



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В гемпере ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leqslant 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \quad (1) \\ yz = -6x + x^2 \quad (2) \\ zx = -6y + y^2 \quad (3) \end{cases}$$

~~$(xy-6) = xz$~~
 ~~$x(x-6) = yz$~~
 ~~$y(y-6) = zx$~~

1) Если $x=y$, то:

$$\begin{cases} x^2 = z^2 - 6z \\ xz = -6x + x^2 \Leftrightarrow \\ xz = -6x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = z^2 - 6z \\ z = x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)^2 = z^2 - 6z \\ x = z + 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(2) \begin{cases} z^2 + 12z + 36 = z^2 - 6z \\ x = z + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18z = -36 \\ x = z + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ z=-2 \end{cases}$$

Аналогично, если $y=z$, то: $\begin{cases} y=4 \\ z=4 \\ x=-2 \end{cases}$

Аналогично, если $x=z$, то: $\begin{cases} x=4 \\ z=4 \\ y=-2 \end{cases}$

Проверка $(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = (4-4)^2 + (4-4)^2 + (-2-4)^2 =$
 $= (-2)^2 + (-2)^2 + (-8)^2 = 4 + 4 + 64 = 72$.

2) Если $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$, то:

$$(1) - (2): xy - yz = (z^2 - 6z) - (x^2 - 6x) \Leftrightarrow y(x-z) = (z^2 - x^2) + (6x - 6z) \Leftrightarrow$$

$$(2) y(x-z) = 6(x-z) - (x-z)(x+z) \Leftrightarrow y = 6 - x - z \Leftrightarrow \text{(1) } x+y+z=6$$

Аналогично, если $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$: $(2) - (3)$ и $(1) - (3)$:

~~$x=6-y-z$, $z=6-x-y$.~~

$$\begin{cases} y=6-x-z \\ x=6-y-z \\ z=6-x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-x-(6-x-y) \\ x=6-y-(6-x-y) \\ z=6-x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=6-x-y \\ y=6-x-6+x+y \\ z=6-y-6+x+y \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 + z^2 = (xy + z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 6^2 - 2(xy + xz + yz) =$$

$$= 36 - 2(xy + xz + yz). \text{ Пусть } t = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow q = xy + yz + zx.$$

$$\text{Тогда: } t = 36 - 2q.$$

С другой стороны:

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} & xy + yz + zx = -6x - 6y - 6z + x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow \\ & t = 36 - 2q \end{aligned}$$

$$(2) \quad q = -6(x + y + z) + t \Leftrightarrow q = -36 + t \Leftrightarrow q = t - 36.$$

$$\begin{cases} t = 36 - 2q \\ q = t - 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 36 - 2(t - 36) \\ q = t - 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 108 \\ q = t - 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 36 \\ q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ xy + yz + zx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (-y-z)^2 + (-x-z)^2 + (-x-y)^2 = \\ & = (y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2 = y^2 + 2yz + z^2 + x^2 + 2xz + z^2 + x^2 + 2xy + y^2 = \\ & = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) = 2 \cdot 36 + 2 \cdot 0 = 72 \end{aligned}$$

Ответ: 72. И б 1) и б 2) верны.

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 72.$$

Ответ: 72.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 10^{20001} - 1$$

$$n^3 = (10^{20001} - 1)^3 = 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1 = (10^{60003} - 1) +$$

$$+ (3 \cdot 10^{20001} - 3 \cdot 10^{40002}) = \underbrace{9 \dots 9}_{60003} - \underbrace{30 \dots 0}_{40002} + \underbrace{300 \dots 0}_{20001} =$$

$$= \underbrace{9 \dots 999 \dots 9}_{20000} - \underbrace{30 \dots 0}_{40002} + \underbrace{30 \dots 0}_{20001} = \underbrace{9 \dots 969 \dots 9}_{20000} + \underbrace{30 \dots 0}_{40002} =$$

$$= \underbrace{9 \dots 969 \dots 999 \dots 9}_{20000} + \underbrace{30 \dots 0}_{20001} = \underbrace{9 \dots 970 \dots 029 \dots 9}_{20000}$$

