



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В теленгре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leqslant 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz = z^3 - 6z^2 \\ xyz = x^3 - 6x^2 \\ xyz = y^3 - 6y^2 \end{cases}$$

Тогда ~~т~~ имеем
 $(t^3 - 6t^2 - xyz)$ имеет

корни x, y, z , тогда по теореме Виета $x+y+z=6$,

$$xy+yz+zx=0 \Rightarrow (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (x^2 - 12x + 36)$$

$$+ (y^2 - 12y + 36) + (z^2 - 12z + 36) = (x^2 + y^2 + z^2) + -12(x+y+z)$$

$$+ 36 \cdot 3 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) - 12(x+y+z) + 3 \cdot 36 =$$

$$= 6^2 - 2 \cdot 0 - 12 \cdot 6 + 36 \cdot 3 = 36(1 - 2 + 3) = 36 \cdot 2 = 72.$$

Ответ: 72.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{99\dots9}_{20001} \Rightarrow n = 10^{20001} - 1 \Rightarrow n^3 = (10^{20001} - 1)^3 =$$

$$= 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1 =$$

~~Доказательство~~

$$= 10^{20001} (10^{40002} - 3 \cdot 10^{20001} + 3) - 1 =$$

$$= 10^{20001} (10^{20001} (10^{20001} - 3) + 3) - 1 =$$

$$= 10^{20001} (10^{20001} \cdot \underbrace{999\dots9}_{20000} + 3) - 1 =$$

$$= 10^{20001} (\underbrace{999\dots9}_{20000} \underbrace{700\dots0}_{20001} + 3) - 1 =$$

$$= 10^{20001} \cdot \underbrace{999\dots9}_{20000} \underbrace{700\dots0}_{20000} - 1 =$$

$$= \underbrace{999\dots9}_{20000} \underbrace{700\dots0}_{20000} \underbrace{300\dots0}_{20001} - 1 = \underbrace{99\dots9}_{20000} \underbrace{700\dots0}_{20000} \underbrace{299\dots9}_{20001} - 1$$

$$\Rightarrow 6 \cdot n^3 \cdot 20000 + 20001 = 40001 \text{ девятка.}$$

Ответ: 40001.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3.

Заметим, что $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$
(т.к. D, E лежат на окр. с диам. AB)

Тогда по т.Пифагора для $\triangle AEB$:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 \Rightarrow AE^2 = AB^2 - BE^2 = 100 - 81 = 19.$$

Теперь заметим, что $\angle BAD = \angle BED$ (т.к. $ABDE$ -внрт.)

Рассмотрим для них случаи:

1) E лежит на отрезке DF: Тогда $\angle BAD = \angle BED$, т.к. $ABDE$ -внрт. Так же $\angle AEF = 180^\circ - 90^\circ - \angle BED = 90^\circ - \angle BED = 90^\circ - \angle EAF$ (т.к. $\angle EAF + \angle AEF = 90^\circ$) $\Rightarrow \angle BED = \angle EAF \Rightarrow \angle BAE = \angle DAF \Rightarrow \triangle BAE \sim \triangle DAF$ (но 2 углам).

2) F лежит на отрезке EF.

Тогда $\angle ABE = \angle BDE$

$$\angle BAE = \angle BDE \quad (\text{BADE - внрт.})$$

$$\angle DAF = 90^\circ - \angle ADF = 90^\circ - (180^\circ - 90^\circ - \angle BDE) = \angle BDE = \angle BAE \Rightarrow \triangle BAE \sim \triangle DAF.$$

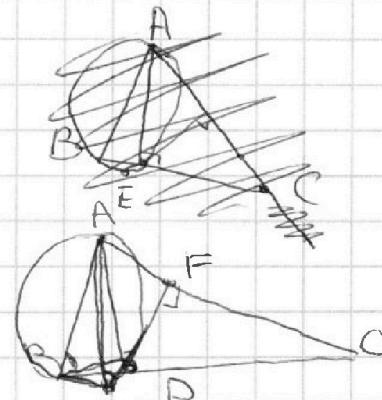
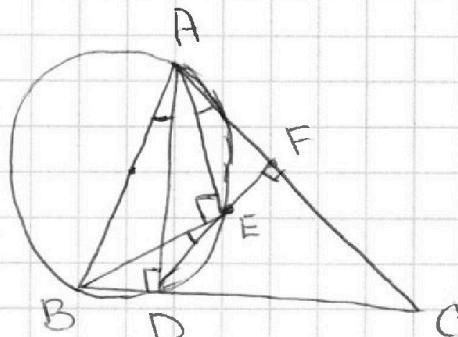
Значит в любом случае (E не лежит на отрезке ED, т.к. F не лежит на отрезке AD)

3) F лежит на отрезке ED. $\angle ABE = \angle ADE \Rightarrow \triangle BAE \sim \triangle DAF$ (но 2 углам).

