



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телесигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓1 $x, y, z \neq 0$

$$\begin{cases} (1) xy = 4z + z^2 \\ (2) yz = 4x + x^2 \\ (3) zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$(2) - (3): x^2 + 4x - (y^2 + 4y) = yz - zx \Rightarrow (x-y)(x+y) + 4(x-y) + z(x-y) = 0$$

$$(x-y)(x+y+z+4) = 0$$

аналогично можно получить $(x-z)(x+y+z+4) = 0$ $y = z$
 $(y-z)(x+y+z+4) = 0$

1) если хотя бы 2 числа не равны, то $x+y+z+4=0 \Rightarrow$
 (из x, y, z)

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{cases} x+4 = -y-z \\ y+4 = -x-z \\ z+4 = -x-y \end{cases} \Rightarrow (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = \\ & = 2(y^2 + x^2 + z^2 + xy + yz + xz) \end{aligned}$$

$$2. \text{ заменим только } x+4 = -y-z \Rightarrow \cancel{(x+4)^2} \Rightarrow (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 =$$

$$= y^2 + z^2 + 2yz + y^2 + z^2 + 2y + 2z + 32 =$$

$$= 2(y^2 + z^2 + 4y + 4z) + 2yz + 32 = 2xy + 2zx + 2yz + 32 \Rightarrow$$

$$(1) + (3) \rightarrow \parallel$$

$$xy + zx$$

$$2xy + 2zx + 2yz + 32 = 2(y^2 + x^2 + z^2) + 2(xy + yz + xz) \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \text{ но } (x+y+z)^2 = 16 \quad (\text{т.к. } x+y+z+4=0 \Rightarrow)$$

$$2xy + 2yz + 2xz = 0 \Rightarrow \boxed{(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 2xy + 2zx + 2yz +$$

$$+ 32 = 32}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

2) Пусть $x=y=z$, тогда неотвратительно выполняется $x+y+z+4=0$

↓ теперь все числа $=x$

$$(1): x^2 = 4x + x^2 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ и т.к. числа не нулевые}$$

(противоречие)

$\Rightarrow$ подходит только 32, при этом нам не нужно для этого искать

числа x, y, z (для утверждения, что там нет 0), т.к. по условию

известно, что система имеет хотя бы 1 решение в ненулевых числах

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$n = \underbrace{9 \dots 9}_{25.000} = 10^{25.000} - 1 \Rightarrow n^3 = (10^{25.000} - 1)^3 = (10^{25.000})^3 - 3(10^{25.000})^2 + 3 \cdot 10^{25.000} - 1 = 10^{75.000} - 3 \cdot 10^{50.000} + 3 \cdot 10^{25.000} - 1 =$$

$$= \begin{array}{r} 1000 \dots 000 \\ - 300 \dots 000 \\ + 300 \dots 00 \\ - 1 \\ \hline \end{array}$$

~~это не ответ~~

~~это не ответ~~

~~это не ответ~~

~~это не ответ~~

$$= \begin{array}{r} 999 \dots 999 \dots 999 \\ - 3000 \dots 000 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{r} 999 \dots 999 \dots 999 \\ - 3000 \dots 000 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{всего девятки: } 75.000 - 50.000 - 1 + 25.000 = 50.000 - 1 = 49.000$$

Ответ: 49.000



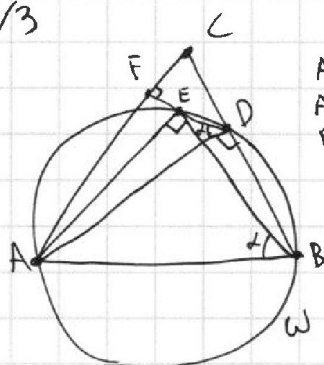
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3



$$\begin{aligned} AC &= 20 \\ AB &= 15 \\ BE &= 10 \end{aligned}$$

1. заметим, что $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$, т.к. они опираются на диаметр AB $\Rightarrow$

