



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{matrix}$$

1) случай равенства хотя бы 2 корней.

Допустим $x = y \neq 0$ (уравнение симметрично поэтому не важно)

$$\begin{cases} x^2 = 3z + z^2 \\ xz = 3x + x^2 \end{cases} \quad (x=y \text{ или } y=z \text{ или } x=z)$$

$$\begin{cases} z = 3 + x \\ x^2 = (3+x)(6+x) \\ x^2 = 18 + 9x + x^2 \end{cases}$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow z = 1$$

$$\text{тогда } (x+3)^2 + (y+3)^2 \neq (z+3)^2 = 18$$

2) случай равенства $x = y = z$ невозможен т.к.

$$\text{имеем } z^2 = 3z + z^2$$

$$z = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

3) случай когда все попарно не равны:

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 & (1) \\ yz = 3x + x^2 & (2) \\ zx = 3y + y^2 & (3) \end{cases}$$

поделим (1) на (2) $x \neq z \neq y \neq 0$

$$\frac{x}{z} = \frac{3z + z^2}{3x + x^2}$$

$$3x^2 + x^3 = 3z^2 + z^3 = 3y^2 + y^3$$

$$\cancel{3(x-y)(x+y)} \quad 3(x-z)(z+x) = (z-x)(x^2 + zx + z^2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$-3x-3z = x^2 + xz + z^2$$~~

~~$$-3x-3y = x^2 + xy + y^2$$~~

~~$$-3y-3z = y^2 + yz + z^2$$~~

~~$$\text{Введем } f(t) = 3t^2 + t^3$$~~

~~упорядочим $x > y > z$~~

1) ~~Если $x > 0$ и $y > 0$ - такой вар. невозм. т.к. на $(0; +\infty)$ $f(t)$~~

~~- возрастает.~~

~~или $x > 0$ и $y < 0$~~

~~$$f(t) = t^3(3+t)$$~~

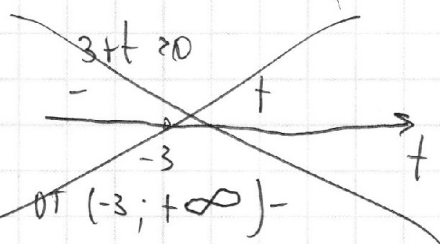
~~ст $t^3(3+t) > 0$ 2) расм. наше р-во:~~

~~т.к. расм. $t^3(3+t) > 0$~~

~~$$x^2(3+x) = y^2(3+y)$$~~

~~не равно нулю по условию~~

~~Если $x > 0$ и $y < 0$ - невозм. т.к. $3+t > 0$~~



~~$$2) \text{ или } x < 0 \text{ и } y < 0$$~~
~~$$x^2(3+x)$$~~

3) продолжение:

перемножим (1) * (2) * (3):

$$xyz = (3+z)(3+x)(3+y)$$

~~$$27 + 9x + 9y + 9z + 3xy + 3yz + 3zx = 0$$~~

$$27 + 9x + 9y + 9z + 3xy + 3yz + 3zx = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z + 27 = ?$$

или сложим из трех рав и заметим, что

$$xy + yz + zx + 3xy + 3yz + 3zx = ?$$

$$0 + 18 = 18$$

Ответ: 18.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P(A_1) = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} - \text{т.к. одним в н.м. выбрать 3 шарика и среди ост. нам нужно выбрать 2.}$$

$$P(A_2) = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} - \text{аналог.}$$

$$\frac{P(A_2)}{P(A_1)} = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} : \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

$$\frac{P(A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{(n-3)!}{3!(n-6)!}}{\frac{n!}{6!(n-4)!}} \cdot \frac{\left(\frac{n!}{(n-5)!5!}\right)}{\left(\frac{n-3!}{(n-5)! \cdot 5!}\right)}$$

$$\frac{P(A_2)}{P(A_1)} = \frac{6! (n-3)!}{3! n!} \cdot \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 120.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~✱~~
 $y: y+d; y+2d \dots$ - прогр.

по Т. Буера:

$$\begin{cases} y+9d = a^2 - a & (1) \\ y+9d = \frac{a^3 - a^2}{4} & (2) \end{cases}$$

$$(y+4d)(y+5d) = a-5$$

$$(y+2d)(y+7d) = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}$$

$$(1) = (2)$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$\begin{cases} a=0 & 1) \\ a-1 = \frac{a^2 - a}{4} & 2) \end{cases}$$

