



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(99...9)^3 = (11...1 \cdot 9)^3 = 11...1^3 \cdot 9^3 = 11...1^3 \cdot 729$$

$$729 \cdot 111...1 = 729(100...0 + 10...0 + \dots + 100 \cdot 10 + 1)^3$$

$$(99...9)^3 = (100...0 - 1)^3 = \cancel{100...0^3} - 3(100...0)^2 + 3(100...0) - 1$$

⇒ Пусть $n = 10 \text{ шло} + 1$. Тогда

$$(n)^3 = \underbrace{(10...0)^3}_{40000 \text{ нулей}} - 3(10...0)^2 + 3(10...0) - 1$$

Значит, девятки будут две. Одна → т.к. у последнего 0 мы вычитаем 1.

Другая, т.к. у числа n^3 первый с начала разряд ~~будет~~ равен 9. Т.к. $(10...0)^3$ — если у $(10...0)^3$ вычесть любое число, ~~не меньшее~~ ~~меньше~~ ~~тоже~~ меньше него $(100...0)^3$ в 100 раз, то первое число будет 9. А $3(10...0)^2$ более чем в 100 раз меньше $(10...0)^3$. Также заметим, что $3(10...0)^2 \geq 3(10...0)$. Значит, будут только две девятки. Больше никаких девяток образоваться не могут.

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AE}, \text{ т.к. } \triangle AEB \sim \triangle AFD \text{ по углам}$$

$$\frac{\frac{5\sqrt{11}}{3}}{6} = \frac{AF}{\sqrt{11}}$$

$$\frac{5\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}}{3} = 6AF$$

$$5 \cdot 11 = 18AF$$

$$AF = \frac{55}{18}$$

$$\text{Ответ: } \frac{55}{18}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего вариантов выбора 5-ти коробок из $n = C_n^5$

Выигрышных вариантов из них: C_{n-3}^2

Значит, если брать по 5 коробок из n коробок, шанс

$$\text{победы} = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2 \cdot (n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{(n-3)!}{2} \cdot \frac{5!}{n!} = \frac{(n-3)! \cdot 60}{(n-2)(n-1)n}$$

$$\frac{(n-3)! \cdot 60}{(n-2)(n-1)n} = \frac{60}{(n-2)(n-1)n}$$

А теперь, если брать 6-то

$$\text{шанс равен} = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{\frac{(n-3)!}{3 \cdot 2 \cdot (n-6)!}}{\frac{n!}{6!(n-6)!}} = \frac{(n-3)!}{3 \cdot 2} \cdot \frac{6!}{n!} = \frac{(n-3)! \cdot 120}{(n-2)(n-1)n}$$

$$\frac{(n-3)!}{3 \cdot 2} \cdot \frac{6!}{n!} = \frac{(n-3)! \cdot 120}{(n-2)(n-1)n}$$

$= \frac{120}{(n-2)(n-1)n}$. если брать $(n-2)(n-1)(n) = \frac{1}{6}$, то
раньше шанс на победу был равен

60%. А сейчас он равен 120%. $\frac{120\%}{60\%} = 2$

Значит, шанс на победу возрос в 2 раза.

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из этого следует, что $\angle AXE = 90^\circ$, т.к.
 указано DH была высотой к AQ , а DH - есть CH .

Значит, $\triangle AXC \cong \triangle DHX$ по общему углу с вершиной
 в C и углом в $90^\circ \Rightarrow \angle ECH_2 = \angle CPH_2 = \angle AXC$
 $= \beta$, но также он равен $\angle CPH_2 = 2\beta - 70$
 $\Rightarrow \beta = 70$

Тогда, $\angle ACB = 180 - 140 - 40 \Rightarrow \angle ACD = 20^\circ$
 $\Rightarrow AD$ - биссектриса $\angle ACB$

$\angle ABE = 2\beta - 90 = 140 - 90 = 50^\circ$ в $\triangle CH_2D = \triangle CHD$ по
 общей стороне и $\angle H_2CD = \angle HCD$; $\angle CDH_2 = \angle CDH \Rightarrow$

$\Rightarrow H_2D = DH$, $DH \cdot HP = HQ$; $H_2D = DH \Rightarrow DH = PH$

$\Rightarrow H_2B = HB$. $CH_2 = CH$, т.к. $\triangle CH_2D = \triangle CHD$. А $AC = CQ$

Значит, $H_2A = HQ \Rightarrow H_2A = H_2D \neq H_2A = H_2D \Rightarrow H_2D = H_2P$.

