



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое заняла фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$(xyz)^2 = (xyz)(z+4)(y+4)(x+4)$$

$$xyz = (zy + 4z + 4y + 16)(x+4)$$

$$\cancel{xyz} = \cancel{xyz} + 4xz + 4xy + 16x + 4yz + 16z + 16y + 6y$$

$$4(xz + xy + yz) + 16(y + x + z) = 0$$

$$xz + xy + yz = -4(x + y + z)$$

$$-4(x + y + z) = xy + yz + zx = z^2 + y^2 + x^2 + 4z + 4y + 4x$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4(x + y + z) = -4(x + y + z)$$

$$x^2 + 8x + z^2 + 8z + y^2 + 8y = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 + z^2 + 8z + 16 + y^2 + 8y + 16 = 48$$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 48$$

Ответ: 48



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \overbrace{994\dots9}^{25000 \text{ раз}} = \overbrace{10\dots0}^{25000 \text{ раз}} - 1 = 10^{25000} - 1$$

$$\begin{aligned} 25000 = k \Rightarrow n &= 10^k - 1 \Rightarrow n^3 = (10^k - 1)^3 \\ &= 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1 \\ &= 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1 \end{aligned}$$

$$3 \cdot 10^k - 1 = \overbrace{3000\dots0}^{k \text{ раз}} - 1$$

$$\begin{array}{r} 300\dots0 \\ - 1 \\ \hline 299\dots9 \end{array}$$

k раз

$$10^k - 3 = \overbrace{1000\dots0}^{k \text{ раз}} - 3$$

$$\begin{aligned} 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} &= 10^{2k} \cdot (10^k - 3) \\ &= \overbrace{1000\dots0}^{2k \text{ раз}} - \overbrace{1000\dots0}^{k-1 \text{ раз}} \\ &= \overbrace{999\dots9}^{k-1 \text{ раз}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (10^k - 3) \cdot 10^{2k} = \overbrace{99\dots97000\dots0}^{k-1 \text{ раз}} \quad 2k \text{ раз}$$

$$\begin{aligned} (10^k - 3) \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1 &= \overbrace{99\dots970\dots0}^{k-1 \text{ раз}} + \overbrace{299\dots97}^{k-1 \text{ раз}} \\ &= \overbrace{99\dots970\dots099\dots97}^{k \text{ раз}} + \overbrace{29\dots99}^{k-1 \text{ раз}} = \overbrace{99\dots970\dots029\dots9}^{k-1 \text{ раз}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ всего $k + k - 1 = 2k - 1$ девяток в дес. записи

$$\text{числа } n^3, k = 25000 \Rightarrow 2k - 1 = 50000 - 1$$

$$= 49999 \text{ девяток. Ответ: } 49999$$

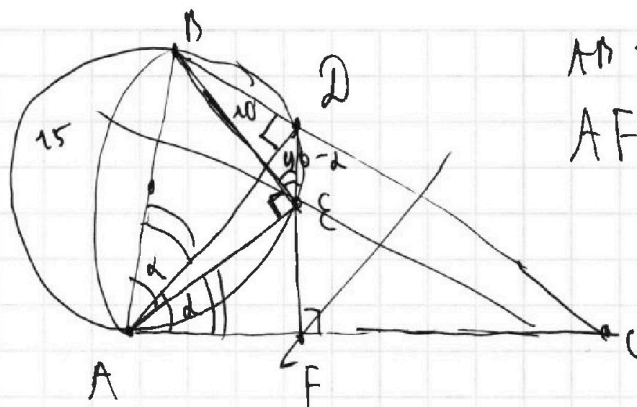


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

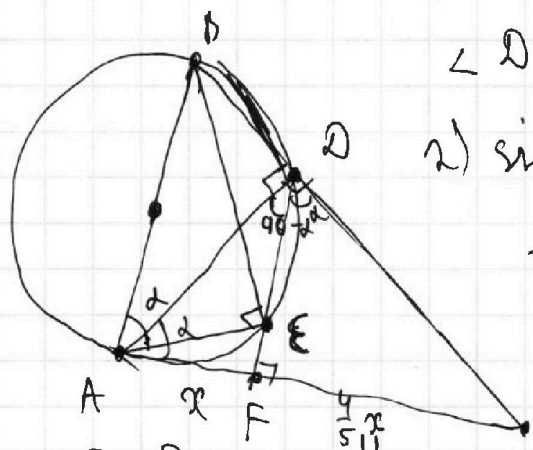


$$AB = 15, BE = 10, AC = 20$$

AF = ?