при $a=0$

$$1) (y+4d)(y+5d) = -5$$

$$(y+2d)(y+7d) = -1$$

$$y+9d = 0$$

$$y = -9d$$

$$(-5d) \cdot (-4d) = -5$$

$$-4d^2 = 1$$

$$d^2 = -\frac{1}{4}$$

$$d^2 \geq 0.$$

при $a \neq 0$:

$$2) 4a-4 = a^2 - a$$

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$a = -1 \quad a = 1 \quad (1)$$

$$a = -4 \quad a = 4 \quad (2)$$

$$(1) y+9d = 0$$

$$[-5d \cdot -4d = -4]$$

$$-5d^2 = 1 \text{ - не уга.}$$

$$(2) a = 4:$$

$$y+9d = 12$$

$$(12-5d)(12-4d) = -1 \text{ - нет реш.}$$

$$\text{Ответ: } a = 4.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

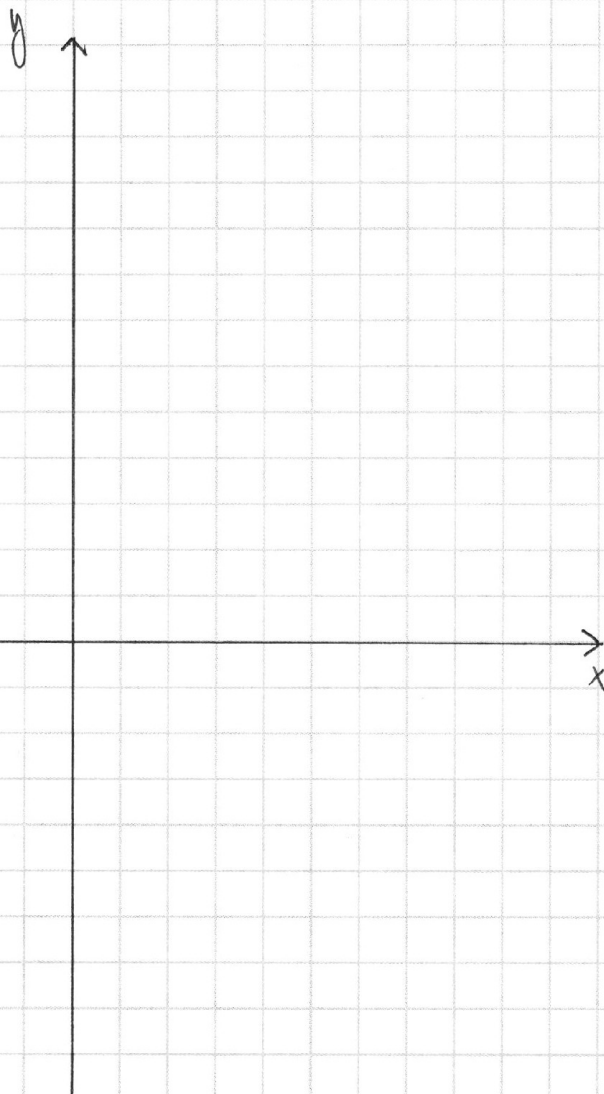
~~$$P(A) = \frac{C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3}{C_n^5}$$~~

~~нужно n-выбор~~

~~$$P(A)_1 = \frac{C_5^5}{C_n^3}$$~~

~~$$P(A)_2 = \frac{C_6}{C_n^6}$$~~

~~$$\frac{P(A)_2}{P(A)_1} = \frac{C_n^5}{C_n^6}$$~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

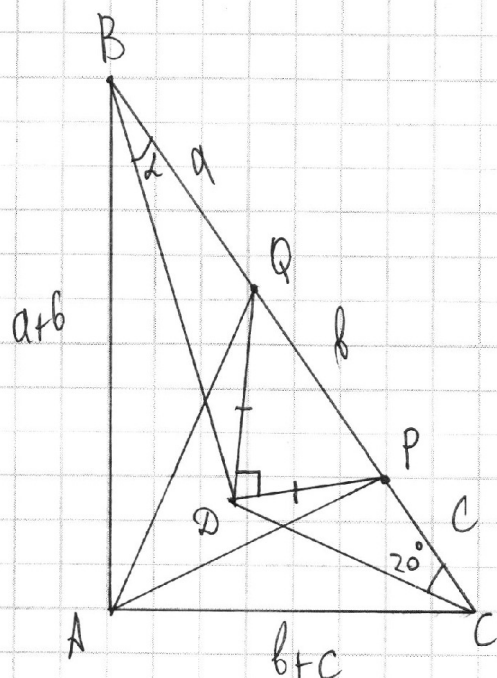
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{по Т. Пиф.: } (a+b)^2 + (b+c)^2 = (a+b+c)^2$$

$$a^2 = 2ac$$

$$b^2 = 2ac \Rightarrow DP = DQ = \sqrt{ac}$$

Т. син глн $\triangle DPC$:

$$\frac{\sin 2}{\sin 20} = \frac{\sqrt{ac}}{\sin 35} = \frac{c}{\sin 35} \Rightarrow \frac{\sin 35}{\sin 20} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$$

