



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E – точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телегре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой не постоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

[N1]

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases} \stackrel{\text{множ. } x, y, z \neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} y = \frac{-2z + z^2}{x} \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} (-2z + z^2)z &= -2x^2 + x^3 \\ -x^3 - 2z^3 - 2(x^2 - z^2) &\approx 0 \\ \Rightarrow (x-z)(x^2 + zx + z^2) - 2(x-2)(x+2) &\approx 0 \end{aligned}$$

$$\approx (x-z)(x^2 + zx + z^2 - 2x - 2z) \approx 0$$

Также $x=z \Rightarrow y = -2 + x \approx x-2 \approx 1 \quad x^2 = -2(x-2) + (x-2)^2 \approx 1$

$$\Rightarrow x^2 = -2x + 4 + x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 6x = 8 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow z = \frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \quad \text{---}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 2y^2 + (y-2)^2 = 2 \cdot \frac{4}{9} + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} + \frac{64}{9} = \underline{\underline{8}}$$

То есть л.в. уравнение симметрично относ. $x, y, z \Rightarrow$ если какое-то 2 числа равны \rightarrow решение единственное! и равно 8.

Также $x=y=z \approx 1 \quad x^2 = -2x + x^2 \approx -2x = 0 \approx x=0 = y=z \rightarrow$ л.в. 2 числа неподобные

Значит, если все числа равны $\rightarrow X = 1$ л.в. где равенство

каких-либо двух решений нет \Rightarrow

\Rightarrow также $x \neq y \neq z \rightarrow$

\Rightarrow Приведем к виду 1-й части уравнения $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x + z^2 - 2x - 2z \approx 0 \\ xz = -2y + y^2 = -2\left(\frac{-2z + z^2}{x}\right) + \left(\frac{-2z + z^2}{x}\right)^2 \end{array} \right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-2z + z^2}{x} \\ x^2 + z^2 - 2x - 2z + z^2 \approx 0 \\ xz = -2(z^2 - 2z)x + (z^2 - 2z)^2 \Rightarrow x^3 = -2(z-2)x + z^3 - 4z^2 + 4z \approx 1 \\ x^3 = -2z + 4x + z^3 - 4z^2 + 4z \approx 1 \end{cases}$$

Также рассмотрим $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \approx 1$

$$\approx (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + \left(\frac{-2z + z^2 - 1}{x}\right)^2 + (z-2)^2 =$$

$$= (x-2)^2 + \left(\frac{-1z + z^2 - 2x}{x}\right)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (z-2)^2 + \left(\frac{-x^2 - zx}{x}\right)^2 =$$

Заменим, что $x^2 + zx + z^2 - 2x - 2z = 0 \approx z^2 - 2x - 2z = -x^2 - 2x$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} &= (x-1)^2 + (z-2)^2 + (x+z)^2 = x^2 - 4x + 4 + z^2 - 4z + 4 + x^2 + 2xz + z^2 = \\ &= \cancel{2x^2 + 2z^2} - 4x - 4z + \cancel{2xz} + 8 = 8. \\ &\cancel{2(x^2 + z^2 - 2x - 2z + xz)} = 0 \end{aligned}$$

Значит при \forall значениях x, y, z (ненулевых), которые удовлетворяют системе уравнений \rightarrow

$$\rightarrow (x-1)^2 + (z-2)^2 + (y-2)^2 = 8,$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N)

~~Будем доказывать по индукции, что $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n(n+1)}{2}^2$~~

Будем доказывать по индукции, что ~~данное~~ $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n(n+1)}{2}^2$, состоящее из n кубов ($n \in \mathbb{N}$) ~~найдено~~.

база $n=1$. $1^3 = 1 \rightarrow \text{OK}$.

$$n=2: 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 \rightarrow 2^2 = 4 \rightarrow \text{OK}$$

$$\begin{array}{r} \times 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \times 729 \\ 729 \\ \hline 5247 \\ + 2187 \\ \hline 729 \end{array} \rightarrow 2 \cdot 2 - 1 = 3 \rightarrow \text{OK}.$$

ИП. Пусть дана любая числа с k 9 -ами \rightarrow находится $2k+1$ кубик $\underline{\underline{k^3}} = 1$.