Значит в любом случае $\triangle BAE \sim \triangle DAF$. Рассмотрим случай $\triangle BAE \sim \triangle DAF$:
тогда $FC = 20 - x$, тогда $FD^2 = AF \cdot FC = x(20-x)$ (метрическое уравнение)

$$\frac{AF}{AE} = \frac{DF}{BE} \Rightarrow \frac{AF^2}{AE^2} = \frac{DF^2}{BE^2} \Rightarrow \frac{x^2}{19^2} = \frac{x(20-x)}{81} \Rightarrow 81x^2 = 19 \cdot 20x - 19x^2 \Rightarrow 100x^2 - 19 \cdot 20x = 0 \Rightarrow x = \frac{19}{5} = 3,8.$$

Ответ: 3,8.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

Руло всего было n коробок. Тогда $\frac{C_2^n}{C_5^n}$ подходит, если открыть 5 короб.

Берает коробок n , открыв 6 короб.

↓

Увеличилось f

$$\frac{\frac{C_6^n}{C_3^n}}{\frac{C_2^n}{C_5^n}} = \frac{\frac{n(n-1)\dots(n-5)}{6!}}{\frac{n(n-1)\dots(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{9!}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{42(n-2)(n-3)(n-4)}{5(n-6)(n-7)(n-8)}} =$$

Ответ: при n коробках

$$\frac{42(n-2)(n-3)(n-4)}{5(n-6)(n-7)(n-8)}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

*

№5.

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + (a^2 - 6a + 1) = 0 \quad - \text{корни } \cancel{a_6} \text{ и } a_7$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - (2a^3 + 6a + 15) = 0 \quad - \text{корни } a_5 \text{ и } a_8$$

Заметим, что $a_6 + a_7 = a_6 + a_8$, т.к. $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$,
 $a_5 = a_1 + 4d$, $a_8 = a_1 + 7d \Rightarrow a_6 + a_7 = 2a_1 + 11d = a_5 + a_8$.

Но $a_6 + a_7 = a^2 - 4a$ по теореме Виета для 1 ур-ши

$$a_5 + a_8 = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \quad - \text{по теореме Виета для 2 ур-ши} \Rightarrow$$

$$a^2 - 4a - \frac{a^3 - 4a^2}{5} = 0 \Rightarrow a(a^2 - 4a) = 5(a^2 - 4a) \Rightarrow (a^2 - 4a)(a - 5) = 0$$

$$a(a-4)(a-5) = 0 \quad \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=5 \end{cases}$$

$$1) a=0 \quad x^2 - 0 \cdot x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \leftarrow \text{нет корней?}$$

$$2) a=4 \quad x^2 - 0 \cdot x + (16 - 24 + 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \quad \text{корни}$$

$$5x^2 - 0 \cdot x - (2 \cdot 64 + 24 + 15) = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - \frac{167}{207} = 0$$

$$\text{Отв. 2.1)} -2 = a_1 + 4d \quad \begin{cases} a_1 = -2 \\ d = \frac{167}{5} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{корни} \\ \uparrow \text{номер} \\ \sqrt{\frac{167}{5}} \\ -\sqrt{\frac{167}{5}} \end{matrix}$$

$$2 = a_1 + 6d \Rightarrow d = \frac{2 - (-2)}{2} = 2 \quad a_5 = 2 + 4 \cdot 2 = 10$$

$$\Rightarrow a_5 = a_1 + 4d = -2 + 4 \cdot 2 = 6 \quad \begin{matrix} \text{корни} \\ \uparrow \text{номер} \\ \sqrt{\frac{167}{5}} \\ -\sqrt{\frac{167}{5}} \end{matrix}$$

