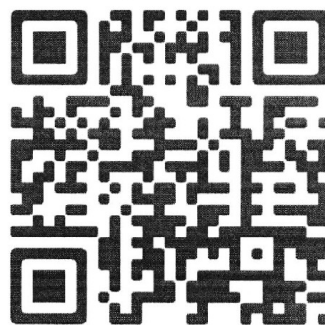




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x, y, z \neq 0$ - по условию

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \quad (<2) \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = z(3+z) \\ yz = x(3+x) \\ zx = y(3+y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} (<2) \quad & \begin{cases} (x+3)^2 = \left(\frac{yz}{x}\right)^2 \\ (y+3)^2 = \left(\frac{zx}{y}\right)^2 \\ (z+3)^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = \\ & = \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2 = \\ & = \frac{y^4 z^4 + z^4 x^4 + x^4 y^4}{x^2 y^2 z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \quad (<2) \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - zx = 3(z-y) + (z-y)(z+y) \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow -x(z-y) = (z-y)(3+z+y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-y=0 \\ -x=3+z+y \\ yz=3x+x^2 \\ zx=3y+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=y \\ z^2=x(3+x) \\ zx=3z+z^2 \\ x=-(3+z+y) \\ yz=-y-3z-y+(3+z+y)(3+z+y) \\ -3z-z^2-z^2=3y+y^2 \end{cases} \quad (<2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=y \\ z=\sqrt{x(3+x)} \\ z(x-3-z)=0 \\ x=-(3+z+y) \\ yz=-y-3z-y+9+3z+3y+3z+z^2+zy+3y+zy+y^2 \\ y^2+3y+3z+zy+z^2=0 \end{cases} \quad (<2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} z=y \\ z=\sqrt{x(3+x)} \\ \bar{z}=0 \text{ — не подходит} \\ x-3-\sqrt{x(3+x)}=0 \\ x=-3-z-y \\ yz=5y+3z+2zy+z^2+y^2 \\ y^2+z^2+zy+3y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=y \\ z=\sqrt{x(3+x)} \\ x^2-6x+9=\cancel{3x}+x^2 \\ x=-3-z-y \\ z^2+y^2=-(5y+3z+zy) \\ y^2+z^2+zy+3y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=y \\ z=\sqrt{x(3+x)} \\ 9x=9 \\ x=-3-z-y \\ z^2+y^2=-(5y+3z+zy) \\ -5y-3z-zy+zy+3y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=y \\ x=1 \\ z=\sqrt{1 \cdot 4} \\ x=-3-z-y \\ z^2+y^2=-(5y+3z+zy) \\ -2y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=2 \\ y=2 \\ x=-3-z-y \\ z^2+y^2=-(5y+3z+zy) \\ y=0 \text{ — не подходит} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = (1+3)^2 + (2+3)^2 + (2+3)^2 =$$

$$= 4^2 + 5^2 + 5^2 = 16 + 25 + 25 = 66$$

Ответ: 66



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Построим, что произойдет при возведении n в квадрат

$$n = \underbrace{9999 \dots 9}_{40\,000}$$

Найдем закономерность.

$$\begin{array}{r} \dots 9999 \\ \times \dots 9999 \\ \hline 8 \dots 99991 \\ + 8 \dots 999910 \\ + 8 \dots 9999100 \\ \vdots \end{array}$$

$$\underbrace{878 \dots 87878}_{40\,000} \dots 000001 = n_1$$

Умножим n_1 на n :

$$n_1 = \underbrace{878 \dots 878}_{40\,000} \dots 1$$

на n расч 40000 девятка

$$\begin{array}{r} \times \dots 8787878 \\ \dots 9999999 \\ \hline 99999992 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times \dots 8787878 \\ \dots 9999999 \\ \hline 7 \dots 090902 \\ \dots 7 \dots 909020 \\ 7 \dots 9090200 \end{array}$$

8787...87877222 - на одна девятка

Ответ: 40 000 девятка



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$AB = 6$ - диаметр ω

$DF \perp AC$

$AC = 10$

$BE = 5$

D и E - касан на ω (по условию)