\Rightarrow докажем, что дане число с $k+1$ девяткой $\rightarrow 2(k+1)-1 = 2k+1$ кубик

$$a_{k+1} = (9 \cdot 10^k + a_k) =$$

$$\rightarrow a_{k+1}^3 = 729 \cdot 10^{3k} + 243 \cdot 10^{2k} m + 27 \cdot 10^k m^2 + m^3 =$$

\rightarrow Ответ

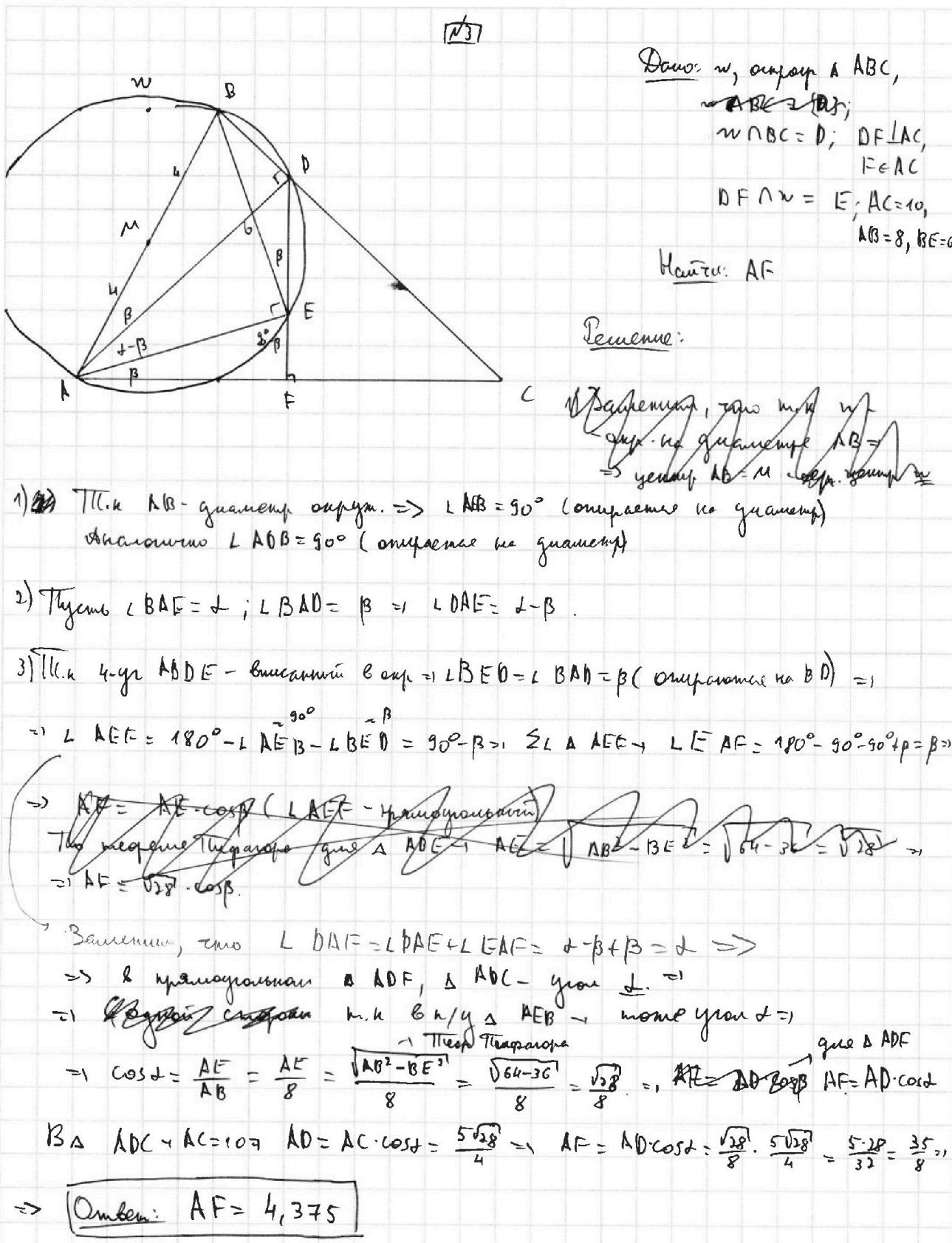


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1/5

Заметим, что арифметическая прогрессия неувязка $= d$ (разность прогр.) $\neq 0$

$\Rightarrow a_6, a_7, a_8, a_9 \rightarrow$ различного знака \Rightarrow

$\Rightarrow D > 0 \rightarrow$ в обоих уравнениях (чтобы было по 2 разн. корня)