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AF}{EF} = \frac{AD}{DF}$$

1) $\angle BAE = \alpha \Rightarrow \angle BDE = 180 - \alpha$ (A, B, D, E на осп. окруж.)
 $\angle BDA = 90^\circ$ (центр на хорде) $\Rightarrow \angle ADF = 90 - \alpha \Rightarrow$



$$\angle DAF = 90 - 40 + \alpha = \alpha$$

$$2) \sin \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$3) \angle FDC = 40 - 40 + \alpha = \alpha$$

$$AF = x \Rightarrow DF = AF \tan \alpha = \frac{2x}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \alpha = \frac{DF}{AF} \Rightarrow FC = DF \cdot \tan \alpha = \frac{2x}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}x$$

$$\Rightarrow AF + FC = x + \frac{4}{5}x = 20$$

$$\frac{9}{5}x = 20 \Rightarrow x = \frac{100}{9}$$

Ответ: $AF = \frac{100}{9}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0$$

$$x_1 = a_1 + 3d \quad a \neq 0 \quad x_3 = a_1 + d$$

$$2) x^2 - \left(\frac{a^3 - a^2}{2}\right)x - a^6 - 4a - 2 = 0 \quad x_2 = a_1 + 4d \quad x_4 = a_1 + 6d$$

x_1, x_3 — корни уравн. 1) и x_2, x_4 — корни уравн. 2)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2a_1 + 3d + 4d = 2a_1 + 7d \\ x_3 + x_4 &= 2a_1 + d + 6d = 2a_1 + 7d \end{aligned} \Rightarrow x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

по теор. Виета $a^2 - a = x_1 + x_2$
 $x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2} \Rightarrow$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$2a(a-1) = a^3 - a^2$$

$$(a-2)(a-1)a = 0$$

$$a = 0$$

$$или$$

$$a = 1$$

$$или$$

$$a = 2$$

$$1) x^2 + \frac{2}{3} = 0$$

$$2) x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0$$

$$\geq \frac{2}{3} > 0$$

при $d > 0$

$$x_2 = 1 + \sqrt{3}$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{3}$$

$$1) x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$2) x^2 - 7 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$\geq \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$$

$$x_2 - x_1 = a_1 + 4d - a_1 - 3d = d = 2\sqrt{3}$$

$$x_2 = a_1 + 8\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 1 - 7\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$1) x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$2) x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$1) (x-1)^2 = 3$$

$$2) (x-1)^2 = 5\sqrt{3}$$

$$2) x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$1) x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

ответ: $a = 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если мы поворачиваем фигуру относительно одной точки, то при повороте расстояние точки ^{до этой точки} принадлежит фигуре ^{относ. от фигуры} будет таким же, что и до поворота. Расстояние ^{от} до точки принадлежит фигуре φ до нач. координат будет ≥ 12 , т.к. если мы проведем φ - мы $x^2 + y^2 = a$ $a < 144$, то эта окруж. не кас. прямой $y = 12$ и не доходит до фигуры M . Расстояние от точки в фигуре φ до нач. координат принадлежит ~~от~~ $(12; a]$ от 12 до 36 включ. т.к. при $a \in [144; 1296]$ окружность $x^2 + y^2 = a$ пересек. фигуру по y оси или по 1 или 2 точкам. Если $a > 1296$, то фигура внутри этой окруж. Это есть при повороте на π по час. стрелке ^{относ. нач. коор.}, то нам подойдут точки удаленные от фигуры φ на расстояние от 12 до 36. Но часть этих φ площадей нам не подойдет т.к. мы повернули на π ^{назад} $\Rightarrow$ Площадь этой фигуры равна площади изобраз. на зеркале.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

$$\left| y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6$$

1) $y = 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$ - линейн. функ., граф экв. прямая