Всего девяносто: $20\ 000 + 20\ 001 = \underline{\underline{40\ 001}}$

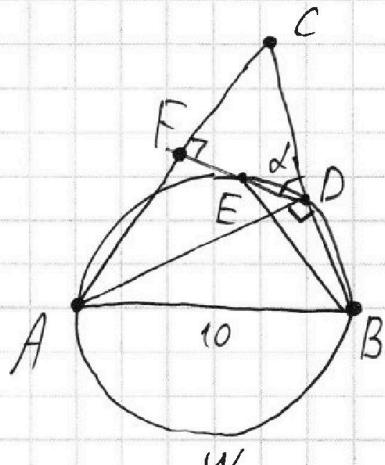
Ответ: 40001.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle BDE$ вписан в окр.

Значит, что между синусов:

$$\frac{BE}{\sin \angle BDE} = AB, \text{ т.к. } AB - \text{ диаметр окр.}$$

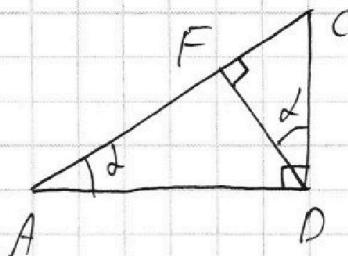
$$\frac{9}{\sin \angle BDE} = 10 \Leftrightarrow \sin \angle BDE = 0,9.$$

П.к. $\sin \angle BDE = \sin \angle COF$ (сопоставление

углов), то $\sin \angle COF = 0,9$. Тогда $\angle COF = \alpha$.

П.к. $\triangle ABD$ вписан в окр и AB -диаметр,

$$\text{т.к. } \angle ADB = 90^\circ \Leftrightarrow \angle ADC = 90^\circ$$



$$\angle A = 90^\circ - \angle C = \alpha. \quad \angle A = \angle COF = \alpha.$$

$$1) \sin \alpha = \frac{CO}{AC} \Leftrightarrow CO = AC \cdot \sin \alpha.$$

$$CO = 20 \cdot 0,9 = 18.$$

$$2) \sin \alpha = \frac{CF}{CO} \Leftrightarrow CF = CO \cdot \sin \alpha.$$

$$CF = 18 \cdot 0,9 = 16,2.$$

$$3) AF = AC - CF = 20 - 16,2 = 3,8$$

Ответ: 3,8.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего кубиков n .

Первое покраска у кубика было C_n^5 возможов

Остальные кубики, ее покрасивших - C_{n-3}^2

Во втором случае у кубика было C_n^6 возможов окрасивших: C_{n-3}^6 (P_1 и P_2 - первая и вторая краски)

$$P_1 = \frac{C_n^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!}}{\frac{n!}{5!}} = \frac{5!(n-3)!}{2!n!}$$

$$P_2 = \frac{C_n^6}{C_n^9} = \frac{\frac{(n-3)!}{6!(n-9)!}}{\frac{n!}{9!(n-9)!}} = \frac{\frac{(n-3)!}{6!}}{\frac{n!}{9!}} = \frac{9!(n-3)!}{6!n!}$$

$$P_2 : P_1 = \frac{9!(n-3)!}{6!n!} : \frac{5!(n-3)!}{2!n!} = \frac{9!}{6!} \cdot \frac{2!}{5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7}{5} = \frac{42}{5} =$$

= (8, 9)

Ответ: 6 8, 9 раза

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решения которой представлены на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|
| 1
<input type="checkbox"/> | 2
<input type="checkbox"/> | 3
<input type="checkbox"/> | 4
<input type="checkbox"/> | 5
<input checked="" type="checkbox"/> | 6
<input type="checkbox"/> | 7
<input type="checkbox"/> |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(1) $x^2 - (\alpha^2 - 4\alpha)x + \alpha^2 - 6\alpha + 4 = 0$ имеет корни b_6 и b_7 .

(2) $5x^2 - (\alpha^3 - 4\alpha^2)x - 2\alpha^3 - 6\alpha - 15 = 0$ имеет корни b_5 и b_8 , причём b_8 - однозначная задача.