1-яя ура. $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$

$$D = (a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7) = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 + 4a + 28 =$$

$$= a^4 - 4a^3 + 4a + 28 > 0$$

Рассмотрим эту функцию $f(x) = a^4 - 4a^3 + 4a + 28$
 → Каждое её мн. значение $= 1$ $f'(x) = 4a^3 - 12a^2 + 4 = 1$

\Rightarrow ~~4a^3 - 12a^2 + 4 = 1~~

2-яя: $3x^2 - (a^2 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$

$$D = (a^2 - 2a^2)^2 - 12(6 - a^5) = a^6 - 4a^5 + 4a^4 - 72 + 12a^5 =$$

$$= a^6 + 8a^5 + 4a^4 - 72 > 0.$$

Заметим, что $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$; $a_8 = a_1 + 7d$, $a_9 = a_1 + 8d$

\Rightarrow Т.к. разн. $2a_1 + 11d = \frac{a^2 - 2a}{2} = \frac{a^3 - 2a^2}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3a(a-2) = a^2(a-2) = 1 (a-2)(a^2 - 3a) = 0$$

$$\Rightarrow 1 a(a-2)(a-3) = 0$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$a=0$ $a=2$ $a=3$ = 1

\Rightarrow Т.к. $a=0$ $\Rightarrow D_1 = 28 > 0 \rightarrow V.$

$$D_2 = -72 < 0 \rightarrow X = \underline{a \neq 0}$$

$$\underline{a=2} \Rightarrow D_1 = 16 - 32 + 8 + 28 = 20 > 0 \rightarrow V \rightarrow \underline{a=2}.$$

$$D_2 = 64 + 8 \cdot 32 + 4 \cdot 16 - 72 > 0 \rightarrow V.$$

$$a=3 \rightarrow D_1 = 81 - 4 \cdot 27 + 12 + 28 > 0 \rightarrow V \rightarrow \underline{a=3}$$

$$D_2 = 729 + \dots + 72 > 0 \rightarrow V$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь проверим $a=2$, $a=3 \rightarrow$ в уравнениях $=$

$$\begin{aligned} \text{если } a=2: \quad x^2 - (4-4)x + 4-4-7 &= x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{5} \Rightarrow \\ x^2 - 5 &= 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{5} \Rightarrow d = a_7 - a_6 = \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$3x^2 - (8-8)x + 6 - 32 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 26 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \rightarrow$$

→ проверим, что $5d = \pm \frac{2\sqrt{26}}{\sqrt{3}} = \pm 10\sqrt{5}$

$$\rightarrow \frac{4 \cdot 26}{3} \neq 100 \cdot 5 \Rightarrow a \neq 2$$

$$\begin{aligned} \text{если } a=3: \quad x^2 - (3x) + 9 - 3 - 7 &= x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \\ D = 9 + 4 = 13 \Rightarrow x &= \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \\ \Rightarrow d &= \frac{(3 \pm \sqrt{13})}{2} \pm \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$3x^2 - (27 - 2 \cdot 9)x + 6 - 9 \cdot 27 =$$

$$\begin{aligned} = 3x^2 - 9x + 6 - 243 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 9x + 6 - 243 = 0 \quad | :3 \\ x^2 - 3x + 2 - 81 = 0 \\ x^2 - 3x - 79 = 0 \\ D = 9 + 4 \cdot 79 = 325 = 25 \cdot 13 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5d = \pm 5\sqrt{13} \Rightarrow d = \pm \sqrt{13} \rightarrow \underline{\text{так}}$$

⇒ Можно подобрать арифметическую прогрессию, чтобы условия задачи выполнялись →

⇒ Ответ: $a=3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>					
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------------------

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Dano: w/y $\triangle ABC$; $P, Q \in BC$,
 $AB = BP$, $AC = CQ$,
 $\angle P = \angle DQ$, $\angle PDQ = 90^\circ$,
 $\angle BCA = 50^\circ$

Hautus LDBC

1) Tyems $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$.