2) $y = 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$ - линейн. функ., граф экв. прямая

1)

x	0	-18√3	18√3
y	15	18	12

2)

x	0	-18√3	18√3
y	15	12	18

1) Если $\begin{cases} y \geq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ y \geq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$ 18

$$\begin{aligned} 2y - 30 &\leq 6 \\ y &\leq 18 \end{aligned}$$

2) Если $\begin{cases} y \leq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ y \leq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$

$$30 - 2y \leq 6$$

$$y \geq 12$$

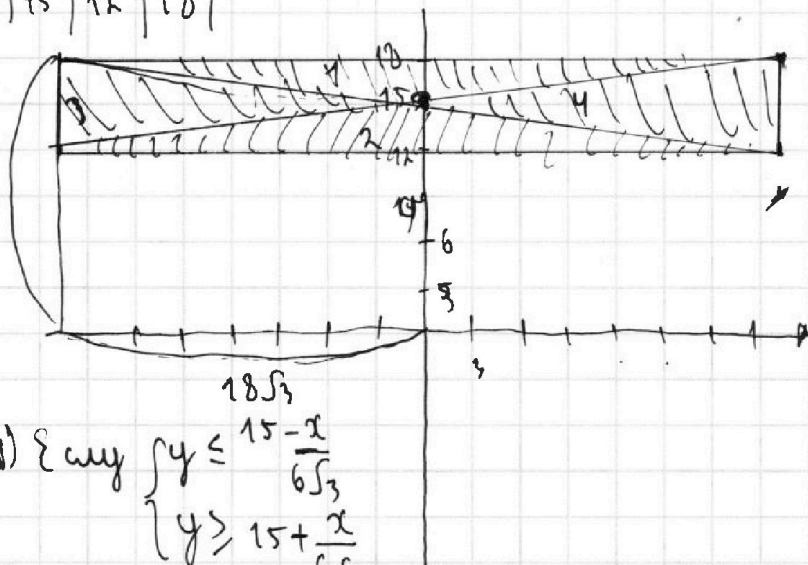
3) Если $\begin{cases} y \geq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ y \leq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$

$$\begin{aligned} y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 - y + \frac{x}{6\sqrt{3}} &\leq 6 \\ \frac{x}{3\sqrt{3}} &\leq 6 \quad x \leq 18\sqrt{3} \end{aligned}$$

4) Если $\begin{cases} y \leq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ y \geq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$

$$\begin{aligned} 15 - y - \frac{x}{6\sqrt{3}} + y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} &\leq 6 \\ \frac{2x}{6\sqrt{3}} &\geq -6 \quad x \geq -18\sqrt{3} \end{aligned}$$

из этого следует, что
Фигура M представляет собой ромб со сторонами 6 и $36\sqrt{3}$



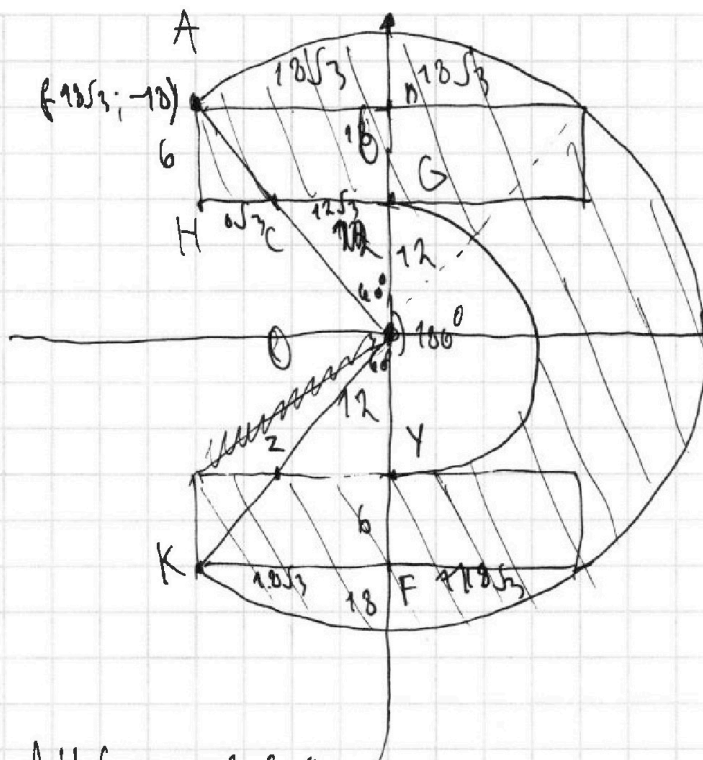


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



черт. 3

$\triangle ABO$ - прямоугольн.