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = 5\sqrt{5}$$

2. $\angle EBA = \alpha \Rightarrow \angle EDA = \alpha$, т.к. $\angle EDA$ и $\angle EDB$ опираются на $\overset{\frown}{EA} \Rightarrow \angle FDC = 180^\circ - \angle EDA - \angle ADB = 90^\circ - \alpha$

$$3. \triangle EBA: \sin \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$4. \triangle FDA: \tan \alpha = \frac{AF}{FD}$$

$$\triangle FDC: \tan \angle FDC = \frac{FC}{FD}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{AF}{FD} \\ \tan(90^\circ - \alpha) &= \frac{FC}{FD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\tan \alpha}{\tan(90^\circ - \alpha)} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \tan^2 \alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{AF}{AC - AF} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4AF = 5AC - 5AF \Rightarrow AF = \frac{5}{9} AC = \frac{100}{9}$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{100}{9}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть всего n коробок, тогда количество всех возможных расстановок шаров: C_3^n

количество ~~вариантов~~ ^{вариантов}, что шаров в 5 (8) ^{определённых выбранных} коробках будет

3 : ~~вариантов~~ $C_3^{5(8)} =$

$$P_{365} = \frac{C_3^5}{C_3^n} \quad P_{368} = \frac{C_3^8}{C_3^n} =$$

$$\frac{P_{368}}{P_{365}} = \frac{C_3^8}{C_3^5} = \frac{\frac{8!}{5!3!}}{\frac{5!}{2!3!}} = \frac{8! \cdot 2!}{5! \cdot 5!} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 8^2}{5 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{28}{5} = \frac{56}{10} = 5,6$$

Ответ: в 5,6 раз

Замечание: может и перепутан C_n^k и C_k^n , но C_k^n у меня = $\frac{n!}{(n-k)!k!}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черпунком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Пусть есть арифм. прогрессия: $x_1, x_2, x_3, \dots$

d - разность прогрессии

заметим, что

$$\begin{cases} x_4 = x_1 + 3d \\ x_5 = x_1 + 4d \\ x_2 = x_1 + d \\ x_7 = x_1 + 6d \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_4 + x_5 = x_2 + x_7} (= 2x_1 + 7d)$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \Rightarrow \text{по Вьетта: } x_4 + x_5 = a^2 - a$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0 \Rightarrow \text{по Вьетта: } x_2 + x_7 = \frac{a^3 - a^2}{2} \quad \text{)} =)$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2} \Rightarrow (a^2 - a) \left(\frac{a}{2} - 1 \right) = 0 \Rightarrow a(a-1) \left(\frac{a}{2} - 1 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$a = 0 \text{ или } a = 1 \text{ или } a = 2$$

проверим эти ответы: 1) $a = 0$ ~~не подходит~~ - не подходит, т.к. первое уравнение

будет иметь вид: $x^2 + \frac{2}{3} = 0$ - нет действительных корней

2) $a = 1$ - не подходит, т.к. первое уравнение будет иметь вид:

$$x^2 + \frac{1}{3} = 0 \text{ - нет действительных корней}$$

3) $a = 2$ - подходит: ~~первое уравнение: $x^2 - 2x + \frac{2-8}{3} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$~~

~~$$2x^2 - (8-4)x - 2 \cdot 2^6 - 8 \cdot 2 - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 148 = 0$$~~

~~первое ур-ние:~~ $x^2 - 2x + \frac{2-8}{3} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$

$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12 = (2\sqrt{3})^2 \quad x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_4 = 1 - \sqrt{3}, x_5 = 1 + \sqrt{3} \quad (d > 0)$$

второе ур-ние: $2x^2 - (8-4)x - 2 \cdot 2^6 - 8 \cdot 2 - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 148 = 0 \Rightarrow$

$$x^2 - 2x - 74 = 0 \quad D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-74) = 4 + 296 = 300 = (10\sqrt{3})^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$X = \frac{2 \pm 10\sqrt{3}}{2} = 1 \pm 5\sqrt{3} \Rightarrow x_2 = 1 - 5\sqrt{3}, x_7 = 1 + 5\sqrt{3}$$

проверим существует ли такая прогрессия

да: $d = 2\sqrt{3}$ $x_1 = 1 - 7\sqrt{3}$ $\Rightarrow x_2 = x_1 + d = 1 - 5\sqrt{3}$ ✓

$$x_7 = x_1 + 6d = 1 + 5\sqrt{3}$$
 ✓

$$x_4 = x_1 + 3d = 1 - \sqrt{3}$$
 ✓

$$x_5 = x_1 + 4d = 1 + \sqrt{3}$$
 ✓

других a нет, т.к. все подходящие a должны удовлетворять $x_4 + x_5 = x_2 + x_7$, а таких всего 3 из которых подходит только одно