$$2.2) -2 = a_1 + 5d \quad \begin{cases} d = -4 \\ a_1 = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{корни} \\ \uparrow \text{номер} \\ \sqrt{\frac{167}{5}} \\ -\sqrt{\frac{167}{5}} \end{matrix}$$

$$2 = a_1 + 6d \quad \begin{cases} d = 4 \\ a_1 = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{корни} \\ \uparrow \text{номер} \\ \sqrt{\frac{167}{5}} \\ -\sqrt{\frac{167}{5}} \end{matrix}$$

$$3) a=5 \quad x^2 - 5x + 1 = 0 \quad \rightarrow \text{корни} \quad \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \text{ и } \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$5x^2 - 25x - (250 + 30 + 15) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 59 = 0 \rightarrow \text{корни}$$

$$\text{Тогда если } a_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \Rightarrow a_5 = a_1 + 4d = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} \quad \begin{cases} a_6 = a_1 + 5d = \frac{5 - 2\sqrt{29}}{2} \\ a_7 = a_1 + 6d = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Отв. } a_1 = 5, \quad \begin{cases} d = \sqrt{29} \\ a_5 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} \\ a_6 = \frac{5 - 2\sqrt{29}}{2} \\ a_7 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

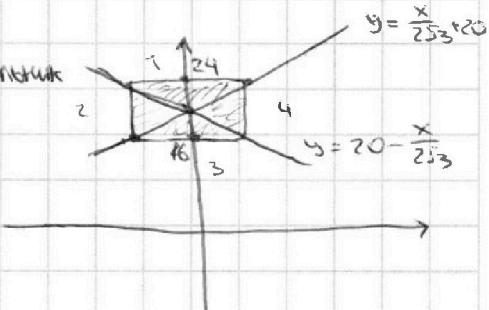
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

* Докажем, что фигура OP - параллелограмм с вершинами $(8\sqrt{3}; 16); (-8\sqrt{3}; 16); (8\sqrt{3}, 24); (-8\sqrt{3}, 24)$:



Рассмотрим 4 случая

$$1) y \geq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}, y \geq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \quad (\text{3 часть плоскости}) \Rightarrow$$

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| = y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} = 2y - 40 \leq 8 \Leftrightarrow$$

$y \leq 24$. \Rightarrow 6₀ 2 области подходит закраинный Δ .

$$2) y \geq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}, y \leq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \quad (\text{2 область плоскости на рис.}) \Rightarrow$$

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| = 20 - y - \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8 \Rightarrow x \geq -8\sqrt{3} \Rightarrow 6_0 2 \text{ области подходит}$$

закраин. Δ

$$3) y \geq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}, y \leq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \quad (\text{3 область плоск. на рис.})$$

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| = 20 - y - \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 - y + \frac{x}{2\sqrt{3}} \Leftarrow$$

$$= 40 - 2y \leq 8 \Rightarrow y \geq 16. \Rightarrow 6_0 3 \text{ области подходит закраин. } \Delta.$$

$$4) y \geq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}, y \geq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \quad (\text{4 часть плоск. на рис.})$$

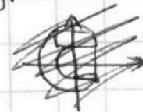
$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| = y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 - y + \frac{x}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8 \Rightarrow x \leq 8\sqrt{3} \Rightarrow 6_0 4 \text{ области подходит закраин. } \Delta.$$

Возьмут это уравнение действительно задаёт такой привычный логик.

Тогда множество M является ~~такое~~ ~~привычное~~ множеством которого ограничивается полуокр.

окр с центром $(0,0)$ $R = 16$ (где $x < 0$)





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

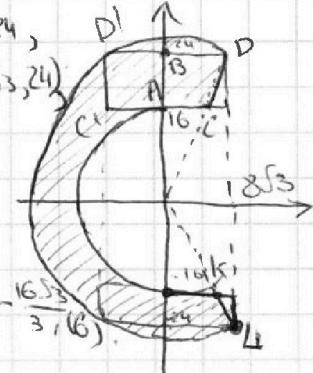
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6 (продолжение)

другой окружности с центром $(0,0)$ и $R=24$, отрезками $(0,16)-(8\sqrt{3},16)$; $(8\sqrt{3},16)-(8\sqrt{3},24)$; $(0,-16)-(8\sqrt{3},-16)$; $(8\sqrt{3},-16)-(8\sqrt{3},-24)$.