Значит, D лежит на биссектрисе $\angle CBA$.

$\angle CBD = \frac{50}{2} = 25^\circ$. Стоит отметить, что есть

вариант, когда CQ и PB не пересекаются. Но решение
 по сути будет идентично, т.к. это не используется в решении

Ответ: 25°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} xy &= 3z + z^2 \\ yz &= 3x + x^2 \\ zx &= 3y + y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 &= \\ x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 &= \\ x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27 &= \end{aligned}$$

$$yz + zx + xy = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27 - 2z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 6(x+y+z) =$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27 - 2z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 6(x+y+z) =$$

$$-x^2 - y^2 - z^2 + 27 = xy + yz + zx \quad x \geq y \geq z$$

$$0 = x^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2yz + 2zx - 27$$

$$\text{либо:} \quad 0 = (x+y)^2 + z(z+2y+2x) - 27 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27 - x^2 - y^2 - z^2 - 3(x+y+z) =$$

$$3(x+y+z) + 27 = xy + yz + zx \Rightarrow$$

$$3x + 3y + 3z - xy - yz - zx + 27 = 0$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 6z + 2z^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz - 3(x+y+z)$$

$$xy = 3z + xy - 3z$$

Формулы эквивалентны

$$xy = 3z + xy - 3z$$

$$6x = 2yz - 2x^2$$

$$6y = 2xz - 2y^2$$

$$6z = 2xy - 2z^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z + 27 =$$

$$yz - 3x + xz - 3y + xy - 3z + 2yz - 2x^2 +$$

$$2xz - 2y^2 + 2xy - 2z^2 + 27 =$$

$$-2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 3yz + 3xz + 3xy - 3x - 3z - 3y + 27 = 0$$

$$6x - 2yz + 6z - 2xy + 6z - 2xy + 3xy + 3yz + 3xz - 3x - 3z - 3y + 27 =$$

$$3x + 3y + 3z + 27 + yz + xy + xz = 0 \quad x(3+y) + y(3+z) + z(3+y) + 27 = 0$$

$$(3+y)(x+z) + y(3+z) = -27$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☒2
☒3
☒4
☒5
☒6
☒7
☒СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2x + y + yz + zx = -9x - 9y - 9z = 2^2 - xy + x^2 - yz + y^2 - 2x$$

$$2x = \frac{x^2 - 2xy + y^2 + 2^2 - 2yz - 2xz + y^2 - y^2 + z^2 + x^2 - z^2 - x^2}{2}$$

$$2x = (x-y)^2 + (z-y)^2 + (x-z)^2 - z^2 - x^2 - y^2$$

$$2x = (x-y+z)(x-y-z) + (z-y+x)(z-y-x) +$$

$$(x-z+y)(x-z-y) = 2x = (x-y+z)(x-y-z) + (x-y+z)(x+y+z)$$

$$+ (x+y-z)(x-y-z) = (x-y+z)(x-y-z+x+y-z) +$$

$$(x-y-z)(x-y-z) = (x-y+z)(2x-2z) + (x+y-z)(x-y-z)$$

$$(x-y+z)(x-y-z) - (x-y+z)(x+y-z) + (x+y-z)(x-z-y)$$

$$(x-y-z)(x-y+z+x-z-y) = (x+y-z)(x-y-z-x+y-z) +$$

$$(x-y+z)(x-y-z) = (x+y-z)(-2z) + (x-y+z)(x-y-z)$$

$$-2x = 2(z-x-y)z + (x-y+z)(x-y-z)$$

2

$$... 99$$

$$9^3 = 81 \cdot 9 = 729$$

$$19^3 = (10+9)^3 =$$

$$99^3 = (100-1)(100-1)$$

$$99$$

$$99 \cdot 100 = 9900$$

$$99 \cdot 99 = 9801$$

$$9801 \cdot 100 = 980100$$

$$9801 \cdot 99 = 980001$$

бм шмкс:

