BAD$ т.к. опираются на одну дугу

5) $\triangle ABD \sim \triangle AEF$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AF} \Rightarrow AF = \frac{AE \cdot AD}{AB}$

6) $\angle EBD = \angle EAD$ т.к. опираются на одну дугу

7) $\triangle ADC \sim \triangle AFD$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AD}$

из 5) и 7) $\Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AD = \frac{AC \cdot AE}{AB}$

$$AF = \frac{AE^2 \cdot AC}{AB^2} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{8 \cdot 8} = \frac{35}{8}$$

Ответ: $AF = \frac{35}{8}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Вероятность выигрыша игрока в первом случае: отношение кол-ва способов выбрать две коробки без шарика из оставшихся коробок после выбора 3-х коробок с шариками к кол-ву способов выбрать 5 коробок из данных.

$$P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}, \text{ где } n - \text{кол-во коробок изначально}$$

Аналогично для ~~раз~~ выбора 7-ми коробок:

$$P_2 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^7}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^4 \cdot C_n^5}{C_n^7 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{(n-3)! \cdot n!}{(n-7)! \cdot 4! \cdot (n-5)! \cdot 5!} = \frac{7! \cdot 2!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{3 \cdot 4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: в 3,5 раза.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть корни ур-и $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ равны x_6 и x_7 ($x_6 \neq x_7$ т.к. по усл. арифм. пр. непостоянна $\Rightarrow D \neq 0$)

Тогда $D = (a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7) > 0$
 $a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 + 4a + 28 > 0$
 $a^4 - 4a^3 + 4a + 28 > 0$ ①

По т. Виета: $x_6 + x_7 = a^2 - 2a$

Аналогично для ур-и $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ корни x_4 и x_9

Тогда $D = (a^3 - 2a^2)^2 - 12(6 - a^5) > 0$
 $a^6 - 4a^5 + 4a^4 + 12a^5 - 72 > 0$
 $a^6 + 8a^5 + 4a^4 - 72 > 0$ ②

По теореме Виета: $x_4 + x_9 = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$

По определению арифметической прогрессии:

$$x_4 + 2d = x_6 \quad x_7 + 2d = x_9 \Rightarrow x_6 - x_4 = x_9 - x_7 \Rightarrow x_6 + x_7 = x_4 + x_9$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \Rightarrow 3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2$$

$$a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

$$a(a-2)(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \\ a=3 \end{cases}$$

Подставим $a=0$ в ②: $0+0+0-72 > 0$ - неверно \Rightarrow не подх

$a=2$ в ①: $16-4 \cdot 8+8+28 > 0$ - верно

$a=2$ в ②: $64+8 \cdot 32+4 \cdot 16-72 > 0$ - верно } \Rightarrow подходит

$a=3$ в ①: $81-4 \cdot 27+4 \cdot 3+28 > 0$ - верно

$a=3$ в ②: $81 \cdot 9+8 \cdot 81 \cdot 3+4 \cdot 81-72 > 0$ - верно } \Rightarrow подходит

Ответ: $a=2$ и $a=3$

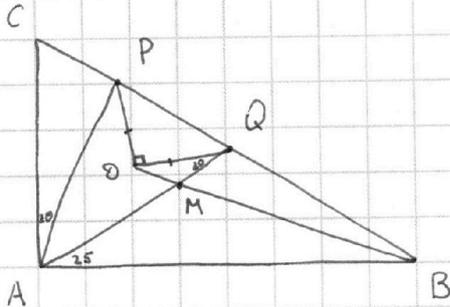


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \angle BCA = 50^\circ \Rightarrow \angle ABC = 40^\circ$$

$$2) \triangle ACQ - \text{пр/с } (AC=CQ) \Rightarrow \angle CAQ = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$3) \triangle PBA - \text{пр/с } (PB=AB) \Rightarrow \angle BAP = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

$$4) \angle CAB = 90^\circ = \angle CAP + \angle PAQ + \angle QAB$$

$$65^\circ = \angle CAP + \angle PAQ$$

$$70^\circ = \angle PAQ + \angle QAB$$

$$\Rightarrow \angle PAQ = 65^\circ + 70^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle CAP = 20^\circ, \angle QAB = 25^\circ$$

$$5) \angle DPQ = \angle QPQ = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DQB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \text{ (т.к. смежные)}$$