По условию Виета: $b_6 + b_7 = \alpha^2 - 4\alpha$.

$$b_5 + b_8 = \frac{\alpha^3 - 4\alpha^2}{5}$$

П.к. b_8 - однозначная задача, то

$b_6 + b_7 = b_5 + b_8$. Значит, $\alpha^2 - 4\alpha = \frac{\alpha^3 - 4\alpha^2}{5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5\alpha(\alpha - 4) = \alpha^2(\alpha - 4) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 5 \end{cases}$$

Быть может 1) Если $\alpha = 0$, то уравнение (1) имеет вид $x^2 + 4 = 0$ и не имеет корней.

2) Если $\alpha = 4$, то:

$$(1) x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{При } \alpha = 4: b_5 = -\sqrt{\frac{16+4}{5}},$$

$$(2) 5x^2 - 16y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{16+4}{5}} \\ x = -\sqrt{\frac{16+4}{5}} \end{cases} \quad b_6 = -2, \\ b_7 = 2, \\ b_8 = \sqrt{\frac{16+4}{5}}, \text{ что невозможно.}$$

3) Если $\alpha = 5$, то:

$$(1) x^2 - 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5-\sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

$$(2) 5x^2 - 25x - 295 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 59 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5-3\sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{5+3\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

(Гарантия однозначности $\sqrt{29}$)

Ответ: $\alpha = 5$

$$\text{При } \alpha = 5: b_5 = \frac{5-\sqrt{29}}{2},$$

$$b_6 = \frac{5-\sqrt{29}}{2},$$

$$b_7 = \frac{5+\sqrt{29}}{2},$$

$$b_8 = \frac{5+3\sqrt{29}}{2}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8 \Leftrightarrow |y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |20 - y + \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8$$

П.1. $|a+b| \leq |a|+|b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, m.$

$$8 \geq |(y-20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}) + (y-20 - \frac{x}{2\sqrt{3}})| = |2y - 40| \Leftrightarrow |y-20| \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 \leq y \leq 24.$$

$$8 \geq |(y-20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}) + (20-y + \frac{x}{2\sqrt{3}})| = |\frac{x}{\sqrt{3}}| \Leftrightarrow |x| \leq 8\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8\sqrt{3} \leq x \leq 8\sqrt{3}.$$

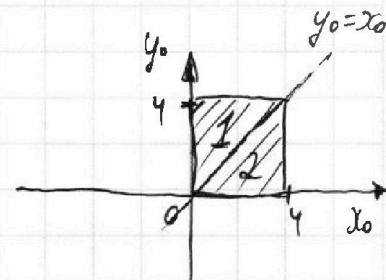
Рассмотрим $y_0^* = y-20$; $x_0^* = \frac{x}{2\sqrt{3}}$.

Получим: $|y_0^* + x_0^*| + |y_0^* - x_0^*| \leq 8$. ~~или~~



$$1) \quad x_0 \geq 0, y_0 \geq 0.$$

$$|y_0 + 20| + |y_0 - 20| \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \geq 20 \\ y_0 \leq 4 \end{cases} \text{ (1)} \quad \begin{cases} y_0 \leq 20 \\ y_0 \geq 4 \end{cases} \text{ (2)}$$



$$2) \quad x_0 \leq 0, y_0 \geq 0.$$

$$|y_0 + 20| + |y_0 - 20| \leq 8 \Leftrightarrow |(-y_0) + (-20)| + |(-y_0) - (-20)| \text{ (следующее аналогично решению 1)}$$

Решение 1) График - квадрат с вершинами $(0,0), (0,-4), (-4,-4), (-4,0)$.

$$3) \quad x_0 \geq 0, y_0 < 0$$

$$|y_0 + 20| + |y_0 - 20| \leq 8 \Leftrightarrow |(-y_0) + 20| + |(-y_0) - 20| \leq 8$$

$$\Leftrightarrow |(-y_0) + (-20)| + |(-y_0) - (-20)| \leq 8 \Leftrightarrow |(-y_0) + 20| + |(-y_0) - 20| \leq 8.$$