бм шмкс

$$C_{n-3}^5$$

Всего вариантов

выбора корабля:

выбор корабля

$$C_{n-3}^2$$

шмкс =

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)! \cdot 2!}{(n-5)! \cdot 5!} = \frac{(n-3)!}{(n-5)! \cdot 5!}$$

$$C_n^3 = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!}$$

$$C_n^5 = \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!}$$

$$C_n^7 = \frac{n!}{(n-7)! \cdot 7!}$$

$$C_n^9 = \frac{n!}{(n-9)! \cdot 9!}$$

$$C_n^{11} = \frac{n!}{(n-11)! \cdot 11!}$$

$$C_n^{13} = \frac{n!}{(n-13)! \cdot 13!}$$

$$C_n^{15} = \frac{n!}{(n-15)! \cdot 15!}$$

$$C_n^{17} = \frac{n!}{(n-17)! \cdot 17!}$$

$$C_n^{19} = \frac{n!}{(n-19)! \cdot 19!}$$

$$C_n^3 = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!}$$

$$C_n^5 = \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!}$$

$$C_n^7 = \frac{n!}{(n-7)! \cdot 7!}$$

$$C_n^9 = \frac{n!}{(n-9)! \cdot 9!}$$

$$C_n^{11} = \frac{n!}{(n-11)! \cdot 11!}$$

$$C_n^{13} = \frac{n!}{(n-13)! \cdot 13!}$$

$$C_n^{15} = \frac{n!}{(n-15)! \cdot 15!}$$

$$C_n^{17} = \frac{n!}{(n-17)! \cdot 17!}$$

$$C_n^{19} = \frac{n!}{(n-19)! \cdot 19!}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

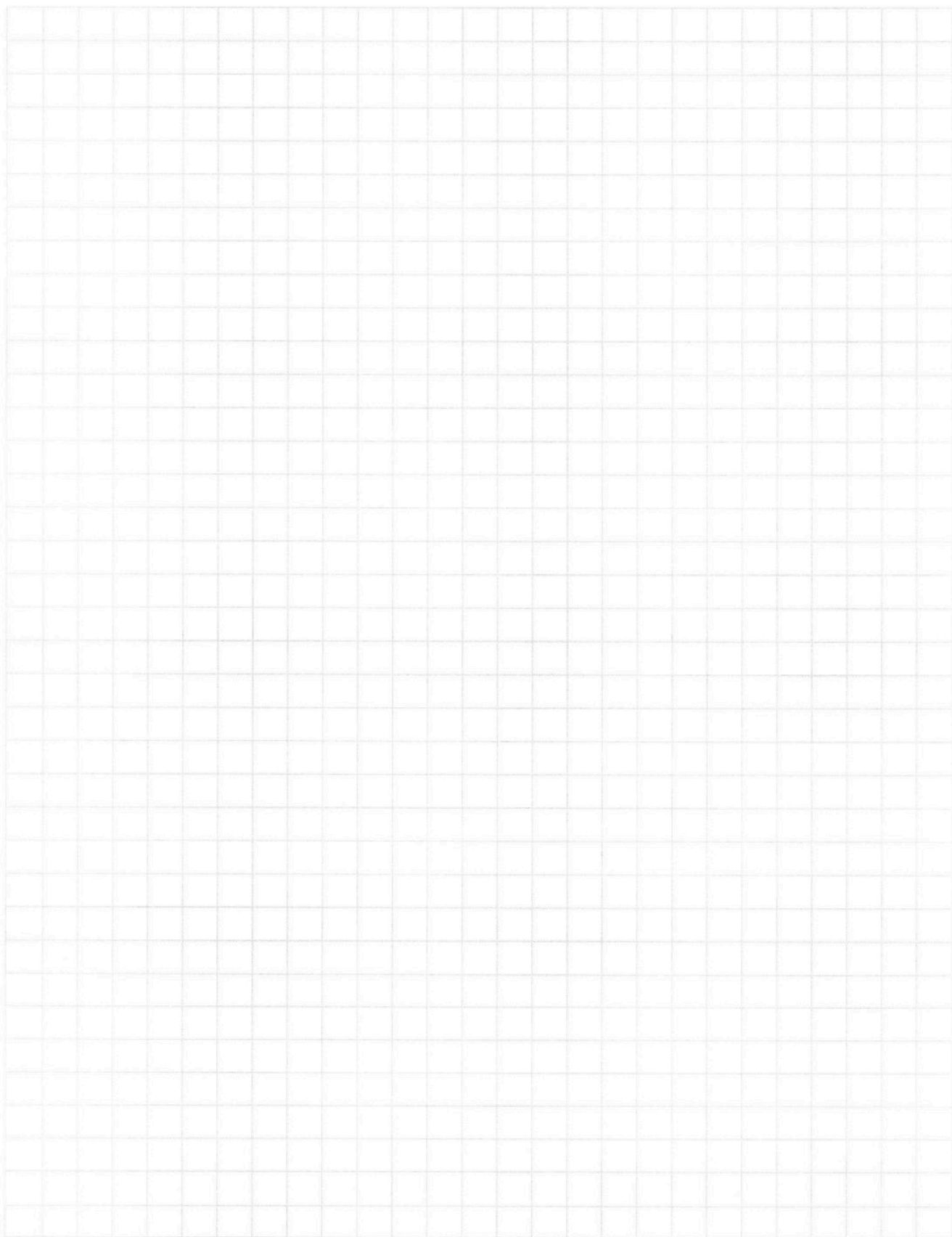
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