6)

$$\angle AQB = 180^\circ - \angle QAB - \angle CBA = 180^\circ - 25^\circ - 40^\circ = 115^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DQA = \angle DQB - \angle AQB = 135^\circ - 115^\circ = 20^\circ$$

$$7) \angle DMQ = \angle AMB \text{ (т.к. вертикал)} \Rightarrow \angle MBA + \angle MAB = \angle MQD + \angle MDQ$$

$$\Rightarrow \angle MBA = \angle MDQ + 20^\circ - 25^\circ = \angle MDQ - 5^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MBA + 25^\circ = \angle MBA$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

2

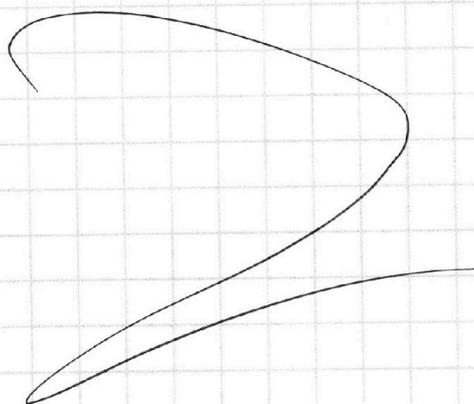


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



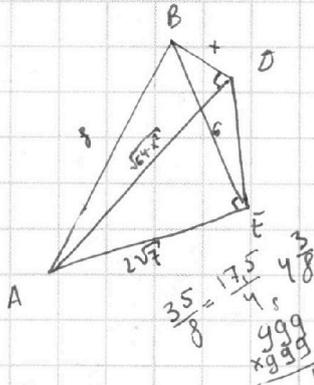


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{64-x^2} \cdot 6 = 2\sqrt{3}x + 8$$

$$\begin{array}{r} 998001 \\ \times 999 \\ \hline 8982009 \\ 89820090 \\ 898200900 \\ \hline 998001999 \end{array}$$

$ABE \sim ADF \sim ACD$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AF}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF}$$

$$AF = \frac{AD \cdot AE}{AB}$$

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AF}$$

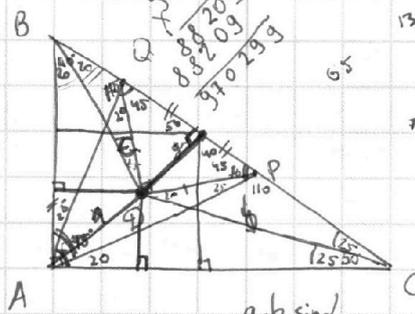
$$AF = \frac{AE \cdot AD}{AB} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{3}}{8 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{10 \cdot 2\sqrt{3}}{8 \cdot 8} = \frac{35}{8}$$

$$AD^2 = AC \cdot AF$$

$$AF = \frac{AD^2}{AC}$$

$$\begin{array}{r} 221AC \\ \times 999 \\ \hline 18982009 \\ 189820090 \\ 1898200900 \\ \hline 99702999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30.001 \\ \times 999 \\ \hline 29991 \\ 299910 \\ 2999100 \\ \hline 30000999 \end{array}$$



$\angle BDC = ?$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$$

$$\begin{array}{r} 10 \cdot 2\sqrt{3} \\ \times 999 \\ \hline 9990 \\ 99900 \\ 999000 \\ \hline 9990000 \end{array}$$

$$999^3 = 99702999$$

$$\begin{cases} x+y=70 \\ y-z=65 \\ x+y+z=90 \\ z=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+8+2y=135 \\ y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25+x=201y \\ 5+x=y \\ x+y+z=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=50 \\ y=25 \\ z=25 \end{cases}$$

$$\left| x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| + |x - 10| = \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4$$