Ответ: $a = 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

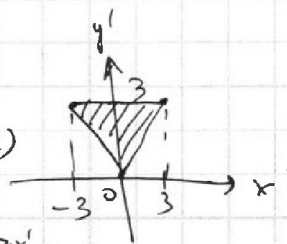
$$|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leq 6 \quad \text{построим график этой функции}$$

в координатах $(x'; y')$, где $y' = y - 15$, $x' = \frac{x}{6\sqrt{3}}$

$$|y' + x'| + |y' - x'| \leq 6$$

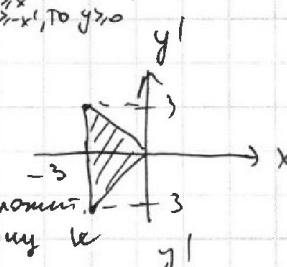
$$1) \begin{cases} y' \geq x' \\ y' \geq -x' \end{cases} \Rightarrow y' + x' + y' - x' \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} y' \leq 3 \\ y' \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = 3: x' \in [-3; 3] \\ y' = 2: x' \in [-2; 2] \\ y' = 0: x' \in [0; 0] \end{cases}$$

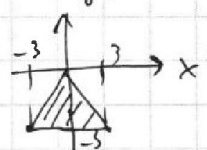
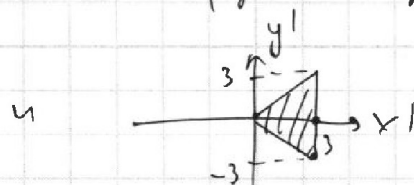


$$2) \begin{cases} y' \geq x' \\ y' \leq -x' \end{cases} \Rightarrow y' + x' - y' - x' \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} x' \leq -3 \\ x' \leq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -3: y' \in [-3; 3] \\ x' = -2: y' \in [-2; 2] \\ x' = 0: y' \in [0; 0] \end{cases}$$

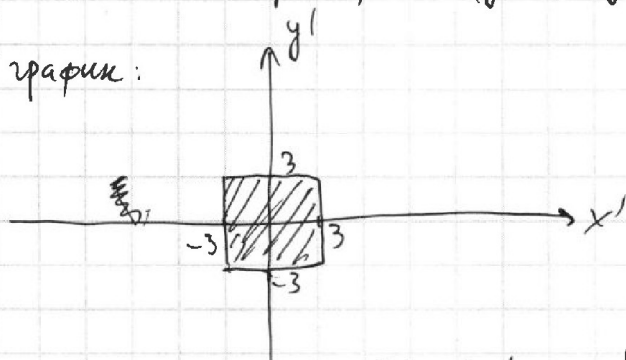


аналогично проделывая ещё 2 варианта получим:



объединив все получим, что $|y' + x'| + |y' - x'| \leq 6$ создаёт

такой график:



теперь сделаем график в $(x; y)$: т.к. $y' = y - 15$, то $y = y' + 15 \Rightarrow$

нужно поднять график наверх на 15:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

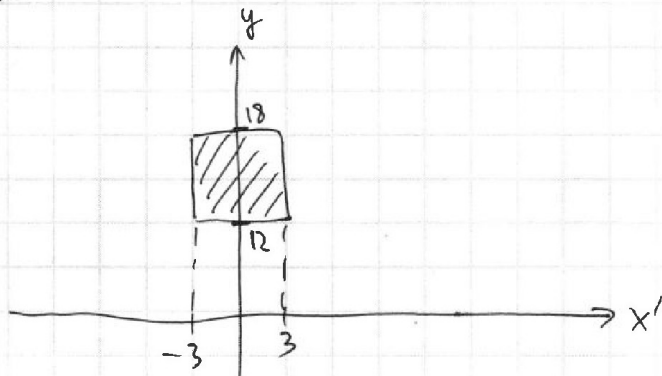
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