Найти AF

Решение

AB - диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$

ω - окружность $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DEA = \angle DBA$

$DF \perp AC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DFA = 90^\circ$

Рассмотрим $\triangle AEB$ - прямоугольный:

По теореме Пифагора:

$AB^2 = EB^2 + AE^2 \Rightarrow AE = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$

Рассмотрим $\triangle AFE$ и $\triangle ADB$:

$\angle FEA = \angle DBA$ (доказано выше)

$\angle AFE = \angle ADB$ (доказано выше)

$\triangle AFE \sim \triangle ADB \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$

$\angle EFA = \angle BDA$ (доказано выше)

$\angle FEA = \angle DBA$ (доказано выше)

$\triangle FEA \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$

$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{11}}{6} AD \Rightarrow AD = AF \cdot \frac{6}{\sqrt{11}}$

Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle DCF$:

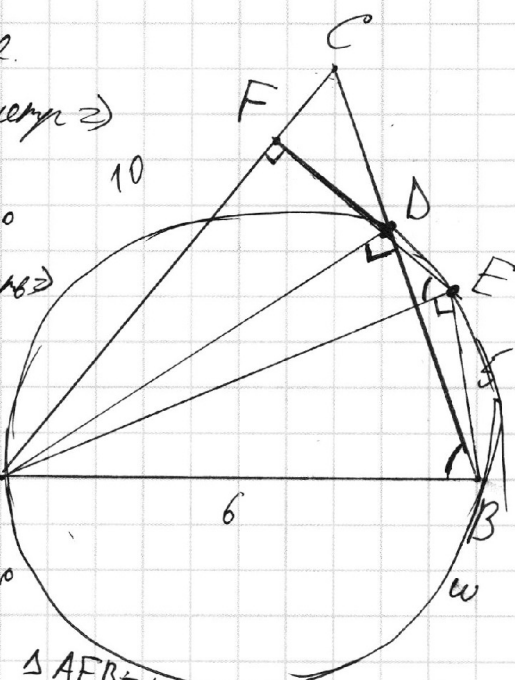
$\angle C$ - общий

$\angle ADC = \angle DFC = 90^\circ$

$\triangle DFC \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{CF}{DC} = \frac{FD}{AD} = \frac{CD}{AC}$

$\Rightarrow \frac{CF}{DC} = \frac{FD}{AD} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow CD = \sqrt{AC \cdot CF} = \sqrt{AC(AC - AF)}$

$CD = AC \cdot \frac{FD}{AD}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим $\triangle AFD$ - прямоугольный

$AD = \frac{6}{\sqrt{11}} AF$ По теореме Пифагора:

$$FD^2 + AF^2 = AD^2 \Rightarrow FD = \sqrt{\frac{36}{11} AF^2 - AF^2} = AF \sqrt{\frac{25}{11}} = AF \cdot 5 \sqrt{\frac{1}{11}}$$

$$CD = \sqrt{AC(AC - AF)} = AC \cdot \frac{FD}{AD} = AC \cdot \frac{AF \cdot 5 \sqrt{\frac{1}{11}}}{AF \cdot \frac{6}{\sqrt{11}}} = AC \cdot \sqrt{\frac{\frac{25}{11}}{\frac{36}{11}}} = AC \cdot \frac{5}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC(AC - AF) = AC^2 \cdot \frac{25}{36} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - AF = AC \cdot \frac{25}{36} \Rightarrow AF = \frac{11}{36} AC = \frac{11}{36} \cdot 10^5 =$$

$$= \frac{55}{18} = 3 \frac{1}{18}$$

Ответ: $3 \frac{1}{18}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в мешке n - шаров