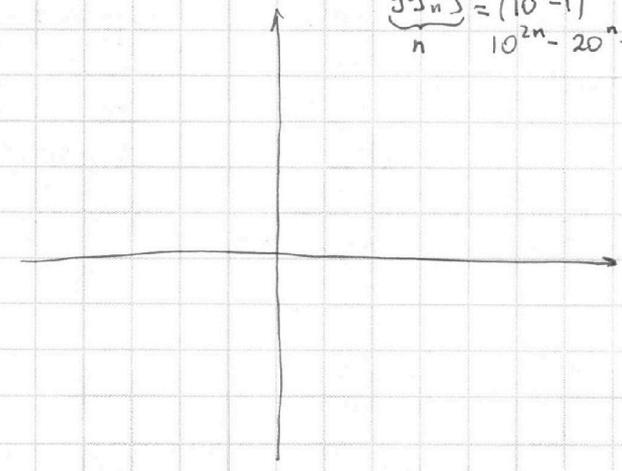
$$g = (10-1)^2 \cdot 180 - x + 20 + 1$$

$$100 - 20 + 1 = 81$$

$$99 \dots 99 = \frac{10^n - 1}{9}$$

$$\frac{10^{2n} - 20^n + 1}{10^{2n} - 20^n + 1} = 1$$

30.001





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = x^2 - 2x \\ zx = y^2 - 2y \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 12 \\ xy + 2x + yz - 2x - 2z - 2y + 12 = ? \end{cases}$$

$$y^2 + 2x + xy = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - yz - 2x - xy = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 3 - yz - 2x - xy = 0$$

$$\begin{cases} xy = z(z-2) \\ yz = x(x-2) \\ zx = y(y-2) \end{cases} \quad z, x, y \neq 2 \neq 0$$

$$\frac{yz^2}{x^2} + \frac{zx^2}{y^2} + \frac{xy^2}{z^2} = \frac{y^2z^4 + z^4x^2 + x^2y^4}{x^2y^2z^2}$$

$$2xz + xy + zy - 2x - 2y - 2z = -4$$

$$xy + yz + zx = y^2 + z^2 + x^2 - 2x - 2y - 2z$$

$$2x + 2y + 2z - 4 = y^2 + z^2 + x^2 - 2x - 2y - 2z$$

$$y^2 + x^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 4 = 0$$

$$(y-2)^2 + (x-2)^2 + (z-2)^2 - 12 + 4 = 0$$

a^2

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0 \quad x_6, x_7$$

$$D = (a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7) > 0$$

$$x_6 \cdot x_7 = a^2 - a - 7$$

$$x_6 + x_7 = a^2 - 2a$$

$$a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a + 28 > 0$$

$$a^4 - 4a^3 + 4a + 28 > 0$$

$$a^4 - 4 - 4a^3 + 4a + 32$$

$$x_6, x_7 = \frac{a^2 - 2a \pm \sqrt{a^4 - 4a^3 + 4a + 28}}{2}$$

$$16 - 4 \cdot 8 + 4 \cdot 2 + 28 = 16 + 8 + 28 = 48$$

$$\frac{24}{52}$$

$$123456$$

$$901$$

$$x_4 + t = x_6$$

$$x_7 + t = x_9$$

$$x_6 - x_4 = x_9 - x_7$$

$$x_6 + x_7 = x_9 + x_4$$

$$a^2(a-2) = a(a-2)$$

$$a^3 - 2a^2 - a^2 + 2a = 0$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$a(a-2)(a-1) = 0$$

$$a = 0 \quad a = 2 \quad a = 1$$

3

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$$P(A) = \frac{3}{n}$$

AF = ?

$$\frac{2\sqrt{7}}{BD} = \frac{x}{6-x}$$

$$\frac{2\sqrt{7}}{10x} = \frac{x}{6-x}$$

$$2\sqrt{7}(6-x) = 10x^2$$

$$12\sqrt{7} - 2\sqrt{7}x = 10x^2$$

$$10x^2 + 2\sqrt{7}x - 12\sqrt{7} = 0$$

$$x = \frac{-2\sqrt{7} \pm \sqrt{4 \cdot 7 + 480}}{20} = \frac{-2\sqrt{7} \pm \sqrt{49 + 480}}{20} = \frac{-2\sqrt{7} \pm \sqrt{529}}{20} = \frac{-2\sqrt{7} \pm 23}{20}$$

$$x = \frac{23 - 2\sqrt{7}}{20}$$

$$AF = \frac{AE \cdot AD}{AB \cdot AB} = \frac{2\sqrt{7} \cdot 10}{8 \cdot 8} = \frac{20\sqrt{7}}{64} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$