Следующее аналогично График - квадрат с вершинами

$$(0,0), (0,-4), (4,-4), (4,0), (0,0), (0,4), (-4,4), (-4,0).$$

$$4) \quad x_0 < 0; y_0 < 0. \text{ Следующее аналогично решению 3.)}$$

График - квадрат с вершинами $(0,0), (0,4), (-4,4), (-4,0)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

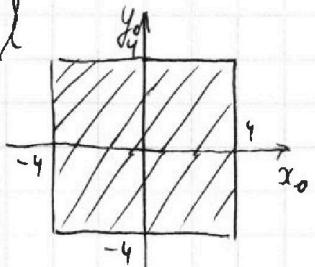
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вертикальные сужения

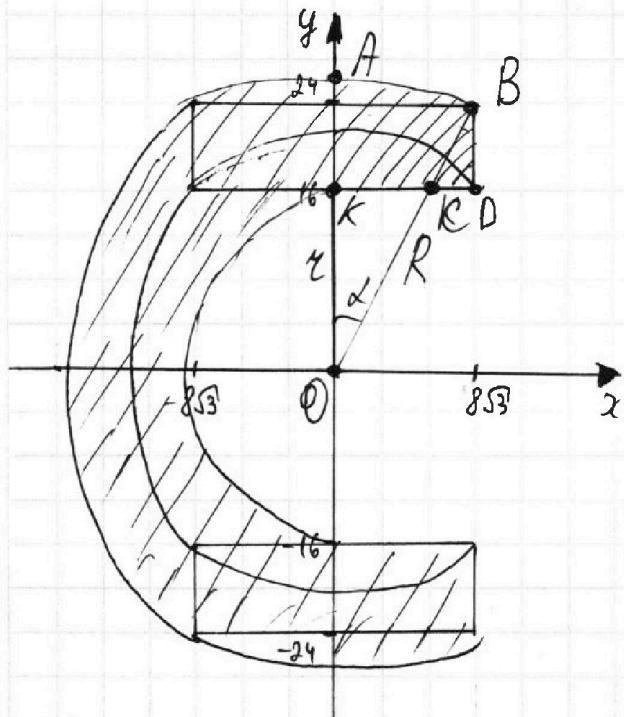
Можно образовать уравнение:



$$\text{Что можно записать тут: } \begin{cases} |x_0| \leq 4 \\ |y_0| \leq 4 \end{cases}$$

Вертикальные сужения

$$\begin{cases} \left| \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 4 \\ |y - 20| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 8\sqrt{3} \\ 16 \leq y \leq 24 \end{cases} \quad - \text{угловые}$$



Можно 11 изображений на рисунке

1) Величина площадь той части, где x > 0.

Это гауссова форма:

$$y = 16, R = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 24^2} = \\ = \sqrt{3 \cdot 8^2 + 24^2} = 8\sqrt{3+3^2} = 8\sqrt{12} = 16\sqrt{3} \\ S_1 = \frac{\pi R^2 - 16^2}{2} = \frac{\pi (R^2 - 4^2)}{2} = \\ = \frac{\pi}{2} (16^2 - 4^2) = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 16^2 = \boxed{256\pi}$$

2) Величина площадь той части, где x > 0, y > 0.

$$S_2 = S_{BOC} + S_{\text{внешн.}AOB} - S_{\text{окр.}} = \pi S_{\text{окр.}} - 32\sqrt{3}.$$

$$\left(\frac{CK}{KD} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{BOC} - S_{\text{окр.}} = \frac{1}{4} S_{\text{окр.}} - S_{\text{окр.}} = \frac{2}{3} S_{\text{окр.}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8\sqrt{3} \right) = -32\sqrt{3} \right). \text{ Но же, } \sin \alpha = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ. S_{\text{внешн.}AOB} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi R^2 = \frac{1}{6} \pi \cdot (6\sqrt{3})^2 = \frac{1}{6} \cdot 256 \cdot 3\pi = 128\pi. \text{ Значит: } S_2 = \boxed{128\pi - 32\sqrt{3}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Вычислим площадь левой части, где $y \leq 0$, $x \geq 0$.