Т. син глн $\triangle BPQ$:

$$\frac{\sqrt{ac}}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(45-\alpha)} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin(45-\alpha)} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow \alpha = 35^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xyz = (3+z)(3+x)(3+y)$$

$$xyz = (9 + 3x + 3z + zx)(3+y)$$

$$xyz = 27 + 9y + 9x + 9z + 3xy + 3zx + 3zy + xyz$$

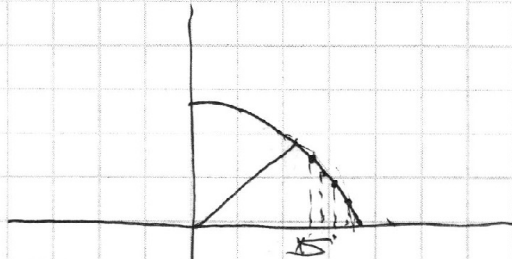
$$\frac{xy}{yz} = \frac{z(3+z)}{x(3+x)}$$

$$\frac{x}{z^2} = \frac{(3+z)}{(3+x)}$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{(3+y)}{(3+x)}$$

$$9 + 3y + 3z + 3x + xy + xz + zy = 0$$

$$xy + yz + zx +$$



$$\frac{C_6^3}{C_n^6}$$

$$\frac{C_5^3}{C_n^5}$$

$$\frac{n!}{6!(n-6)!}$$

$$\frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$$

$$\frac{(n-3)!}{3! \cdot (n-6)!} \cdot \left(\frac{n!}{6! \cdot (n-6)!} \right)$$

$$\frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-5)!}$$



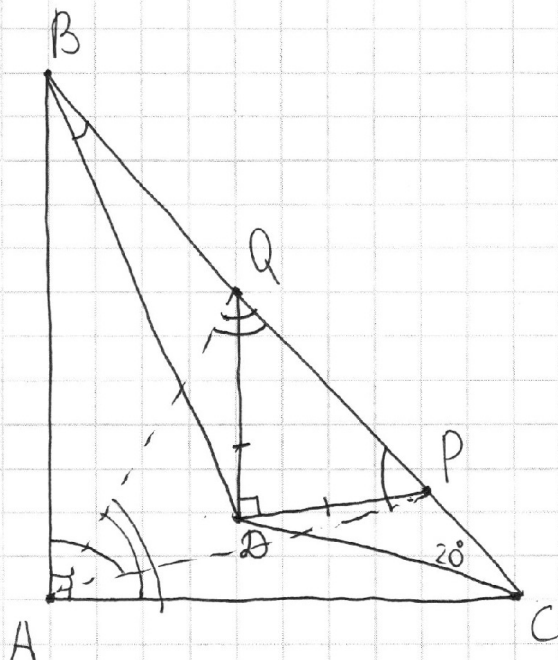
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{bc}} = \frac{\sin 45^\circ}{b}$$

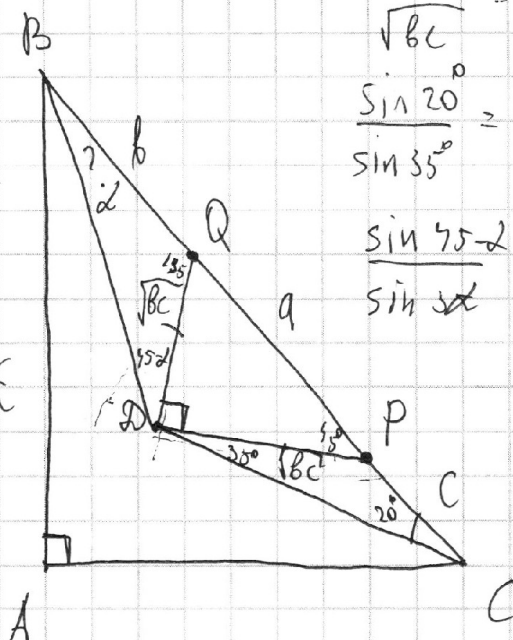
$$\frac{\sin 20^\circ}{\sqrt{bc}} = \frac{\sin 35^\circ}{c}$$

$$\frac{\sin 20^\circ}{\sin 35^\circ} = \sqrt{\frac{c}{b}}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin 35^\circ} =$$

$$\begin{aligned} (b+a)^2 + (a+c)^2 &= (a+b+c)^2 \\ b^2 + 2ab + a^2 + a^2 + 2ac + c^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\ b^2 + 2ab + a^2 + a^2 + 2ac + c^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \end{aligned}$$