2) $\text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{S} \rightarrow \text{Na}_2\text{SO}_4 + 2\text{H}_2$

$$\Rightarrow \text{m.k } CQ = AC = b \Rightarrow PC = b - x.$$

$$\text{Stenowicz } BQ = C - x \approx 1$$

$$\Rightarrow BC = a = BQ + PQ + PC = b + c - x = 1$$

$$\Rightarrow -x = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow x = b+c-a$$

$$\Rightarrow BQ = CX = AB$$

$$CP = b - x = a - c$$

$$3) \overline{Tyobegin} \perp DM \text{ na } BC = 1$$

\Rightarrow mark ~~the~~ DQ = DP \Rightarrow

\Rightarrow DM - becomes negative

Exer. 6 Δ PQR

$$\Rightarrow QM = MP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{In } k \Delta PQD \text{-hypotenuse} \Rightarrow DM = QM - MP = \frac{x}{2} = \frac{b+c-a}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow b \text{ h/g s BDM} \rightarrow$

$$\rightarrow DM = \frac{b+c-a}{2} \quad , \quad BM = a-b + \frac{b+c-a}{2} = \frac{a-b+c}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{PM}{BM} = \frac{b+c-a}{a-b+c} = \frac{c+b-a}{c-b+a}$$

Задачи на
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ABC-треуг.

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 + \operatorname{tg}(50^\circ) - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ)}}{1 - \operatorname{tg}(50^\circ) + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ)}} = \frac{c}{b} = \operatorname{tg}(50^\circ) \approx C = b \cdot \operatorname{tg}(50^\circ)$$

$$= \left(1 + \tan(50^\circ) - \sqrt{1 + \tan^2(50^\circ)} \right)^2$$

$$+ \operatorname{tg}(50^\circ) - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ)} \Big)^2$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{tg}(50^\circ) - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ)})^2}{1 - (\operatorname{tg}(50^\circ) - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ)})^2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(50^\circ) - 1 - \operatorname{tg}^2(50^\circ) + 2\operatorname{tg}(50^\circ)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ)}}{1 - \operatorname{tg}^2(50^\circ)^2} =$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{tg}(50^\circ) - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ)})^2}{2\operatorname{tg}(50^\circ)(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ)} - 1)} = \frac{(1 + \operatorname{tg}(50^\circ) - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ)})^2}{2\operatorname{tg}^3(50^\circ)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{(1 + \operatorname{tg}(50^\circ))^2 + 1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ) - 2(1 + \operatorname{tg}(50^\circ))\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ)}}{2\operatorname{tg}^3(50^\circ)} \times (1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ)})$$

Ответ: $\angle = \arctg \left(\frac{1 + \operatorname{tg}(50^\circ) - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ)}}{1 - \operatorname{tg}(50^\circ) + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(50^\circ)}} \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мерников:

k (ksi)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ y^2 = -2x + x^2 \end{cases}$$

$$2x = -2y + y^2$$

$$(z-1)^2 = xy + 1$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 =$$

$$= x^2 - 4x + y^2 - 4y + z^2 - 4z + 12 =$$

$$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} + \underbrace{-4x - 4y - 4z}_{xy + ...} =$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = xy +$$

$$2x + 2y + 2z + xy + y^2 + 2x - 4x - ... + 12 =$$

$$= xy + y^2 + 2x - 2x - 2y - 2z = 2xy + 2y^2 + 2z^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

$$\underbrace{(59999...5)^3}_{\frac{3000}{1}} =$$

$$\text{или } (5 \cdot 10^{30000} + 9 \cdot 10^{29999} + \dots + 9)^3 =$$

$$= 5 \cdot 10^{30000} (h^2) + 9 \cdot 10^{29999} (h^2) + \dots + 9 \cdot h^2$$

$$(x-1)^2 - 2x + 3 + (y-1)^2 - 2y + 3 + (z-1)^2 - 2z + 3 =$$

$$= xy + 2x + 2y + 12 - 2x - 2y - 2z = 2xy + 2y^2 + 2z^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