$S_3 = S_2$ из симметрии относительно Ох.

Значит, $S_3 = \underline{\underline{128\sqrt{2} - 32\sqrt{3}}}$

$$\begin{aligned} \text{Полные образцы: } S &= S_1 + S_2 + S_3 = 256\sqrt{2} + 2(128\sqrt{2} - 32\sqrt{3}) = \\ &= \underline{\underline{512\sqrt{2} - 64\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

Чему: $512\sqrt{2} - 64\sqrt{3}$?

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

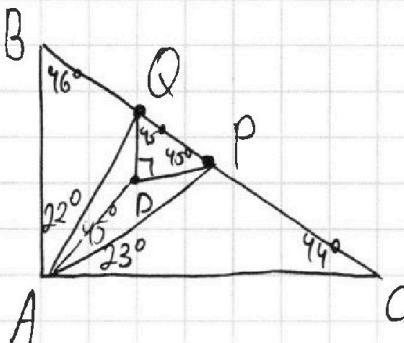
5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle C = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$$

$$\triangle ABD: \angle BAP = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 90^\circ - 23^\circ \Rightarrow \angle CAP = 23^\circ$$

$$\triangle ACQ: \angle CAQ = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 90^\circ - 22^\circ \Rightarrow \angle BAQ = 22^\circ$$

$$\angle QAP = 90^\circ - \angle BAC - \angle CAP = 90^\circ - 22^\circ - 23^\circ = 45^\circ$$

П.н. б) $\angle QPD = 80^\circ$, $\angle QAP = 45^\circ = \frac{1}{2}\angle QPD$, то
A лежит на ограждении с улицы в D
и радиусы $DQ = DP$. (по теореме о ГМТ).

Значит, $AD = QD$.

П.н. Адд. $AD = QD$ и $AC = QC$, то CD -
срединный перпендикуляр к AQ. П.к.
 $\triangle ACQ$ - равнобедренный, то CD - биссектриса
угла $\angle ACB$. Значит, $\angle DCB = \frac{1}{2}\angle ACB = 22^\circ$

Отв: 22° .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

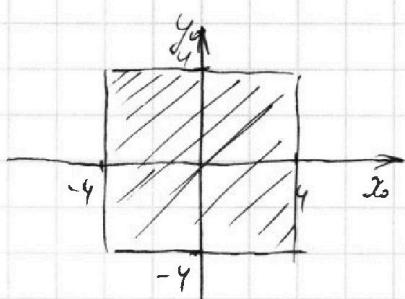
СТРАНИЦА
из



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом, задача решалась $|y_0+x_0| + |y_0-x_0| \leq 8$

Имеем вид:



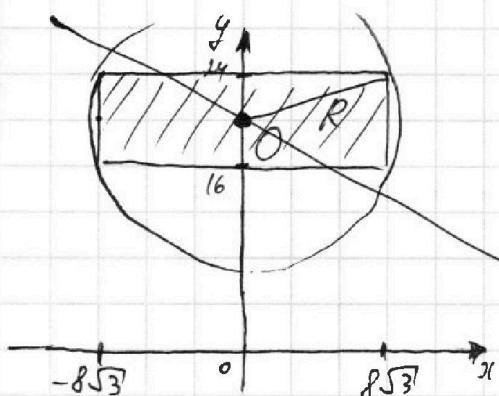
Ведёмся к уравнению

Что можно записать тут?

$$\begin{cases} |x_0| \leq 4 \\ |y_0| \leq 4 \end{cases}$$

Ведёмся к уравнению

$$\begin{cases} \left|\frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4 \\ |y_0 - 20| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 8\sqrt{3} \\ 16 \leq y \leq 24 \end{cases}$$



Круг подвёрнут засечки
и углашки на 180° будем
записывать с учётом в
точке $(0, 20)$ и радиусом:

$$R = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{3 \cdot 64 + 16} = \\ = 4\sqrt{3 \cdot 4 + 1} = 4\sqrt{13}.$$