1) Найдем положительные исходы при 5 открытых шариках:

a - исходы; $b=5$ - кол-во шаров, $c=3$ - три шарика с шариками

$$a = \frac{b!}{c!(b-c)!}$$

Количество всех исходов d выбрать b шаров:

$$d = \frac{n!}{b!(n-b)!}$$

Значит вероятность выигрыша при $b=5$ при 5 шариках:

$$A = \frac{a}{d} = \frac{b! \cdot b!(n-b)!}{c! \cdot (b-c)! \cdot n!} = \frac{5! \cdot 5!(n-5)!}{3! \cdot 2! \cdot n!}$$

2) Найдем положительные исходы при 6 открытых шариках:

a_2 - исходы; $b_2=6$ - кол-во шаров, $c=3$ - три шарика с шариками

$$a_2 = \frac{b_2!}{c!(b_2-c)!}$$

Количество всех исходов d_2 выбрать b_2 шаров:

$$d_2 = \frac{n!}{b_2!(n-b_2)!}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$~~

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \text{ имеет корни } x_1 \text{ и } x_2$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \text{ имеет корни } x_3 \text{ и } x_4$$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - a \\ x_1 \cdot x_2 = a - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{4} \\ x_3 \cdot x_4 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \end{cases}$$

Пусть x_3 — первый член прогрессии с шагом d $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2d \\ x_2 = x_3 + 3d \\ x_4 = x_3 + 5d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 2x_3 + 5d \\ a - 5 = (x_3 + 2d)(x_3 + 3d) \\ \frac{a^3 - a^2}{4} = 2x_3 + 5d \\ \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} = (x_3 + 5d)x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(a^2 - 1) = \frac{a^2}{4}(a - 1) \\ a - 5 = x_3^2 + 3dx_3 + 2dx_3 + 6d^2 \\ \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} = x_3^2 + 5dx_3 \\ a^2 - a = 2x_3 + 5d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 0 \\ a = 4 \\ a - 5 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} + 6d^2 \\ a^2 - a = 2x_3 + 5d \\ \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} = x_3^2 + 5dx_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ 6d^2 = 1 - 4 + \frac{1}{4} = -2\frac{3}{4} - \text{не может быть, т.к. } 6d^2 \geq 0 \\ a = 0 \\ 6d^2 = -5 + 1 = -4 - \text{не может быть, т.к. } 6d^2 \geq 0 \\ a = 4 \\ 6d^2 = 4 - 5 - \frac{2 \cdot 4^2 \cdot (4^2 + 1 - 4^4) - 4}{4} = -1 - 8 \cdot (16 + 1 - 256) + 1 \neq \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a=4 \\ 6a^2 = -8 \cdot (-239) = 8 \cdot 239 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{подходит} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a=4$$

Ответ: 4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$$AB = BP$$

$$AC = CQ$$

$$\angle A = 90^\circ$$

$$DP = DQ$$

$$\angle PDQ = 90^\circ$$

$$\angle DCB = 20^\circ$$

Найти: $\angle DBC$

Решение.

Q будет лежать
между B и P, т.к.

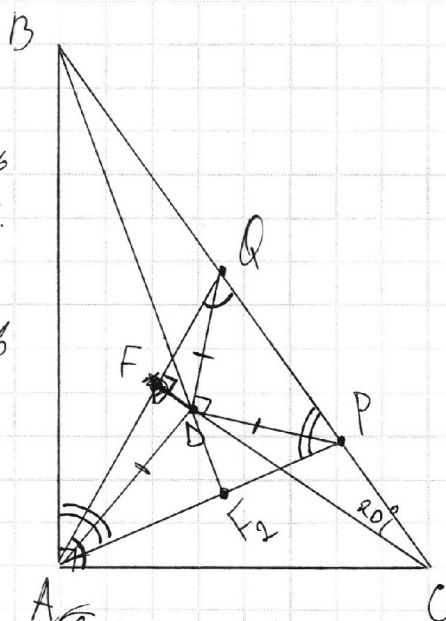
$$AC + AB > BC \text{ для}$$

всех треугольников

$$AP + CQ > BC$$

$$AB = BP$$

$$CQ = AC$$



$\Rightarrow \triangle BAP$ и $\triangle AQC$ - равнобедренные $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BAP = \angle APB; \angle CAQ = \angle AQC.$$