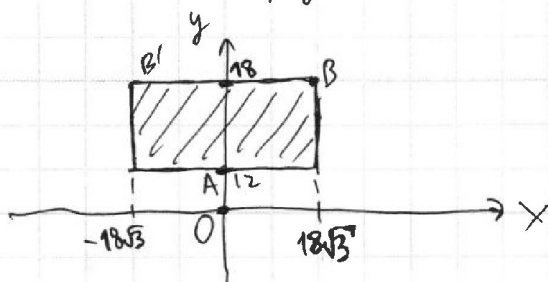
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6



2. т.к. $x' = \frac{x}{6\sqrt{3}}$, то $x = 6\sqrt{3} x' \Rightarrow$ нужно ~~увеличить~~ значение x в $6\sqrt{3}$ раз:



теперь найдём как выглядит M : при повороте отн. точки O все точки двигаются по окружности, ~~нужно~~ $\Rightarrow$ нужно найти точку

с минимальным расстоянием до O — это будет $\min R$ и с максималь-

ным расстоянием — $\max R$, очевидно, что $R_{\min} = |OA| = 12$

$$R_{\max} = |OB| = \sqrt{(18\sqrt{3})^2 + 18^2} = \sqrt{18^2 \cdot 3 + 18^2} = 18 \cdot 2 = 36$$

(или $|OB'|$)

теперь изобразим M на графике:

(на след. странице)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

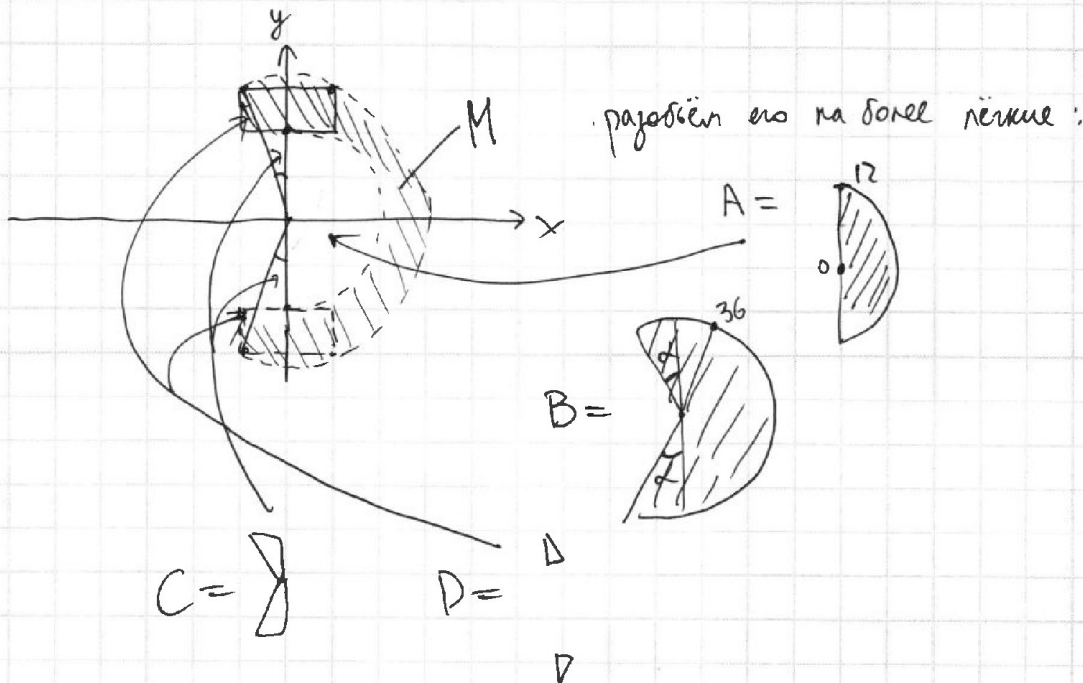
6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