Площадь круга: $S = \pi R^2 = \pi \cdot (4\sqrt{13})^2 = 108\pi$

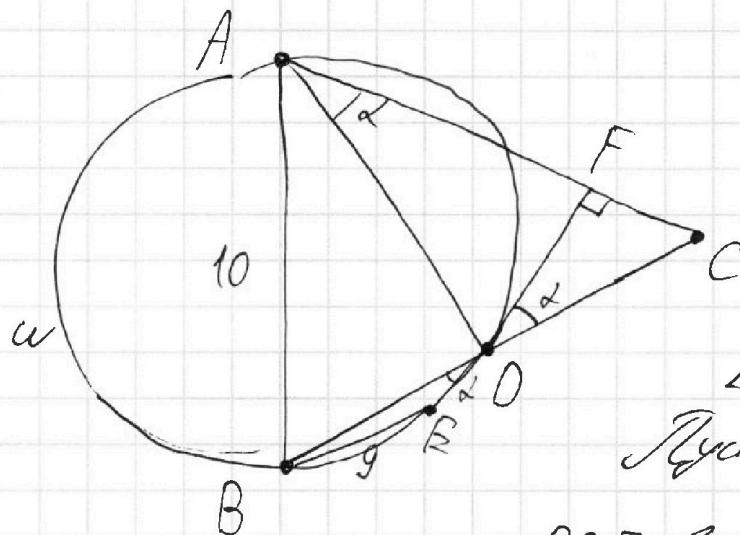
Ответ: 108π .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА
1 из _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC=20, \quad AB=10, \\ BF=9 \\ AF=?$$

$\angle COD = \angle BOE$ (взаимные)

Пусть $\angle COF = \angle BOE = \alpha$.

$\triangle BDE$ вписан в ω . Тогда

изделие синусов: $\frac{BE}{\sin \alpha} = AB; \sin \alpha = \frac{BF}{AB} = \frac{9}{10} = 0,9$.

Из $\triangle AOB$ вписан в ω и AB - основание

тогда $\angle AOB = 90^\circ \Leftrightarrow \angle ADC = 90^\circ$.

$\triangle AOC \sim \triangle DFC$ (внешний, подобный, вспомогательный)

Значит, $\frac{AC}{DC} = \frac{DF}{FC}$

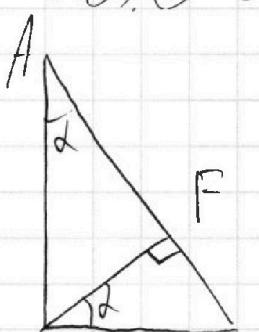
Пусть $CD = x$. Тогда $CF = x \sin \alpha = 0,9x$.

$$\sin \alpha = 0,9 = \frac{CF}{AC} = \frac{x}{AC} \Rightarrow AC = \frac{x}{0,9}.$$

Значит, $x = 0,9AC = 0,9 \cdot 20 = 18$;

$$CF = 0,9x = 0,9 \cdot 18 = 16,2;$$

$$AF = AC - CF = 20 - 16,2 = 3,8$$



Ответ: 3,8.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

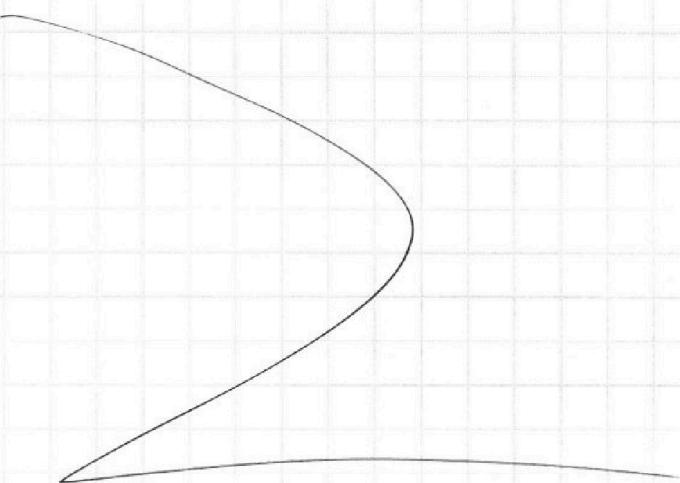
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