Рассмотрим $\triangle AQP$:

$$\begin{cases} \angle BAP + \angle CAQ - \angle PAQ = \angle A \\ \angle CQA + \angle QPA + \angle PAQ = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\angle PAQ = 180^\circ - \angle A = 90^\circ \Rightarrow \angle PAQ = 45^\circ$$

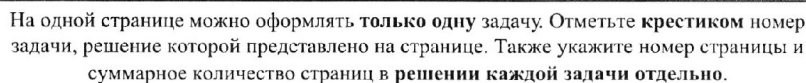
$$\text{Таким образом } QD = DP; \angle QDP = 90^\circ = 2\angle PAQ$$

$\Rightarrow D$ - центр описанной окружности $\triangle AQP \Rightarrow$

$$\Rightarrow AD = DQ = DP$$

Рассмотрим $\triangle AQC$ - равнобедренный:

$AD = QD$ (доказано ранее) $\Rightarrow D$ лежит на серединном перпендикуляре к стороне AQ . Аналогично C лежит на серединном перпендикуляре к стороне $AQ \Rightarrow$ Отрезок CD лежит на серединном перпендикуляре к стороне $AQ \Rightarrow$ Прямая CD до CF (F - пересечение



7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$CD \perp CQ \Rightarrow CF$ - ~~линия~~ середина перпендикуляр в равнобедренном $\triangle CAQ \Rightarrow$
 $\Rightarrow CF$ - высота $\Rightarrow \angle C = 2\angle DCQ = 90^\circ$

Рассмотрим $\triangle ABC$:

$\angle A = 90^\circ$
 $\angle C = 40^\circ$

} $\Rightarrow$ по сумме углов в прямоугольном треугольнике $\angle B = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

Вспомогательным для $\triangle CAQ$ рассуждениями
получим: BF_2 - делящаяся в $\triangle BAP$
(F_2 - пересечение BD и AP) $\Rightarrow$ ~~BF_2~~