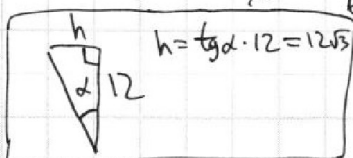
N6



$$M = B - A - C + D$$

$$A = \frac{1}{2} \pi \cdot 12^2; B = \frac{1}{2} \pi \cdot 36^2 + \frac{2\alpha}{2\pi} \cdot \pi \cdot 36^2$$

$$C = 2S_{\Delta} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h = 12^2 \sqrt{3}$$



$$D = 2S_{\Delta} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h = 6^2 \sqrt{3}$$

$$18 - 12 = 6 \frac{h}{h'} \quad h' = \frac{h}{\tan \alpha} = 6\sqrt{3}$$

Найти α : $\tan \alpha = \frac{18\sqrt{3}}{18} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \left(= \frac{\pi}{3} \right)$

$$\Rightarrow B = 36^2 \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{5}{6} \pi \cdot 36^2$$

$$\Rightarrow M = \frac{5}{6} \pi \cdot 36^2 - \frac{1}{2} \pi \cdot 12^2 - 12^2 \sqrt{3} + 6^2 \sqrt{3} =$$

$$= \pi (1080 - 72) - \sqrt{3} (144 - 36) =$$

$$= \pi \cdot 1008 - \sqrt{3} \cdot 108$$

$$\text{Ответ: } M = \pi \cdot 1008 - \sqrt{3} \cdot 108$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

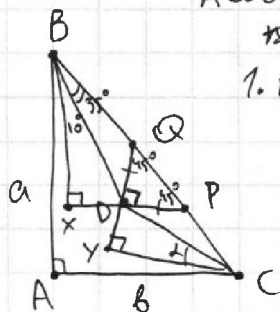
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7



$$AB = BP = a$$

$$AC = CQ = b$$

~~1. проведем перпендикуляр из B на AC, X = перпендикуляр на DP =>~~

1. проведем перпендикуляр из B на AC, X = перпендикуляр на DP =>

$BX \perp XP$, т.к. $DQ \perp DP$, аналогично появится точка Y

2. $\triangle DQR$ - равнобедренный и прямоугольный =>
 $\angle DQR = 45^\circ$ $\angle XBP = \angle DQR$ (т.к. $BX \parallel DQ$) =>

$$\angle DBX = 45^\circ - \angle PBC = 10^\circ$$

3. заметим, что $\triangle BXP$ тоже равнобедренный и прямоугольный =>

$$XP = BP \cdot \cos 45^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$DP = QR \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (a + b - \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$Y \Rightarrow XD = XP - DP =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{a^2 + b^2} - b)$$

вычисление QR:

$$BP + QC - PQ = BC \Rightarrow$$

$$a + b - PQ = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow$$

$$PQ = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$PQ = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BX = BP \cdot \cos 45^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$b > BXD \quad \tan 10^\circ = \frac{XD}{BX} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{a^2 + b^2} - b)}{\frac{\sqrt{2}}{2} a}$$

(и $\triangle DQR$)

делаем аналогично с $\triangle CYD$ найдем, что

$$\alpha = \angle DCY$$

$$\tan \alpha = \frac{DY}{YC} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{a^2 + b^2} - a)}{\frac{\sqrt{2}}{2} b} \Rightarrow$$

$$4. (1) \tan 10^\circ = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} - \frac{b}{a}$$

$$(2) \tan \alpha = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} - \frac{a}{b}$$

решим (1): пусть $\frac{b}{a} = z \Rightarrow$

$$\tan 10^\circ = \sqrt{1 + z^2} - z \Rightarrow$$

$$(z + \tan 10^\circ)^2 = \sqrt{1 + z^2}^2 \Rightarrow$$

$$z^2 + \tan^2 10^\circ + 2z \tan 10^\circ = 1 + z^2 \Rightarrow z = \frac{1 - \tan^2 10^\circ}{2 \tan 10^\circ} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{z} = \frac{2 \tan 10^\circ}{1 - \tan^2 10^\circ}$$

подставим в (2): (на след. странице)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \sqrt{1 + \left(\frac{2 \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ} \right)^2} - \frac{2 \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ} = \frac{\sqrt{1 - 2 \operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 10^\circ + 4 \operatorname{tg}^2 10^\circ}}{1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ} - \frac{2 \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ} = \\ &= \frac{\sqrt{(\operatorname{tg}^2 10^\circ + 1)^2}}{1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ} - \frac{2 \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ} = \frac{\operatorname{tg}^2 10^\circ + 1 - 2 \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ} = \frac{(\operatorname{tg} 10^\circ - 1)^2}{(1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ)(1 + \operatorname{tg} 10^\circ)} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \operatorname{tg} 10^\circ} \end{aligned}$$

$$\angle DCB = 45^\circ - \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \angle DCB = \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} =$$