т.к. путь $D(8\sqrt{3}, 24)$, $A(0, 16)$,
 $B(0, 24)$, $C\left(\frac{16\sqrt{3}}{3}, 16\right)$. Тогда

Отрезок AB замечает кольцо между окр. с ун. $(0,0)$

$\Leftarrow R=16$ и $R=24$, а и отрезок CD замечает кольцо между окр. с ун. $(0,0)$ и $R=\sqrt{(8\sqrt{3})^2+24^2}$ и

$R=\sqrt{\left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)^2+16^2}$, $C'D'$ замечает кольцо, но в ^{лев.} половине ~~окр.~~ $C'D'$, но $\sqrt{\left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)^2+16^2} \leq 24$,

т.к. $16\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1} < 24$, т.к. $2\cdot\sqrt{\frac{4}{3}} < 3$, т.к. $4 < 3\sqrt{3}$, т.к.

$16 < 27$. \Rightarrow Вместе они замечают область от CD до KL на рис. ($K=\left(\frac{16\sqrt{3}}{3}, -16\right)$, $L(8\sqrt{3}, -24)$). Оставшиеся части замечают косое \angle и наклонную полоску граници.

Получается $S = \frac{1}{2}(\pi \cdot (64 \cdot 3 + 24^2) - \pi \cdot 16^2) + 2 \cdot 64\sqrt{3}$

$$S = \frac{1}{2}(\pi \cdot (64 \cdot 3 + 24^2) - \pi \cdot 16^2) + 2 \cdot 64\sqrt{3} + 2 \cdot$$

$$+ \cancel{\text{отет}} \text{ отет } \frac{\arctg \frac{\sqrt{3}}{3}}{\pi} \cdot (\pi (64 \cdot 3 + 24^2)) = \begin{aligned} &\text{половину} \\ &\text{образ. на } ABD \text{ и} \\ &\text{треуг. } \begin{cases} \text{сумма длин кег. пол. } BD' \text{ и отрез. } BD \\ \text{отакой же отрез. } BD' \text{ и отрез. } BD \end{cases} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot 512 + 128\sqrt{3} + \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 768 \end{aligned}$$

Ответ: $256\pi + 128\sqrt{3} + 768 \arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$.
 Тогда $\angle QAC = \angle QCA = 90^\circ - \alpha$ (т.к. $\angle AQC = \pi/2$), аналогично $\angle BAP = \angle APB = 90^\circ - \beta$ (т.к. $\angle ABP = \pi/2$). Тогда $\angle BAC = 90^\circ - \alpha$, $\alpha < PAC = 90^\circ - \angle BAP - \beta$. Но $\alpha + 2\beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$. $\angle QAP = 90^\circ - \angle BAC - \angle CAP =$

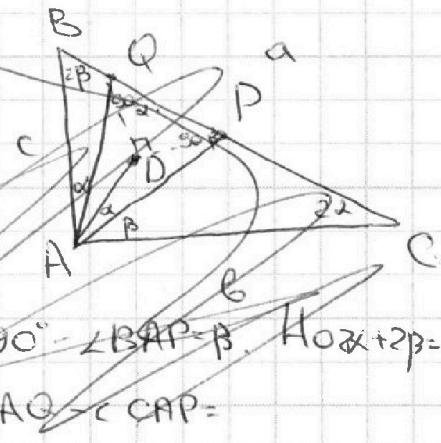


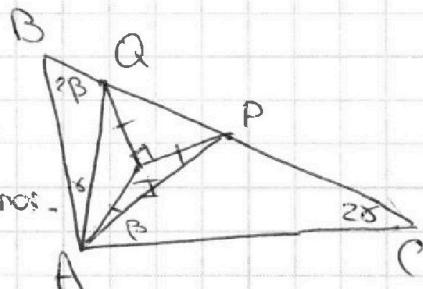
Рисунок I - центр $\triangle ABC$,

тогда $\triangle ACI \cong \triangle QCI$ (по 2 прип.).

($CI = CI$, $AC = CQ$, $\angle ACI = \angle QCI$)

и между ними $\Rightarrow AI = QI$, аналогично.

$\angle ABI = \angle PBQ \Rightarrow AI = QI \Rightarrow I -$



центр описанной окр. $\triangle APQ$. Рисунок $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma \Rightarrow \beta + 2\gamma = 90^\circ \Rightarrow \beta + \gamma = 45^\circ$.