$$\Rightarrow \angle DBC = \frac{1}{2} \angle B = 25^\circ$$

Ombem: 25°

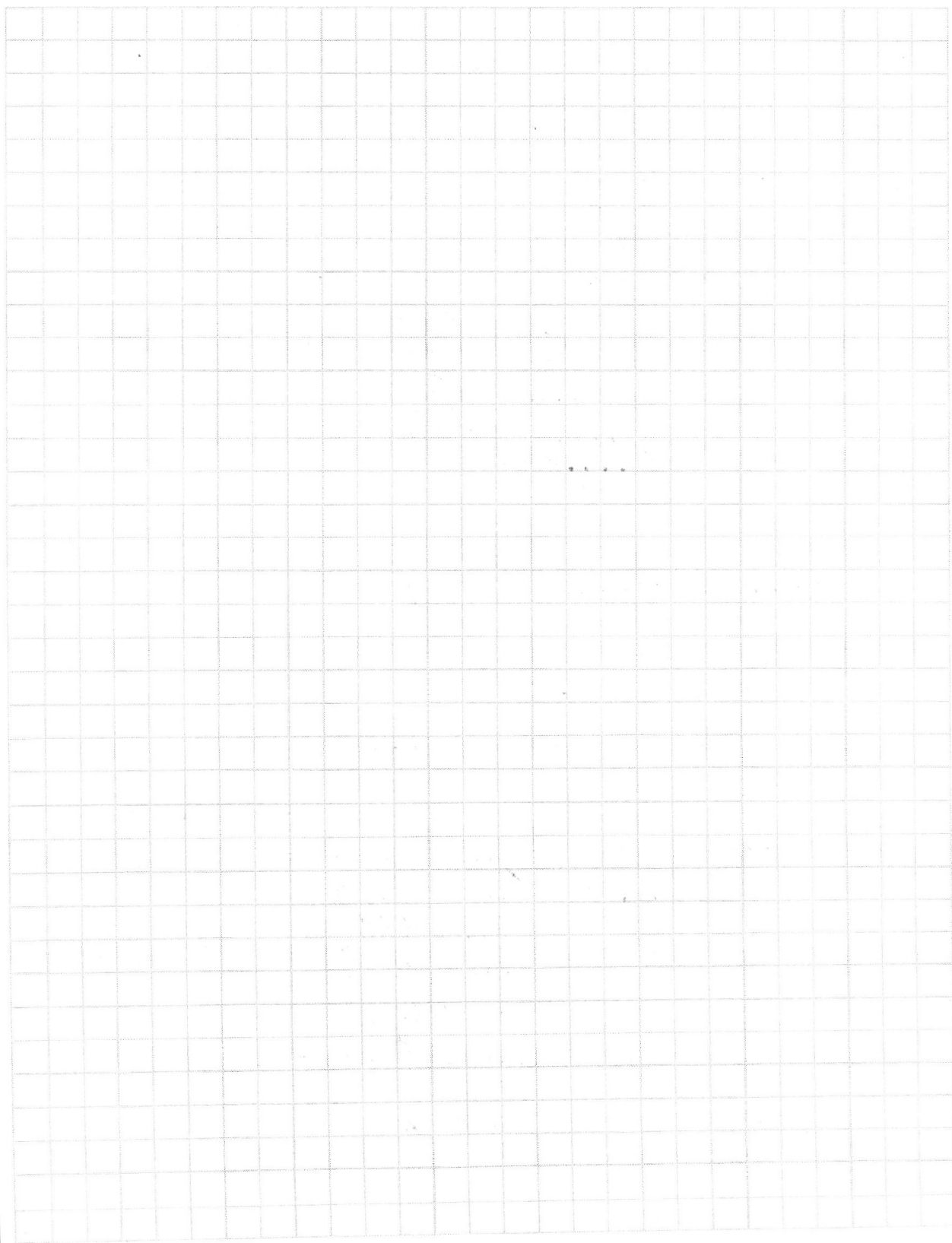


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Знаем вероятность выигрыша при $b_2 = 6$ — при 6 попытках:

$$A_2 = \frac{a_2}{d_2} = \frac{b_2! \cdot b_2! \cdot (n - b_2)!}{c! \cdot (b_2 - c)! \cdot n!} = \frac{6! \cdot 6! \cdot (n - 6)!}{3! \cdot 3! \cdot n!}$$

Найдем во сколько увеличилась вероятность:

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A} &= \frac{6! \cdot 6! \cdot (n - 6)!}{3! \cdot 3! \cdot n!} \cdot \frac{3! \cdot 2! \cdot n!}{5! \cdot 5! \cdot (n - 5)!} = \\ &= \frac{6 \cdot 6^2 \cdot (n - 6)!}{3 \cdot (n - 5)!} = \frac{12}{n - 5} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{12}{n - 5}$ n -кратно во сколько в игре



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$$AB=BP$$

$$AC=CQ$$

$$\angle A=90^\circ$$

$$DP \perp DQ$$

$$\angle PDQ=90^\circ$$

$$\angle DCB=20^\circ$$

Найти: $\angle DBC$

Решение.

Q будет лежать
между B и P, т.к.

$AC+AB > BC$ для всех
треугольников $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AP + AC > BC.$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 =$$

$$= BP^2 + CQ^2 = (BP + CQ - QP)^2 =$$

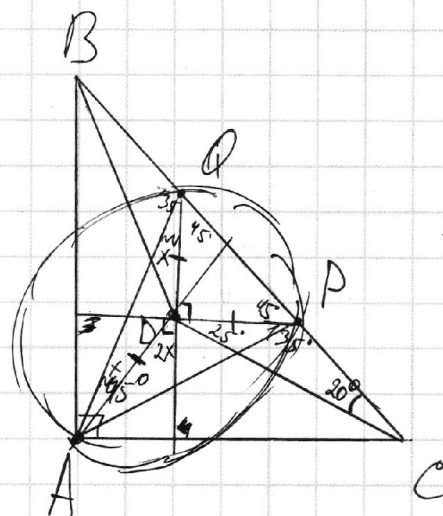
$$\Rightarrow BP^2 + BP \cdot CQ - QP \cdot BP + CQ^2 + BP \cdot CQ - CQ \cdot QP -$$