($\triangle QYC$ - равнобедр. и прямоуг.)

$$= \frac{1 - \frac{1 - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \operatorname{tg} 10^\circ}}{1 + \frac{1 - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \operatorname{tg} 10^\circ}} = \frac{(1 + \operatorname{tg} 10^\circ) - (1 - \operatorname{tg} 10^\circ)}{(1 + \operatorname{tg} 10^\circ) + (1 - \operatorname{tg} 10^\circ)} = \frac{2 \operatorname{tg} 10^\circ}{2} = \operatorname{tg} 10^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DCB = 10^\circ + 180^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}, \text{ по т.к. } \angle DCB \text{ - угол в треугольнике}$$

$$\angle DCB = 10^\circ$$

Ответ: $\angle DCB = 10^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x, y, z \neq 0$

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$x^2 + 8x + 16 = 0$
 $x = -4$

$2yz - x^2 + 16 = 0$
 $2yz - (-4)^2 + 16 = 0$
 $2yz = 0$
 $yz = 0$

$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$

x_4, x_5, x_7

$-x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + 2xz + 2xy + 16 = 0$

$x_4 = x_9 + 3d$
 $x_5 = x_1 + d$

$n = \frac{10^{25000} - 1}{10 - 1} = 10^{25000} - 3 \cdot 10^{20000} + 3 \cdot 10^{15000} - 1$

$(a-1)(a-1)(a-1) = (a^3 - 3a^2 + 3a - 1)$

$x_4 + x_5 = x_2 + x_7 = 2x_1 + 2d$

$2h = h$
 $x = 2 - h$

$AC = 20$
 $AB = 15$
 $BE = 10$

$AE = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{25} = 5$

$\cos \alpha = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$
 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\angle DFC = 90^\circ - \alpha$
 $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7

$\frac{H}{\sin \gamma} = \frac{b + a \cos \alpha}{\sin \gamma}$

$\frac{H}{\sin 35^\circ} = \frac{a - b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

$BC = \sqrt{a^2 + b^2} = a + b - PQ$

$PQ = a + b - \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow DQ = \frac{\sqrt{2}}{2} PQ = \frac{\sqrt{2}}{2} (a + b - \sqrt{a^2 + b^2})$

$BQ = a - PQ = \sqrt{a^2 + b^2} - b$

$BD = \sqrt{BQ^2 + DQ^2} = \sqrt{(a - \sqrt{a^2 + b^2} + b)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2} (a + b - \sqrt{a^2 + b^2}))^2}$

$BD^2 = (\sqrt{a^2 + b^2} - b)^2 + \frac{1}{2} (a + b - \sqrt{a^2 + b^2})^2 - 2 \cos 135^\circ (\sqrt{a^2 + b^2} - b) (\frac{\sqrt{2}}{2} (a + b - \sqrt{a^2 + b^2}))$

$PC = b - PQ = \sqrt{a^2 + b^2} - a$

$DC^2 = (\sqrt{a^2 + b^2} - a)^2 + \frac{1}{2} (a + b - \sqrt{a^2 + b^2})^2 - 2 \cos 15^\circ (\sqrt{a^2 + b^2} - a) (\frac{\sqrt{2}}{2} (a + b - \sqrt{a^2 + b^2}))$

$BC^2 + DC^2 - 2 \cos \gamma BC \cdot DC = BD^2$

$a^2 + b^2 - 2 \cos \gamma BC \cdot DC = BD^2 - BC^2 = (\sqrt{a^2 + b^2} - b)^2 - (\sqrt{a^2 + b^2} - a)^2 + 2 \cos 135^\circ (a + b - \sqrt{a^2 + b^2}) (\frac{\sqrt{2}}{2} (a + b - \sqrt{a^2 + b^2})) =$

$-\frac{b^2}{2}$

$\frac{BD}{\sin \gamma} = DC \cdot \frac{BC}{DQ} \cdot \frac{1}{\sin 135^\circ}$

$\frac{DC}{DQ} =$

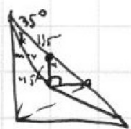
$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) =$
 $= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha =$
 $= \sin \alpha (2 \cos^2 \alpha + \cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha) =$
 $= \sin \alpha (1 + 2 - 4 \sin^2 \alpha) =$

$\frac{DQ}{\gamma} = \frac{b}{45^\circ \gamma}$

$\frac{\gamma}{45^\circ \gamma} = \frac{DQ}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{a}{b} + 1 - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

нужно найти $\frac{a}{b}$!