$\angle BAP = 90^\circ - \frac{\angle ABP}{2} = 90^\circ - \beta$ (т.к. $\angle ABP = \pi/2$) \Rightarrow

$\angle PAC = 90^\circ - \angle BAP = \beta$. Аналогично, $\angle QAC = 90^\circ - \frac{\angle ACQ}{2} =$

$90^\circ - \gamma$ (т.к. $\angle ACQ = \pi/2$) $\Rightarrow \angle BAC = 90^\circ - \angle QAC = \gamma =$

$\angle QAP = 90^\circ - \angle BAC - \angle PAC = 90^\circ - \beta - \gamma = 45^\circ \Rightarrow$

$\angle QIP = 2\angle QAP = 90^\circ \Rightarrow D = I$ (т.к. I равноугольник)

тогда $\angle ABC : \angle QEP = 90^\circ$ и $PP = DQ$ (пересечения перпендикуляров к PQ и окружности с диаметром PQ по т.ч. противолежащие стороны $\angle B$ и $\angle A$). Тогда $\angle DCB = \frac{\angle ACB}{2} =$

$= \frac{90^\circ - \angle CBA}{2} = \frac{44^\circ}{2} = 22^\circ$.

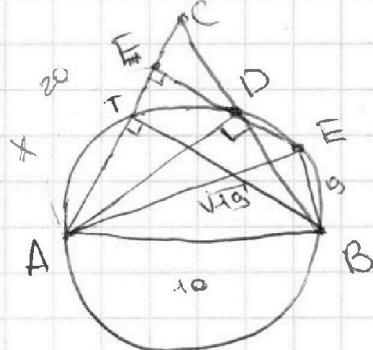
Ответ: 22° .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

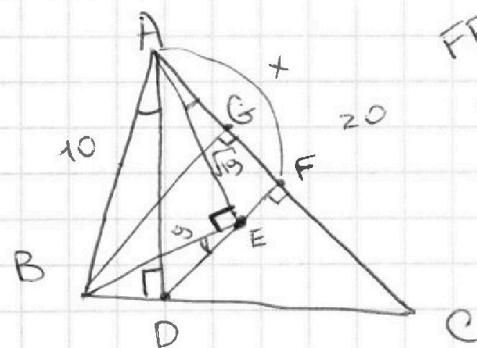
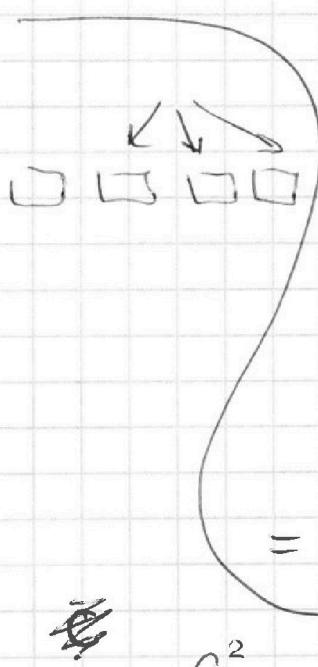
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AF \cdot AC}{AD} = \frac{AD}{?}$$



$$FE = \sqrt{19-x^2}$$

$$FD \cdot FE = FA \cdot GF$$

$$\frac{GF}{BD} = \frac{CO}{EC}$$

$$GF = \frac{CO}{EC} \cdot BD$$

$$GF = \frac{FC}{FD} \cdot \frac{BD}{CO}$$

$$\frac{FE}{FA} = \frac{BD}{AD}$$

$$\frac{\sqrt{19}}{x} = \frac{9}{DF}$$

$$\frac{\sqrt{19}}{x} = \frac{9}{\sqrt{x(20-x)}}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-5)x^2} = \frac{81}{x(20-x)}$$

6!

$$\dots \frac{9!}{(n-6)(n-7)(n-8) \dots 3} \cdot 20x - 19x^2 = 81x^2$$

$$19 \cdot 20x = 100x^2$$

$$19 = 5x \Rightarrow x = \frac{19}{5}$$

~~$$\frac{C_n^2}{C_n^5}$$~~

~~$$\frac{C_n^6}{C_n^9}$$~~

~~$$\frac{C_n^6}{C_n^9}$$~~

~~$$\frac{C_n^6}{C_n^9}$$~~

~~$$\frac{C_n^2}{C_n^5}$$~~

~~$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!x^2}$$~~

~~$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!x^2}$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