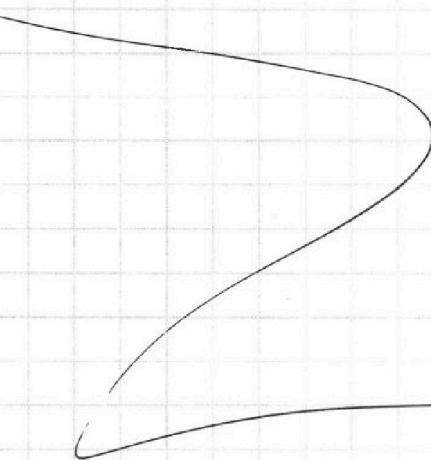
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 25 + 236 = 261 = 3 \cdot 87 = 9 \cdot 29 =$$

$$\sqrt{D} = 3\sqrt{29}.$$

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x = yz \\ z^2 - 6z = xy \\ y^2 - 6y = xz \end{cases}$$

$$(x-3)^2 = yz + 9.$$

$$x_6^2 = \frac{z^4}{x^4} z_6^2.$$

$$y_6^2 = \frac{z^4}{y^4} z_6^2.$$

$$\frac{x(x-6)}{2(z-6)} = \frac{z}{x}, \quad \frac{(x-6)^2}{(z-6)^2} = \frac{z^2}{x^2}.$$

$$(x-6)^2 = ((x-3)-3)^2 = (x-3)^2 + 9 - 6(x-3) = yz + 18 - 6x + 18z - 6x + yz + 36. \quad \frac{z^2}{x^2} = \frac{x-6}{z-6}.$$

$$108 + xy + yz + xz - 6x - 6y - 6z$$

$$y^2 = (x-6)(z-6).$$

$$x^2(x-6) = z^2(z-6).$$

$$(x+y+z-18)^2 - 2(x-6)(y-6) - 2(y-6)(z-6) - 2(x-6)(z-6) =$$

$$x^2 = (x-6)(y-6).$$

$$= (x+y+z-18)^2 - 2z^2 - 2x^2 - 2y^2 = (x+y+z)^2 - 36(x+y+z) + 18^2 - 2z^2 - 2x^2 - 2y^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 36x - 36y - 36z + 18^2 =$$

$$= 2xy + 2xz + 2yz - x^2 - y^2 - z^2 - 36x - 36y - 36z + 18^2 = \frac{z^4}{x^4} + \frac{z^4}{y^4} + \frac{z^4}{x^4}.$$

$$= 2z^2 - 12z^2 - 12y^2 - 2x^2 - 12x - x^2 - y^2 - z^2 - 36x - 36y - 36z + 18^2 =$$

$$y = \frac{x(x-6)}{y}$$

$$= x^2 - y^2 - z^2 - 48x - 48y - 48z + (3 \cdot 6)^2 =$$

$$y = \frac{2(z-6)}{x} =$$

$$= (x-24)^2 + (y-24)^2 + (z-24)^2 - 324^2 + 3 \cdot 108$$

$$(z-6)^2 \cdot \frac{z^4}{x^4} + (z-6)^2 \cdot \frac{z^4}{y^4} + (z-6)^2 = (z-6)^2 \cdot \left(\frac{z^4}{x^4} + \frac{z^4}{y^4} + \frac{z^4}{x^4} \right) =$$

$$xy = \frac{x(x-6)}{y} \left(\frac{x(x-6)}{y} - 6 \right) \quad y^2 = (x-6) \left(\frac{x(x-6)}{y} - 6 \right).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 =$$

