



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E – точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В теленгре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = x^2 + 8xy + 16 + y^2 + 8yz + 16 + z^2 + 8zx + 16$$

$$\begin{cases} yz + yx + zx + 4y + xy + 4z + 4x \\ 2x + xy + 2yz + 4 = x(2+y) + z(y+2) = (x+2)(y+2) \\ (x+2)(y+2) + (y+2)(z+2) + (z+2)(x+2) + 36 \end{cases}$$

$$x = \frac{yz + z^2}{y} = \frac{yz + y^2}{z}$$

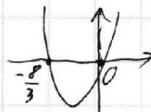
$$z^3 + yz^2 = y^3 + y^2y^2 \quad \text{аналогично решить для } z$$

$$z^2(z+y) = y^2(y+z) = x^2(x+y)$$

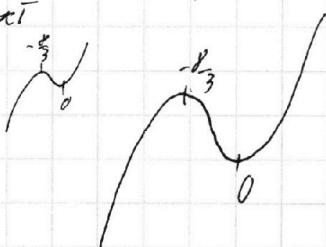
$$(x^3 + yx^2) = 3x^2 + 8x \quad \boxed{\text{так}} \rightarrow \text{Уравнение } x^3 + 8x \text{ имеет в единицах}$$

$$\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ x^2 &= 4x + x^2 \\ 4x &= 0 \\ x &= 0 \quad \text{или } x \neq 0 \end{aligned}$$

$$x(3x+8)$$



$x^2/(x+y)$ характер



$$x(-\frac{8}{3}, 0) \rightarrow x^2/(x+y)$$



I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$h = \underbrace{99\dots9}_{25000} = 10^{25000} - 1$$

$$h^3 = (10^{25000} - 1)^3 = 10^{25000 \cdot 3} - 3 \cdot 10^{25000 \cdot 2} + 3 \cdot 10^{25000} - 1 = 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1$$

$$10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} = \begin{array}{r} 99\dots97000\dots0 \\ \hline 45000 \\ 74999 \\ \hline 50000 \\ 49999 \\ \hline 50000 \end{array}$$

$$3 \cdot 10^{25000} - 1 = \begin{array}{r} 299\dots9 \\ \hline 25001 \\ 1 \end{array}$$

$$K-60 \text{ "" } 9'' + 5000 - 5000 = 24999$$

$$K-60 \text{ "" } 9'' 25001 - 1 = 25000$$

ответ:

$$\text{Всего, } 9'' 25000 + 24999 = 49999$$

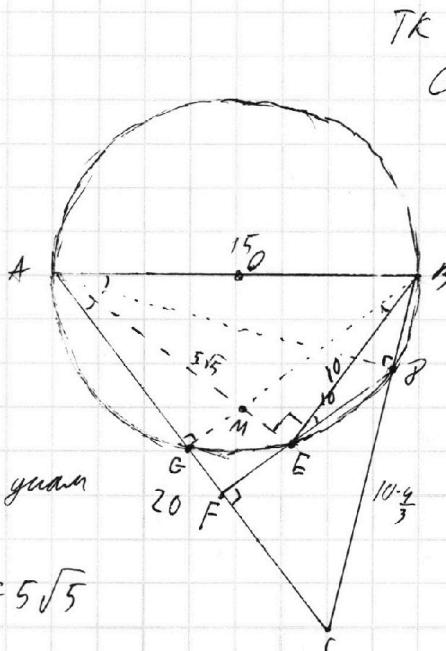
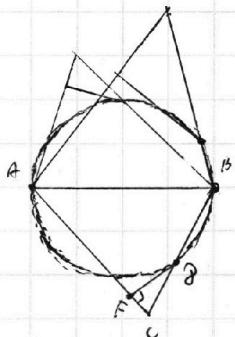


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



TK ABC с остроуг

C t



$\angle AEB = 90^\circ$ как ита углы

$$AE = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$\angle AFB$ итм та градус; $\angle AGB \approx$ итм та градус

$$\angle AGB = 90^\circ \Rightarrow FB \parallel FD \Rightarrow \angle EBD = \angle EBG \Rightarrow EG = BD$$

также

$$\cos \angle BAE = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\angle BAP = \angle FAE$$

~~Доказать~~

$$ADC \sim AFB$$

$$DC = 10 \cdot \frac{20}{15} = 10 \cdot \frac{4}{3}$$

$$CFD \sim CAD \Rightarrow CF = CP \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{(10 \cdot \frac{4}{3})^2}{20} = 5 \cdot \frac{16}{9} = \frac{80}{9}$$

$$AF = AC - CF = \frac{180}{9} - \frac{80}{9} = \boxed{\frac{100}{9}}$$

утверж



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нужно выбрать n коробок

$K-60$ способов выбрать 5 коробок C_n^5

$K-60$ способов подобрать C_{n-3}^2 (из трех коробок с марками выбрать еще 2 из ост)

$$\rightarrow \text{Вероятность подобрать } \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