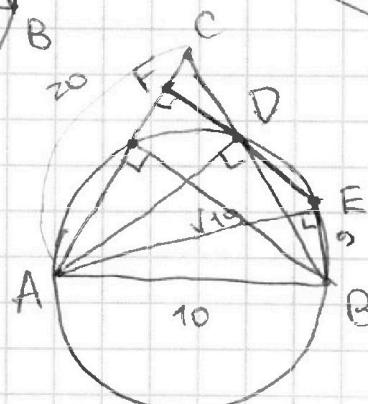
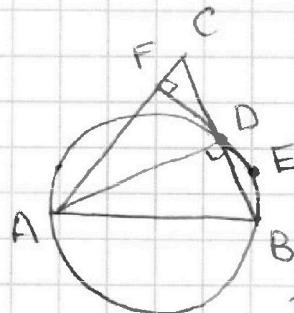
$$\begin{aligned} xy + z = & z^3 - 6z^2 = x^3 - 6x^2 = y^3 - 6y^2 \\ & \cancel{x+y+z} \\ (xy+zy+zx) &= 6 \\ xy+yz+xz &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

$$36 - 12 \cdot 6 + 36 \cdot 3 =$$

$$= 36(1 - 2 + 3) = 2 \cdot 36 = 72.$$

$$\begin{aligned} n &= \overbrace{99\dots9}^{20001} = 10^{20001} - 1 \\ n^3 &= (10^{20001} - 1)^3 = \\ 10^{60003} &> 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1 > 10^{60002} \\ 3 \cdot 10^{40002} &\rightarrow 3 \cdot 10^{20001} ? \quad \cancel{+10^{20001}} \\ 10^{20001} - 1 &> 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$



$$AE = \sqrt{19}$$

$$\begin{aligned} 10^{20001} - 3 &> 10^{20000} \\ 10^{20000} (10 - 1) &> 3. \end{aligned}$$

$$3 \cdot 10^{20001}$$

$$3 \cdot (10^{40002} - 1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

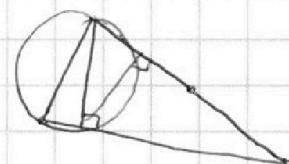
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \cancel{100\ldots0} - \cancel{30\ldots0} + \cancel{300\ldots0} - 1 \\ 60003 \quad 40002 \quad 20001 \end{array}$$

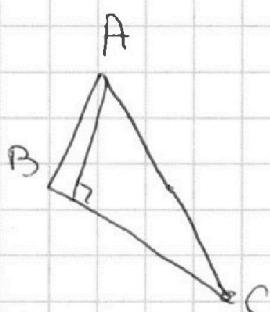
3 $\xrightarrow[5 \rightarrow 9]{//}$ одно и тоже
 $10^{20001} (10^{40002} -$

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + (a^2 - 6a + 4) = 0.$$

$$a_6 \quad a_7$$



$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - (2a^3 - 6a - 15) = 0.$$



$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \rightarrow a = 0$$

$$5a - \cancel{a^3} = a^2 - 4a$$

$$a^2 - 9a + \cancel{4a} = 0 \rightarrow a = 4$$

$$(a-4)(a-5) = 0 \rightarrow a = 5$$

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8$$

~~$|y-x|+|y+x| \leq 8$~~

1) $y - 20 \geq \frac{x}{2\sqrt{3}}, -\frac{x}{2\sqrt{3}} \leq y \leq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$

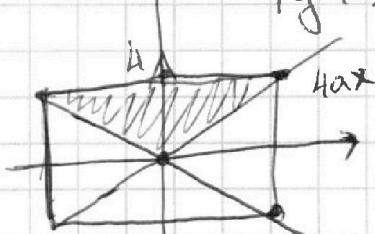
$$a > 0$$

$$2y - 40 \leq 8 \quad y \leq 24$$

$$|x| \leq 2\sqrt{3}(y-20)$$

$$|y + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8$$

$$\begin{cases} y \geq |\alpha x| \\ |\alpha x| \leq y \leq 4 \end{cases}$$



$$\begin{array}{l} y = ax \\ y = -ax \end{array}$$

$$-\alpha x \geq y \geq \alpha x \quad x < 0$$

$$-2\alpha x \leq 8$$

$$-\alpha x \leq 4$$

$$0 \geq x \geq -\frac{4}{\alpha}$$

$$\alpha x \geq y \geq -\alpha x \quad x \geq 0$$

$$2\alpha x \leq 8 \quad x \leq \frac{4}{\alpha}$$

$$\frac{4}{\alpha} \geq x \geq 0$$

$$-|\alpha x| \geq y \geq -4 \quad \begin{array}{l} y < |\alpha x| \\ y < -|\alpha x| \end{array}$$