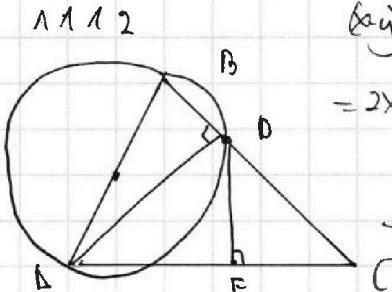
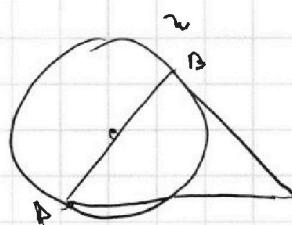
$$a = x + y + z$$

$$b = xy + x^2 + y^2$$

$$c = xyz$$

$$729 (10^{30000} + 10^{29999} + \dots + 1) =$$

$$= 729 \underbrace{(10^{30000})}_{1} + \dots + 10^{29999} + 10^{29998} + \underbrace{(10^{29997})}_{1} +$$



$$(xy)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2y^2 - 2z^2 + 4x + 4y + 4z =$$

$$a^2 = -2x + a^2$$

$$x^2 - 2x - 2x + y^2 - 2y^2 - my + 2^2 - 2z -$$

$$= x^2 + y^2 - z^2 \rightarrow xy - 2x + 2y - 2x - 2y - 2z + xy + y^2 + 2x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

$$xz = -2\left(\frac{z^2-1z}{x}\right) + \left(\frac{z^2-2z}{x}\right)^2$$

$$x = -2\left(\frac{z-1}{x}\right) + 2\left(\frac{(z-1)^2}{x^2}\right) \Rightarrow x^3 = 2x(z-1) + z(z-1)^2 \approx$$

$$= \cancel{\left(\frac{-1}{x}\right)} \left(\cancel{\left(\frac{z-1}{x}\right)} z - 2 \right) \approx x \cancel{(x^2 - 2(z-1))} = 2(z-1)^2$$

$$x^2 + z^2 - 2x - 2z + xz \approx 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + xy \approx 0$$

$$z^2 + x^2 - 2z - 2x + 2xy \approx 0$$

$$\begin{array}{r} \times 99 \\ \times 99 \\ \hline 9801 \end{array}$$

(1)

$$x^2 - 4x + 4 + \dots + x^3 + y^2 + z^2 + xy + zx + yz - 11 \approx 0, \quad \cancel{\begin{array}{r} \times 999 \\ \times 999 \\ \hline 99801 \end{array}}$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 2y - 2z$$

$$(x-2)^2 + \left(\frac{z^2-1z}{x}-1\right)^2 + (z-1)^2 =$$

$$\cancel{\begin{array}{r} \times 999 \\ \times 999 \\ \hline 99801 \end{array}}$$

$$\begin{array}{r} \times 999 \\ \times 999 \\ \hline 99801 \end{array}$$

$$= x^2 - 4x + 4 + \frac{(z^2 - 2z - 2x)^2}{x^2} + z^2 - 4z + 4 =$$

$$\cancel{\begin{array}{r} \times 88209 \\ \times 88209 \\ \hline 88209 \end{array}}$$

$$= \frac{(z^4 - 4z^3 + 4z^2 + 4x^2 - 4x(z^2 - 2z))}{x^2}$$

$$\cancel{\begin{array}{r} \times 88209 \\ \times 88209 \\ \hline 88209 \end{array}}$$

(2)

$$\left(\frac{x^2 - x^2}{x^2} \right)^2 = (x+2)^2 + x^2 +$$

(429)

Дана

$$\underline{\underline{60001}}$$

$$\underline{\underline{999}}$$

$$\begin{array}{r} \times 111 \\ \times 111 \\ \hline 111111 \end{array}$$

2u-1

$$\begin{array}{r} \times 1367631 \\ \times 729 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 112 \ 3 \ 0 \ 8 \ 6 \ 719 \\ + 27 \ 3 \ 5 \ 2 \ 6 \ 2 \\ \hline 354 \ 3 \ 4 \ 1 \ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9970023 \ 99 \\ \underline{\underline{99}} \end{array}$$

$$(k \cdot 10^3 + m)^3 =$$

$$= 729 \cdot 10^9 k^3 + m^3,$$

$$\begin{array}{r} 12321 \\ 12321 \\ 12321 \\ \hline 1367631 \end{array}$$

$$= + 3 \cdot 9^2 \cdot 10^2 k^2 m + 3 \cdot 9 \cdot 10^2 k m^2$$

$$\begin{array}{r} 12321 \\ 12321 \\ 12321 \\ \hline 1367631 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline a+b+c \\ \overline{c+a-b} \\ \overline{c+a-b} \\ \hline c+a-b \end{array}$$