разрешим выбрать 8 коробок

максимальная вероятность подобрать $\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8}$

$$\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8} : \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{C_{n-3}^5}{C_{n-3}^2} \cdot \frac{C_n^5}{C_n^8} = \frac{\frac{(n-3)!}{5!(n-3-5)!}}{\frac{(n-3)!}{2!(n-3-2)!}} \cdot \frac{\frac{n!}{8!(n-8)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}}^{-1}$$

$$\frac{2!(n-5)!}{5!(n-8)!} \cdot \left(\frac{5!(n-5)!}{8!(n-8)!} \right)^{-1} = \frac{2!(n-5)!}{5!(n-8)!} \cdot \frac{8!(n-8)!}{5!(n-5)!} = \frac{2! \cdot 8!}{5! \cdot 5!}$$

$$8! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 120 \cdot 42 \cdot 8 = 960 \cdot 42$$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5}$$

$\begin{array}{r} \times 960 \\ \hline 192 \\ 384 \\ \hline 40320 \end{array}$

$\begin{array}{r} 11 \\ 5 \mid 6 \end{array}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~D>0~~

$$\begin{cases} \vartheta_1 = a^4(a-1)^2 + 16(a^6 - 4a - 2) > 0 \\ \vartheta_2 = a^2(a-1)^2 - \frac{4}{3}(2 - a^3) > 0 \end{cases}$$

a

$$0 \quad 0 \cdot (-1)^2 + 16(0 - 4 \cdot 0 - 2) = -32 < 0$$

$$1 \quad 1 \cdot 0 + 16(1 - 4 - 2) = -5 \cdot 16 < 0$$

$$-1 \quad 1 \cdot (-2)^2 + 16(1 + 4 - 2) = 4 + 16 \cdot 3 > 0 \quad 1 \cdot (-2)^2 - \frac{4}{3}(2+1) = 4 - \frac{4}{3} \cdot 3 = 0$$

~~ответ: Таких a не существует~~

$$| a(a^2+a+2) = 0$$

$$| a(a^2+a-2) = 0$$

$$| a(a+2)(a-1) = 0$$

$$| a = 0, -1, 1, -2$$

~~D>0~~

$$\begin{cases} \vartheta_1 = a^4(a-1)^2 + 16(a^6 - 4a - 2) > 0 \\ \vartheta_2 = a^2(a-1)^2 - \frac{4}{3}(2 - a^3) > 0 \end{cases}$$

$$-2 \quad 16 \cdot (-3)^2 + 16(64 + 4 \cdot 2 - 2) = 16 \cdot 9 + 16 \cdot 70 > 0$$

$$0 \quad -32 < 0$$

$$1 \quad -5 \cdot 16 < 0$$

~~D2~~

$$4 \cdot (-3)^2 - \frac{4}{3}(2-8) = 4 \cdot 9 - \frac{4}{3} \cdot 6$$

$$4 \cdot 9 + 2 \cdot 4 > 0$$

~~ответ: $a = -2$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$$

разность прогрессии d

$$\Delta = (a^2 - a)^2 - 4 \cdot \frac{2-a^3}{3} > 0$$

$$x = \frac{a^2 - a \pm \sqrt{(a^2 - a)^2 - \frac{4}{3}(2-a^3)}}{2}$$

разница между a_4 и a_5 членами d

$$d = \sqrt{\Delta}$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

$$\Delta = (a^2(a-1))^2 + 4 \cdot 2(2a^6 - 8a - 4) > 0 \text{ между } 2 \text{ и } 4 \text{ членами } d$$

$$x = \frac{-a^2(a-1) \pm \sqrt{\Delta}}{4}$$

$$5d = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$2 \cdot 5 \sqrt{a^2(a-1)^2 - \frac{4}{3}(2-a^3)} = \sqrt{a^4(a-1)^2 - 16(2a^6 - 8a - 4)}$$

$$4 \cdot 2 \cdot 5 \left(a^2(a-1)^2 - \frac{4}{3}(2-a^3) \right) = a^4(a-1)^4 - 16(a^6 - 8a - 4)$$

$$\begin{array}{r} a^6 - 8a - 4 \\ a^6 - 2a^3 \quad -a^3 - 2 \\ \hline 2a^3 \\ \hline 2a^3 - 4 \end{array}$$

$$\frac{1}{4} \left(a^2(1-a) - \sqrt{a^4(a-1)^2 + 4 \cdot 2(2a^6 - 8a - 4)} \right) = n(2)$$

$$\frac{1}{2} \left(a^2 - a - \sqrt{a^2 - a - \frac{4}{3}(2-a^3)} \right) \quad \text{симметрия относительно } n(2) + \frac{5}{2} d$$

$$\frac{1}{2} \left(a^2 - a + \sqrt{a^2 - a - \frac{4}{3}(2-a^3)} \right) \quad \text{симметрия относительно } n(2) + \frac{5}{2} d$$