$$-2y \leq 8$$

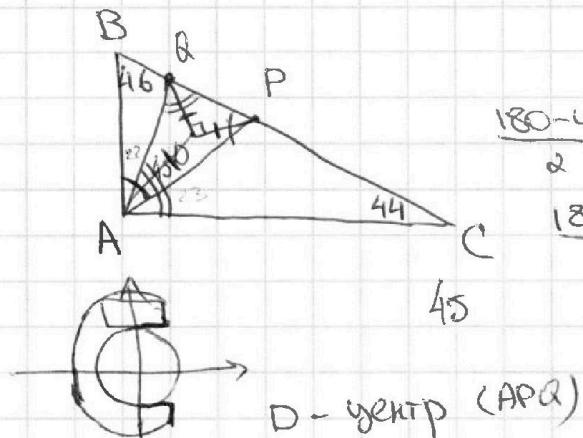


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

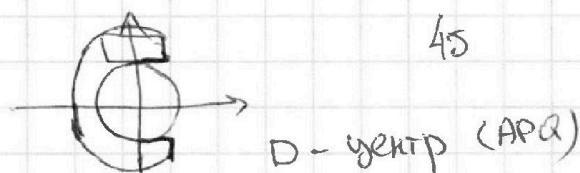
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

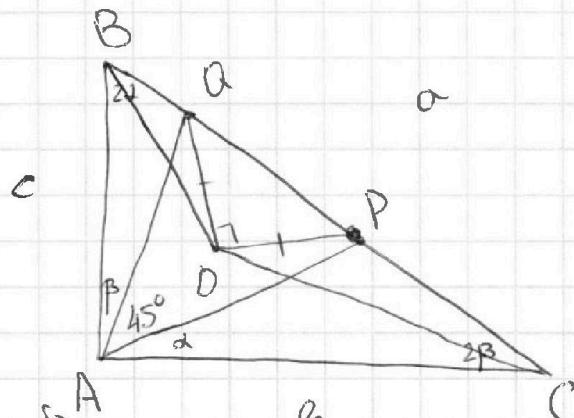


$$\frac{180 - 44}{2} = 90 - 22 = 68$$

$$\frac{180 - 46}{2} = 90 - 23 = 67$$



D - центр (APQ)



$$r = p-a = \frac{b+c-a}{2}$$

$$PQ = b+c-a \quad 14$$

D - центр

$$a_6 = \frac{15 - \frac{5\sqrt{29}}{3} + \frac{5\sqrt{29}}{3}}{6} = \frac{15 + 10\sqrt{29}}{6}$$

a, 4d

7d x

~~$$\tan \alpha = \frac{8\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{3}, 128+64=192$$~~

$$\frac{576}{207}$$

$$192+576 = x^2 = \frac{207}{15}$$

$$= 768$$

$$-256 \quad 128+24=152$$

$$\frac{512}{512}$$

$$3d=4 \quad d=\frac{4}{3}$$

$$25-30+4 \quad d=-\frac{4}{3}$$

$$25+4 \cdot 59 = 25+200+36 = 261 = 9 \cdot 29$$

$$\frac{5-3\sqrt{29}}{2} = a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_1 = \frac{5-11\sqrt{29}}{2}$$

$$\sqrt{29} = 3d \Rightarrow \frac{4\sqrt{29}}{3}$$

$$d = \frac{\sqrt{29}}{3}$$

$$a_1 = \frac{5+\sqrt{29}}{2} - \frac{4\sqrt{29}}{3} = \frac{15-5\sqrt{29}}{6}$$

$$a_1 + \frac{4\sqrt{29}}{3} = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$$

$$a_1 = \frac{15-3\sqrt{29}+8\sqrt{29}}{6} = \frac{15-11\sqrt{29}}{6}$$