$$AB = 18\sqrt{3} \quad BO = 10 \quad \Rightarrow \tan \angle AOB = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \angle AOB = \angle KOF = 60^\circ$$

$$S_M = \pi \cdot 36^2 \cdot \frac{360^\circ}{360^\circ} - \frac{\pi \cdot 12^2}{2}$$

$$+ 2S_{\triangle AHC} - 2S_{\triangle CGO}$$

$$= 1008\pi - 72\pi + 2S_{\triangle AHC} - 2S_{\triangle CGO}$$

$$\triangle AHC \sim \triangle CGO$$

$$\angle AHC = \angle CGO = 40^\circ$$

$$\angle HAC = \angle GCO \text{ (попарно лев.)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AHC}}{S_{\triangle CGO}} = \left(\frac{AH}{GO}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_M = 1008\pi + 2S_{\triangle AHC} - 2 \cdot 4S_{\triangle AHC}$$

$$= 1008\pi - 6S_{\triangle AHC} = 1008\pi - 6 \cdot \frac{18\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 1008\pi - 102\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } 1008\pi - 102\sqrt{3}$$

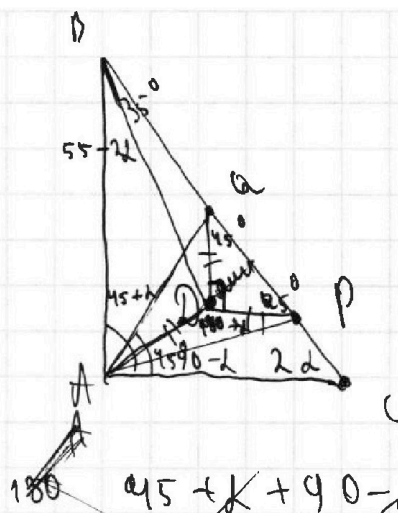


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

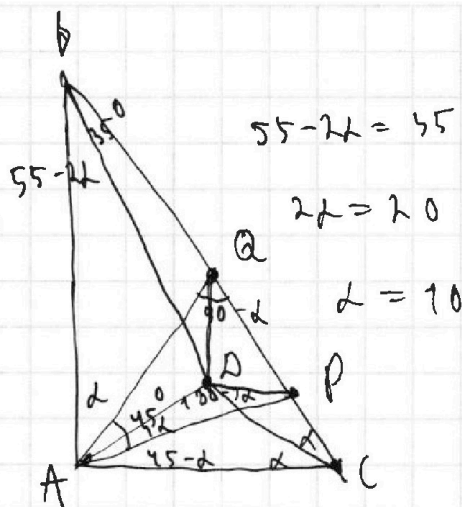
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = BP$$
$$AC = BC$$
$$\angle DBC = 35^\circ$$



$$\angle QAB = 45^\circ$$

Заметим:

$$45 + x + 90 - x = 135 - 2 \quad 1) \angle ACB = 2x \Rightarrow \angle ABC = 90 - 2x$$

$$\angle AC =$$

$$AB = BP \Rightarrow \triangle ABP - \text{равноб.} \Rightarrow \angle BAP$$

$$= \angle BPA = \frac{180 - 90 + 2x}{2} = 45 + x$$

$$\text{Аналог. } \triangle AQC - \text{равноб.} \Rightarrow \angle QAC = \angle AQC = 90 - x$$

$$2) \angle BAC + \angle QAC = \angle BAQ + \angle QAP + \angle QAP + \angle PAC$$