$$= (6x+y+z-12x+36) + (x^2+6y-12y+36) + (x^2+6z-12z+36) =$$

$$= xy + yz + zx - 6(x+y+z) + 108 =$$

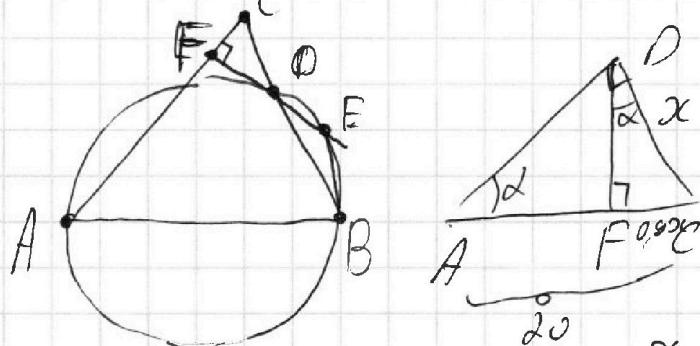
$$(10^{20000} - 1)^3 = 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1 =$$

$$= \underbrace{99\dots9}_{60003} - 3\underbrace{00\dots0}_{40002} + 3\underbrace{0\dots0}_{20001} = \underbrace{99\dots9}_{30000} \underbrace{99\dots9}_{40002} - 3\underbrace{0\dots0}_{4002} + 3\underbrace{0\dots0}_{20001} =$$

=

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3.$$

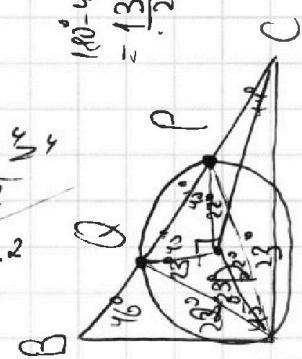


$$\begin{cases} xy = z^2 - 6z \\ yz = x^2 - 6x \\ zx = y^2 - 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(z-6) = xy \\ x(x-6) = yz \\ y(y-6) = zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z-6 = \frac{xy}{z} \\ x-6 = \frac{yz}{x} \\ y-6 = \frac{zx}{y} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \angle A = 44^\circ \\ \angle B = 136^\circ \\ \angle C = 66^\circ \\ \angle D = 100^\circ \end{array}$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} = \cancel{x^2 y^2 z^2} \cancel{x^2 y^2 z^2} =$$

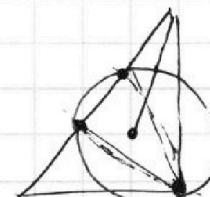
$$= \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 = \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right)^2 - 2y^2 - 2x^2 - 2z^2$$



$$-2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4 - 15 = -2 \cdot 64 - 24 - 15 = -128 - 39 = -158 - 9 = -167.$$

$$-2 \cdot 5^3 - 6 \cdot 5 - 15 = -2 \cdot 125 - 30 - 15 = -250 - 45 = -295$$

$$D = 25 + 4 = 29, \quad x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-6) = yz \\ y(y-6) = zx \\ z(z-6) = xy \end{cases}$$

$$y(x-z) = z^2 - x^2 + 6x - 6z; \quad \text{Если } x \neq z.$$

$$y(x-z) = -(x-2)(x+2) + 6(x-2)$$

$$y^2 = x^2 - 2x - 2 + 6.$$

$$(x-y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xz + z^2 + y^2 + 2yz + z^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} xy = 6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 6-x-z \\ yz = -6x - x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 6-x-z \\ z = 6-x-y \\ zx = -6y + y^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
 & \left(\begin{array}{l} z = 6-x-y \\ y = 6-x-(6-x-y) \\ zx = -6y + y^2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} z = 6-x-y \\ 2(6-x-y) = -6y + y^2 \\ 6x - x^2 - y^2 = -6y + y^2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \\
 & \left(\begin{array}{l} z = 6-x-y \\ x^2 + 2y^2 = 6x + 6y \end{array} \right) \quad \text{аналогично } M.O.: x+y+z=6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Задача: } (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (-y-2)^2 + (-x-2)^2 + (-x-y)^2 = \\
 & = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 + x^2 + 2xz + z^2 = \\
 & = 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz) = 2(x^2 + y^2 + z^2 + 2^2 + 6^2 + x^2 - 6x + y^2 - 6y) = \\
 & = 2(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6(xy + yz + xz)) = 4(x^2 + y^2 + z^2) - 12 \cdot 6 = 4
 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 36 - 2(xy + xz + yz).$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$$