$$a^2 = 2bc$$



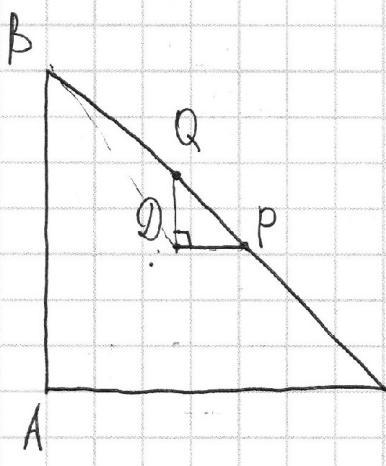
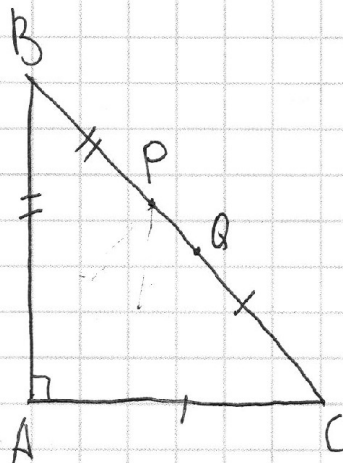


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x = y$$

$$y^2 = 3z + z^2$$

$$xz = 3x + x^2$$

$$zy =$$

$$z = 3 + x$$

$$x^2 = 3(3+x)$$

$$y^2 = (3+x)(3+3x)$$

$$x^2 = (3+x)(6+x)$$

$$x^2 = 18 + 3x + 6x + x^2$$

$$6x = -18$$

$$x = -3 \Rightarrow y = -3$$

$$xy = z(3+z)$$

$$yz = 3x + x^2$$

$$zx = 3y + y^2$$

$$\frac{x}{z} = \frac{3z + z^2}{3x + x^2}$$

$$3x^2 + 3x^3 = 3z^2 + 3z^3$$

$$3(x-z)(x+z) = (z-x)(z^2 + zx + x^2)$$

$$-x-z = z^2 + zx + x^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a - 4 = 0$$

~~$x, x+d, x+2d, x+3d$ - прогр.~~

$y, y+d, y+2d, \dots$ - прогр.

по т. Бура:

$$y + 4d + y + 5d = a^2 - a$$

$$(y + 4d)(y + 5d) = a - 5$$

$$y + 2d + y + 7d = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$(y + 2d)(y + 7d) = \frac{a^4}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^6}{4} - 1$$

$$\begin{aligned} 2y + 9d &= a^2 - a \\ 2y + 9d &= \frac{a^3 - a^2}{4} \end{aligned}$$

$$4d = a^2 - a - \frac{a^3}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$d = \frac{5a^2}{16} - \frac{a^3}{16} - \frac{a}{4}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

1) $a = 0$

2) $a - 1 = \frac{a^2 - a}{4}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{xy = 3z + 1}$$

$x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} xy = 3z + 1 \\ yz = 3x + 1 \\ zx = 3y + 1 \end{cases}$$

$$\frac{xy}{z} = 3 + \frac{1}{z}$$

$$\frac{yz}{x} = 3 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{zx}{y} = 3 + \frac{1}{y}$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = ?$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z + 3 = ?$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z - 3xy - 3yz - 3zx = ?$$

$$\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}$$

$$xyz = (3 + \frac{1}{z})(3 + \frac{1}{x})(3 + \frac{1}{y})$$

$$xyz(9 + 3x + 3z + \frac{1}{y}) =$$

$$xyz = 27 + 9y + 9x + 3xy + 9z + 3zy + 3zx + 1 + \frac{xyz}{y}$$

$$(y^2 - \frac{x^2}{z} - \frac{z^2}{x} + zx)(\frac{zx}{y} - y) =$$

$$27 + 9y + 9x + 9z + 3xy + 3zx + 3zy = 0$$

$$= \cancel{xyz - y - x + z - 27 + \frac{xyz}{y} - xyz}$$

$$(x+1)^2$$

$$xy = z(z+1)$$

$$xy + yz + zx + 3x + 3y + 3z + 3 = ?$$

$$\frac{1}{y}z = x(x+1)$$

$$x(y+1) + z(y+1) +$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 = ?$$

$$\frac{x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3}{x^2y^2z^2} = ?$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$(x+z)^2 + (y+z)^2 + (z+z)^2 = ?$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3y + 3z$$

$$3x$$

$$x, y, z \neq 0$$

$$h = 10 - 1$$

$$10$$

$$(10-1)^3$$

$$= 10^3 - 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 - 1$$

$$1000000 - \dots - 000000$$

$$3000000 - 000$$

$$3$$

$$999 \dots 970003 - 000 \dots 0$$

$$1$$

$$999 \dots 970003 - 000 \dots 0$$

$$xy = 3z + z^2$$