$$45 + x + 90 - x = 90 + \angle QAP \Rightarrow \angle QAP = 45^\circ$$

$$\angle QAP = \angle QAP = 45^\circ \Rightarrow D - \text{центр, опис. окруж. около } \triangle ABC \Rightarrow AD = QD = DP$$

$$3) \triangle ADQ = \triangle CDQ \text{ по III-му признаку}$$

$$\begin{cases} DQ - \text{общ.} \\ AD = CD \\ AQ = CQ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle ADQ = \angle CDQ = x$$

$$4) \angle ABA = 45 + x - 45 = x$$

$$\Rightarrow \angle AQP = 90 - 2x + x = 90 - x$$

$$(\text{по теор. о биссектрисе } \angle D)$$

$$\Rightarrow \angle ADP = 2\angle AQP = 180 - 2x$$

$$(\text{по теор. о биссектрисе } \angle D)$$

$$\Rightarrow \angle ADP + \angle ACP = 180 - 2x + 2x = 180$$

$$\Rightarrow \angle ADP + \angle ACP = 180 \Rightarrow \text{на опис. окруж.}$$

$$\Rightarrow \angle ADP = \angle ACP = x \Rightarrow \angle ACP = x$$

$$\Rightarrow \angle ACP = x \Rightarrow \angle ACP = x$$

$$\Rightarrow \angle ACP = x \Rightarrow \angle ACP = x$$

$$\Rightarrow \angle ACP = x \Rightarrow \angle ACP = x$$

$$\Rightarrow \angle ACP = x \Rightarrow \angle ACP = x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \quad x_1 = b_4 \quad x_2 = b_5$$

$$x^2 - (a^3 - a^2)x - \frac{2a^6 - 8a - 4}{2} = 0 \quad x_3 = b_2 \quad x_4 = b_4$$

b_n - член геом. прогр.

$$\Rightarrow x_1 = b_1 q^3 \quad 440244$$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, q - геом. прогр.

$$x_2 = b_1 q$$

$$x_1 x_2 = b_1 q^3 \cdot b_1 q^4 = b_1^2 \cdot q^7 \quad (100-1)^7$$

$$x_3 = b_1 q$$

$$x_3 x_4 = b_1 q \cdot b_1 q^6 = b_1^2 \cdot q^7 \quad = 1000000$$

$$x_4 = b_1 q^6$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 = x_3 x_4$$

$$x = 18\sqrt{3} \quad +300 \quad -1 \quad 15 \quad 10 \quad \sqrt{55}$$

$$\tan = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x_1 x_2 = \frac{2-a^3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2-a^3}{3} = -a^6 - 4a - 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial F} \cdot \frac{1}{\partial F} = \tan^2$$

$$x_3 x_4 = \frac{-2a^6 - 8a - 4}{2}$$

$$2 - a^3 = -3a^6 - 12a - 6$$

$$3a^6 - a^3 + 12a + 8 = 0$$

$$b_1 q^3 + b_1 q^4 = a^2 - a$$

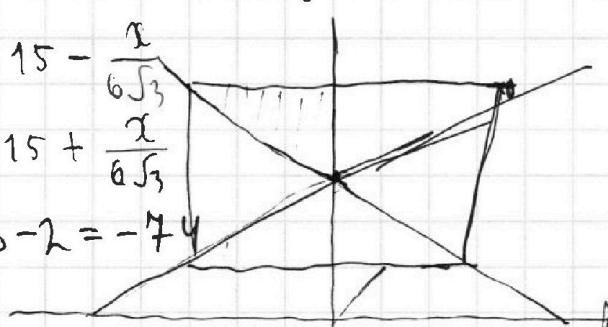
$$|y + t - 15| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 6$$

$$b_1 q + b_1 q^6 = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$y = 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$y = 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$\frac{-2 \cdot 2^6 - 8 \cdot 2 - 4}{2} = -64 - 8 - 2 = -74$$



$$1 \quad \frac{2-8}{3} = -2 \quad 24 - 30 \leq 6$$

$$y \leq 18$$

$$y \leq 18$$

$$C_n$$

$$30 - 24 \leq 6$$

$$y \geq 12$$

$$y \geq 12$$