$\frac{1}{2} = 3x - 4x^3$



$\frac{a}{100^\circ} = \frac{DP}{35^\circ}$

$\frac{DP}{a} = \frac{35^\circ}{100^\circ}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \frac{b}{a} - \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2}) = \frac{\sin 35^\circ}{\sin 100^\circ}$

$4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$
 $8x^3 - 6x + 1 = 0$

если мы найдем $\frac{\sin 30^\circ}{\sin 100^\circ}$ то найдем $\frac{a}{b}$

$\frac{\sin(45^\circ - 10^\circ)}{\sin(90^\circ + 10^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 10^\circ - \sin 10^\circ)}{\cos 10^\circ} = \frac{\sin(60^\circ + 10^\circ)}{2 \cos 85^\circ \sin(90^\circ + 10^\circ)} = \frac{\sin \frac{70^\circ}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \frac{1}{3})$

$\frac{3 \cdot \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{2} - 3 \sqrt{2} \sin 10^\circ}{8 (\sqrt{2} - 1) (\sqrt{2} + \sqrt{2}) + 1}$



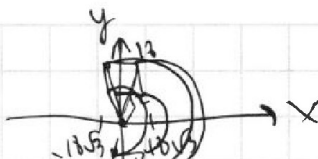
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{1 + \frac{4 \operatorname{tg}^2 10}{(1 - \operatorname{tg}^2 10)^2}} - \frac{2 \operatorname{tg} 10}{1 - \operatorname{tg}^2 10}$$



$$\frac{\sqrt{1 - 2 \operatorname{tg}^2 10 + \operatorname{tg}^2 10 + 4 \operatorname{tg}^2 10}}{(1 - \operatorname{tg}^2 10)}$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 10 + 1}{1 - \operatorname{tg}^2 10} - \frac{2 \operatorname{tg} 10}{1 - \operatorname{tg}^2 10} = \frac{\operatorname{tg}^2 10 - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 10}$$

$$(y - 15 + x')^2 \leq 36 - 12|y - 15 - x'| + (y - 15 - x')^2$$

$$y \leq 36$$

$$2x \leq 36 - 12|y - 15 - x'| + (y - 15 - x')^2$$

$$|y - 15 + x'| + |y - 15 - x'| \leq 6$$

$$|y - 15 + x'| \leq 6 - |y - 15 - x'|$$

кон-во

~~возможных~~ расположение шаров:

$$\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{3!}$$

$$C_3^n$$

$$P_{365} = 1 - P_{0.8 \text{ в } n-5}$$

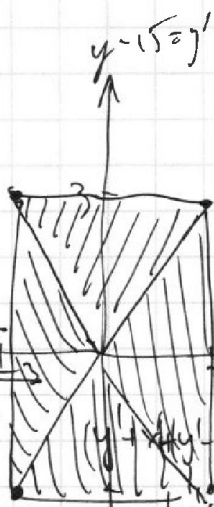
$$\frac{146}{36} = \frac{108}{108}$$

$$C_3^5$$

$$P_{365} = \frac{C_3^5}{C_3^n} = \frac{\frac{5!}{2! \cdot 3!}}{\frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!}}$$

$$P_{368} = \frac{C_3^8}{C_3^n} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8!}{(n-3)! \cdot 3!}$$

$$\frac{P_{368}}{P_{345}} = \frac{8!}{5!} = \frac{8! \cdot 2!}{5! \cdot 5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{28}{5} = \frac{56}{10} = 5.6$$



$$-y + x' + y' + x' \leq 1$$

$$y \leq x'$$

$$y' \leq x'$$

$$y' \leq x'$$

$$y' \leq x'$$

$$|y' + x'| + |y' - x'| \leq 6$$

$$|y' + x'| + |y' - x'| \leq 6$$

$$y' = 3 \Rightarrow x' \in [3; -3]$$

$$y' - x' - y' - x' = 6$$

$$x' = -3 \Rightarrow y' \in [-3; 3]$$