$$- QP \cdot BP - CQ \cdot QP + QP^2 = BP^2 + CQ^2$$

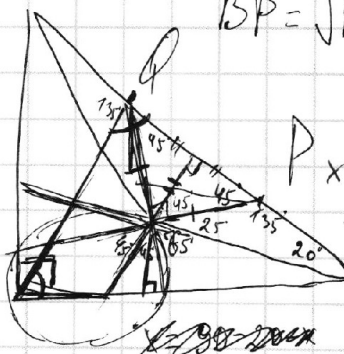
$$BP \cdot CQ - CQ \cdot QP + QP^2 = 0$$

$$CQ = \sqrt{BC^2 - QP^2}$$

$$BP = \sqrt{BC^2 - QP^2}$$



$$\begin{array}{r} \times 878 \\ 999 \\ \hline 7902 \\ 7902 \\ \hline 7902 \\ 867122 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \times 87878 \\ 99999 \\ \hline 790902 \\ 790902 \\ \hline 790902 \\ 790902 \\ \hline 8787712122 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 999 \\ 999 \\ \hline 999991 \\ 999991 \\ \hline 999991 \\ 0001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 999 \\ 999 \\ \hline 8991 \\ 8991 \\ \hline 8991 \\ 878001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 87878 \\ 99999 \\ \hline 790902 \\ 790902 \\ \hline 790902 \\ 790902 \\ \hline 8787712122 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

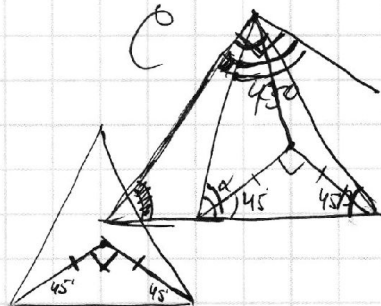
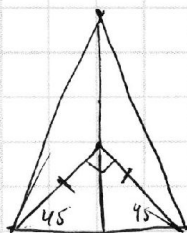
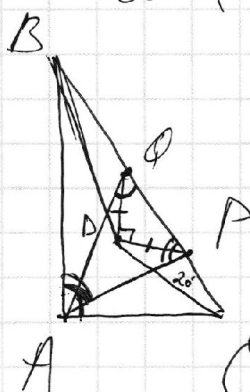
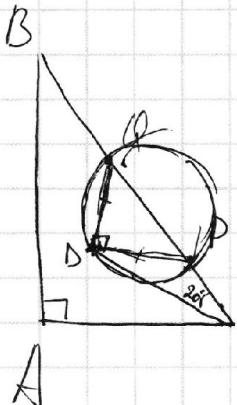
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$



$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$D = (a^2 - a)^2 + 20 - 4a =$$

$$= \cancel{a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20}$$

$$b \quad b+c$$

$$\cancel{2b+c} \quad \cancel{a^2+a}$$

$$\cancel{b^2+c^2} \quad \cancel{a-b}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$\begin{aligned} a_3 \quad d \quad \begin{cases} 2a_3 + 5d = a^2 - a \\ (a_3 + 2d)(a_3 + 3d) = a - 5 \end{cases} \\ a_3 + 2d \\ a_3 + 3d \\ a_3 + 5d \quad \begin{cases} 2a_3 + 5d = \frac{a^3 - a^2}{4} \\ (a_3 + 5d)a_3 = \frac{2a^2 - a^2 - 4}{4} \end{cases} \\ a(a-1) = \frac{a^2 - a - 4}{4} \end{aligned}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta - \gamma = 90^\circ$$

$$\gamma + \gamma = 90^\circ$$

$$\gamma = 45^\circ$$

$$\begin{cases} a=1 \\ a=0 \\ a=4 \end{cases}$$