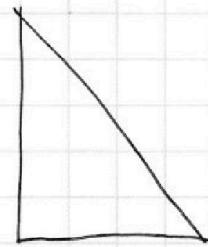


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



300001
2m

14 маш!
20 -

$$(5 \cdot 10^k + h)^3$$

$$= 725 \cdot \frac{10^{3k}}{2} + 243 \cdot 10^{2k} m + 27 \cdot 10^k m^2 + m^3$$

20

3

$$AP = \cos \beta \sqrt{15} = \cos \alpha \cdot AD.$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{28}}{5}$$

$$AD = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}$$

$$AD =$$

$$6,7 \quad \frac{a_1 + (k-1)d}{a_1 + k d}$$

6,9.

$$3x^2 - (a^2 - 1a^2) x + a^2 - a - 7 = 0$$

$$x^2 - (a^2 - 1a^2)^2 - 4(a^2 - a - 7) =$$

$$= a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 + 1a^2 + 18 =$$

$$= a^6 - 4a^5 + 4a^4 + 1a^4 - 4a^5 - 4a^4 =$$

$$= a^6 - 4a^5 + 4a^4 + 1a^4 - 4a^5 - 4a^4 =$$

$$a^6 + 8a^5 + 4a^4 - 4a^5 - 4a^4 =$$

$$= 8 \cdot 5$$

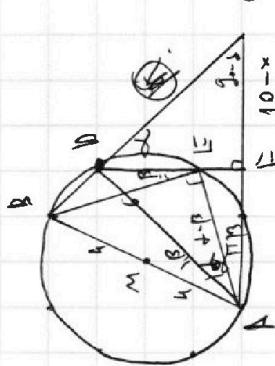
$$(a^2 - 2a + 1)^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 + 1 + 2(a^2 - 2a)$$

$$4a^3 - 12a^2 + 4a^2 + 8 = 0$$

$$a^3 - 4a^2 + 4 = 0$$

$$64 - 3 \cdot 8 + 8 =$$

$$= 161$$



$$x^2 - (a^2 - 1a^2)^2 - 4(a^2 - a - 7) =$$

$$= a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 + 1a^2 + 18 =$$

$$= a^6 - 4a^5 + 4a^4 + 1a^4 - 4a^5 - 4a^4 =$$

$$= 4 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7 + 4 \cdot 7$$

$$= 14^3 + 4 \cdot 14^3 + 4 \cdot 14 + 4 \cdot 7$$

$$14^4 \quad 1 \quad 28 \quad 4^4 - 4^4 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 8$$



$$AP = \cos \beta \sqrt{15} = \cos \alpha \cdot AD.$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{28}}{5}$$

$$AD = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}$$

$$AD =$$

$$x^2 - (a^2 - 1a^2)^2 - 4(a^2 - a - 7) =$$

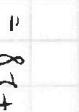
$$= a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 + 1a^2 + 18 =$$

$$= a^6 - 4a^5 + 4a^4 + 1a^4 - 4a^5 - 4a^4 =$$

$$= 4 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7 + 4 \cdot 7$$

$$= 14^3 + 4 \cdot 14^3 + 4 \cdot 14 + 4 \cdot 7$$

$$14^4 \quad 1 \quad 28 \quad 4^4 - 4^4 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 8$$





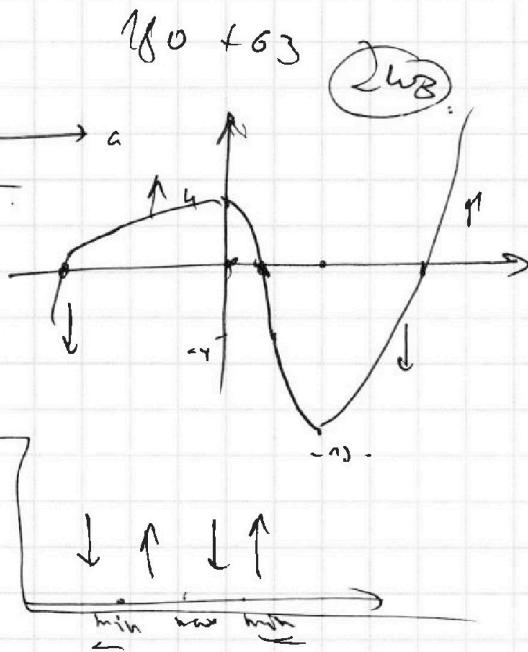
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