$$\frac{1}{4} \left(a^2(1-a) + \sqrt{a^4(a-1)^2 + 16(a^6 - 8a - 4)} \right)$$

$$\frac{n(2) + n(7)}{2} = \frac{n(4) + n(5)}{2}$$

$$a^2(1-a) = a^2 - a$$

$$a^2 - a^3 - a^2 + a = 0$$

$$-a^3 + a = 0$$

$$a = a^3$$

$$a^3 - a = 0$$

$$a(a^2 - 1) = 0$$

$$a = 0; 1; -1$$

$$\frac{a^2 - a^3}{4} = \frac{a^2 - a}{2} \rightarrow a^3 - a^2 + 2a^2 - 2a = 0$$

$$a^3 + a^2 - 2a = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{4} \left((-2)^2 (4+2) - \sqrt{\cancel{16 \cdot 79}} / \sqrt{16 \cdot 79} \right)$$

+26

$$\frac{1}{2} \left(4+2 + \sqrt{4 \cdot 11} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(4+2 + \sqrt{4 \cdot 11} \right) + d \rightarrow d = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 11} = 2\sqrt{11}$$

$$\frac{1}{4} \left(4+3 - \sqrt{16 \cdot 79} \right) + 2d$$

$$\frac{1}{4} \left(12 - 4\sqrt{79} \right) - \frac{1}{2} \left(6 + 2\sqrt{11} \right) = 3 - \sqrt{79} - 3 + \sqrt{11} = \sqrt{11} - \sqrt{79} \neq 2 \cdot 2\sqrt{11}$$

$d \neq -2$

(ответ: 0)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 6$$

$$\text{I } y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}, y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} > 0$$

$$2y - 30 \leq 6$$

$$y \leq 18$$

$$\text{II } y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}, y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} < 0$$

$$-2y + 30 \leq 6$$

$$y \geq 12$$

$$\text{III } y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0, y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0$$

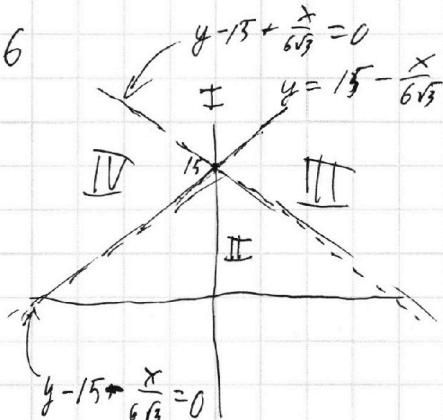
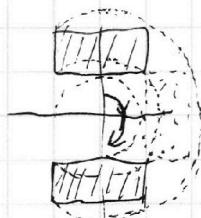
$$\frac{2x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$

$$x \leq 18\sqrt{3}$$

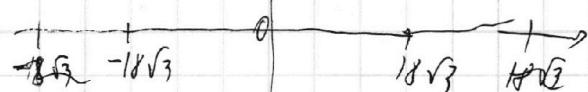
$$\text{IV } y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} < 0, y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} > 0$$

$$\frac{-2x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$

$$x \geq -18\sqrt{3}$$



$$\begin{aligned} 12 - 15 - \frac{-18\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} &= 0 & 18 - 15 + \frac{-18\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} &= 0 \\ 12 - 15 + \frac{18\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} &= 0 & 18 - 15 - \frac{18\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} &= 0 \end{aligned}$$



$$\tan \alpha = \frac{18\sqrt{3}}{18\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\sqrt{(18\sqrt{3})^2 + 18^2} = 18\sqrt{2} = 36$$

$$\frac{360^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$$



$$\frac{360^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 - \frac{\pi r^2}{2} + 2 \cdot \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{12 \cdot 12\sqrt{3}}{2}$$

$$\pi r \cdot 36 - \pi r \cdot 12 \cdot 6 + 36\sqrt{3} - 144\sqrt{3} = 1080\pi - 720 - 108\sqrt{3}$$





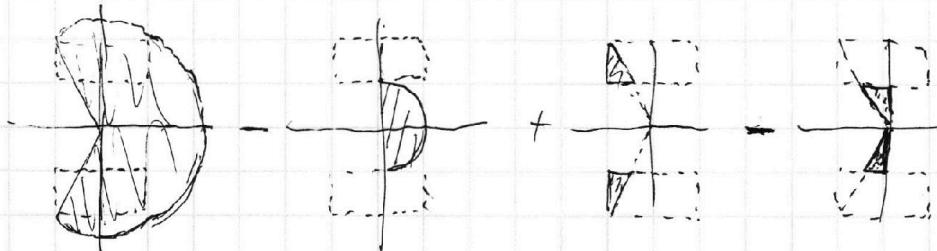
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ответ:
 $1008\pi - 108\sqrt{3}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