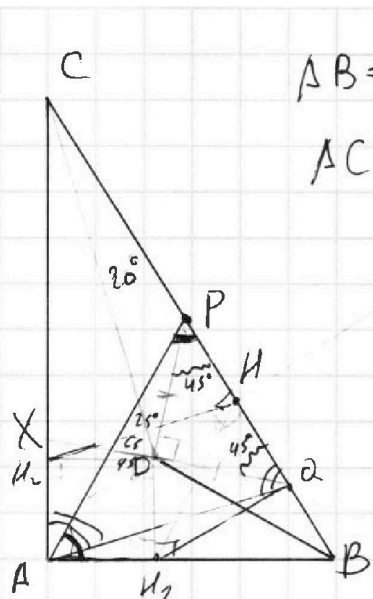
5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = BP$$

$$AC = CQ$$

$$\angle CML \angle APB = 40,50$$

$$\angle ABC = 50^\circ$$

$$\beta = \frac{140}{3}$$

$$3\beta = 140^\circ$$

$$\angle ABQ = 90 - \beta$$

$$180 - 90 - \beta - 180 + 2\beta = 3\beta - 90^\circ$$

$$180 - 3\beta = \angle C$$

$$180 - 3\beta + 90 = \frac{270 - 3\beta}{2} =$$

$$135 - \frac{3}{2}\beta = \angle$$

$$\angle = 65^\circ$$

$$\angle \angle Q = 180 - 65 = 115$$

$$\angle QDB + \angle DBQ = 65^\circ$$

$$\angle + \beta = 180 - \angle PAQ$$

$$\angle CDP = 180 - 10 - 135 = 25$$

$$H_1 D = HQ = DH_2 = PH$$

$$\angle DQB = \angle ACP + \angle XDC = 140$$

$$140 + 90 + 45 = 275$$

$$AB = BP$$

$$85^\circ - 175$$

$$3 \cdot 65^\circ$$

$$\beta = 70$$

$$\angle H_1 D Q = 315 - 90 - 40 - 135 =$$

$$315 - 90 - 50 - 135 =$$

$$90 - 135 = 225$$

$$\angle B = \angle H_1 D Q = 135^\circ$$

$$\angle 20 - 115 = 10 + 45 = 85$$

$$729 \cdot 111 =$$

$$H_1 D Q = 95$$

$$72900 + 7290 + 729 =$$

$$90 - 3\beta + 70 = 160 - 2\beta$$

$$145999$$

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) =$$

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$10000 - 300 = 19700$$