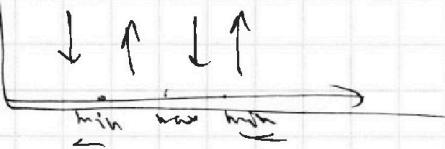
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Чернобыль

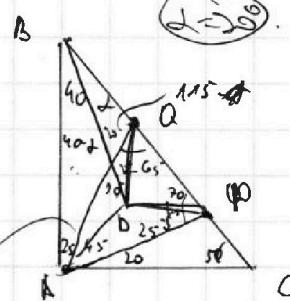
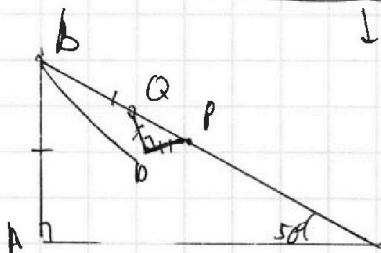
$$\frac{+ - +}{\cancel{+ 0 \cancel{-} 2} \cancel{+}}$$



A row of five handwritten capital letters 'L' followed by two small, separate 'U' shapes drawn on lined paper.



(ii). m m m m

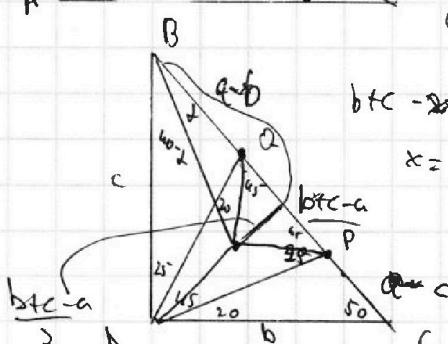


(2)

U 4-27

80

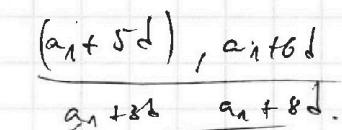
108



$$a-b+\frac{b+c-a}{2} = \frac{a^2-2a}{2}$$

$$= \frac{a-b+c}{2} \quad \boxed{\sqrt{20}}$$

65



$$(X) \quad \underline{a^2 - 2a} = 2ax + 146$$

$$\frac{1}{2} \times 25 = 12.5$$

$$a_1 + 5\sqrt{3} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N5)

Замечаем, что в к арифметической прогрессии $a_6 = a_7 \Rightarrow a_6 + a_7 = 2a_7$.
 $\Rightarrow d \neq 0$
 d - разность прогрессии $\Rightarrow a_6 + a_7 = a_4 + a_9$. У обоих квадратных уравнений должны быть но 2 различных корня $\Rightarrow D > 0$.

$$\Rightarrow x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

$$D = (a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7) = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 + 4a + 28 =$$

$$= a^4 - 4a^3 + 4a + 28 > 0 \rightarrow \text{Заметим, что при } a =$$

График 2-йой функции $f(x) = a^4 - 4a^3 + 4a + 28$ - это кубическая кривая, вершина её лежит в 1-ом квадранте.

Найдём минимум функции

$$f(x) = a^4 - 4a^3 + 4a + 28 \rightarrow f'(x) = 4a^3 - 12a^2 + 4 = 0 \rightarrow a^3 - 3a^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (a+1)(a^2 - 4a + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (a+1)(a-2)^2 = 0$$

$$\begin{array}{c} - + \nearrow \searrow \\ \downarrow (-1) \uparrow 2 \end{array}$$

вершина лежит в 1-ом квадранте

$$\therefore f(0) = 1 + 4 + 4(-1) + 28 = 29 > 0$$

Замечаем, что минимум функции $f(x)$ достигается в точке, где $x = -1$.
 $f(-1) = 1 + 4 + 4(-1) + 28 = 29 > 0 \Rightarrow a^4 - 4a^3 + 4a + 28 \text{ всегда } > 0$

Теперь рассмотрим $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x$

(7). A.

$$\frac{4(a^3 - 3a^2 + 1)}{3a^2 - 6a} = 4(8 - 12 + 1) = -16$$

$$a^2 - 3a \quad a(a-3)$$

$$\begin{array}{c} + - + \\ \downarrow 0 \uparrow 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ 1 \end{array}$$

$$16 + 8 - 32 + 28 = 36 + 16 - 32 = (20)$$