



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Умножу на второе~~ Выведу из первого уравнения
второе: $xy - yz = -6(2-x) + (2^2 - x^2)$

$$y(x-z) = 6 \frac{(x-z)}{x-z} - (x-z)(x+2)$$

$$(x-z)(y+x+2-6)=0$$

Т.е. или $x=z$, или $x+y+2=6$

~~Пусть $x=z$~~ ~~Т.к. это верно~~

Пусть $x=z$:

$$\begin{cases} xy = -6x + x^2 \\ yx = -6x + x^2 \xrightarrow{\text{Т.к. } x \neq 0} y = -6 + x \\ x^2 = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$y+6=x$$

$$(y+6)^2 = -6y + y^2$$

$$y^2 + 12y + 36 = -6y + y^2$$

$$18y + 36 = 0$$

$$y = -2$$

Тогда, т.к. $y+6=x$

$$x = 4$$

и т.д. $x=2$; $z=4$

$$\text{Итого: } (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 4 + 64 + 4 = 72$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $x \neq z$, то $(x+y+z)=6$

Все уравнения все равно делим на 2:

$$\begin{cases} 2xy = -12z + 12z^2 \\ 2yz = -2x + 2x^2 \\ 2zx = -12y + 2y^2 \end{cases}$$

И, теперь сложим их все $2(xy+yz+zx) = -12(x+y+z) +$
 $+2(x^2+y^2+z^2)$

Прибавим $x^2+y^2+z^2$ к с обеих сторон:

$$x^2+y^2+z^2 + 2(xy+yz+zx) = -12 \cdot (x+y+z) + 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$(x+y+z)^2 = -12 \cdot (x+y+z) + 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$\text{т.к. } x+y+z=6$$

$$36 = -72 + 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$x^2+y^2+z^2 = 36$$

$$\begin{aligned} \text{т.к. } x+y+z=6 \quad (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 &= \\ = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 &= \\ = (x+y+z)^2 + (x^2+y^2+z^2) &= 72 \end{aligned}$$

$\parallel \qquad \qquad \parallel$
 $6 \qquad \qquad 36$

Ответ: 72



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 10^{20001} - 1$$

$$n^3 = \left(10^{20001} - 1\right)^3 = 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1 =$$

$$= \left(10^{60003} - 1\right) - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} =$$

$$= \underbrace{9 \dots 99}_{20001} \underbrace{79 \dots 0029}_{20002} \underbrace{999}_{20000}$$

Итого 40 001 гигабайт

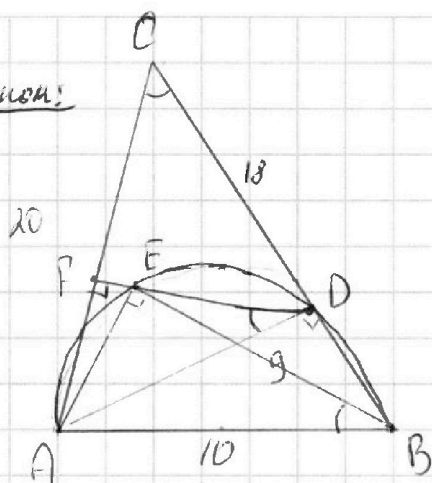


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рисунок:



$$\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ, \text{ т.к.}$$

это углы, опирающиеся
на диаметр

$$\angle EBA = \angle FDA - \text{по св-ву} \\ \text{впис-го четырехуголь-} \\ \text{ника}$$

$$\angle FDC = 90^\circ - \angle FDA$$

$$\angle FCD = 90^\circ - \angle FDC = \angle FDA$$

$$\triangle ACD \sim \triangle AFD \sim \triangle AEB \sim \triangle CFD - \text{по 2м углам}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{EB}$$

$$CD = 18$$

$$\frac{CF}{CD} = \frac{EB}{AB}$$

$$\frac{18}{10} \cdot 9 = CF$$

$$FA = AC - CF = 20 - \frac{81}{5} = 16,2$$

$$= 20 - 16,2 = 3,8$$

Ответ: 3,8.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) 5 коробок открываются
Чтобы победить, игроку нужно выбрать 3 коробки с шариками и еще 2-е (когда открываются 5 коробок). Число способов это сделать $\rightarrow C_{n-3}^2$
Всего можно открыть коробки C_n^5 способами

2) 3 коробки открываются
Чтобы победить, игроку нужно выбрать 3 коробки с шариками и еще ~~3~~ 6. Число способов $\rightarrow C_{n-3}^6$

Всего можно выбрать коробки C_n^9 способами

$$\text{Вероятность в 1)} \quad P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)(n-4)}{2!}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}} = \frac{5!}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\text{Вероятность в 2)} \quad P_2 = \frac{C_{n-3}^6}{C_n^9} = \frac{\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{6!}}{\frac{n!}{(n-9)! 9!}} = \frac{9!}{6!} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{9!}{6!}}{\frac{5!}{2}} = \frac{9! \cdot 2}{6! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7}{5} = 8,4$$

Ответ: 8,4

~~Исч. что почти все неизвестно 2-й вариант $\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1}}{2a_1}$
тогда $(a_1 - a_2)$ поэтому почти $\frac{10}{a}$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|a_1 - a_2| = \frac{(a^2 - 4a)^2}{4}$$

Найду корни многочленов для каждого случая

$$a=0$$

$$1) x^2 - (0^2 - 4 \cdot 0)x + 0^2 - 6 \cdot 0 + 4 = 0$$

$$x^2 + 4 = 0 \text{ не имеет корней, т.к. } x^2 \geq 0 \forall x,$$

$$a x^2 + 4 > 0 \forall x$$

$$\text{т.е. } a \neq 0$$

$$a=4$$

$$1) x^2 - (4^2 - 4 \cdot 4)x + 4^2 - 6 \cdot 4 + 4 = 0$$

$$x^2 + 16 - 24 + 4 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$2) 5x^2 - (4^3 - 4 \cdot 4^2)x - 2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 167 = 0$$

$$x_{2,1} = \pm \sqrt{\frac{167}{5}}$$

то $-\sqrt{\frac{167}{5}}; -2; 2; \sqrt{\frac{167}{5}}$ — не арифм-а
прогрессия

$$a=5$$

$$1) x^2 - (5^2 - 4 \cdot 5)x + 5^2 - 6 \cdot 5 + 4 = 0$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$D = 25 + 4 = 29$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$2) \quad 5x^2 - (5^3 - 4 \cdot 5^2)x - 2 \cdot 5^3 - 6 \cdot 5 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 25x - 250 - 30 - 15 = 0$$

$$x^2 - 5x - 50 - 6 - 3 = 0$$

$$x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 59 = 261 = 9 \cdot 29$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{29}}{2}$$

$$A \quad \frac{5-3\sqrt{29}}{2}, \frac{5-\sqrt{29}}{2}, \frac{5+\sqrt{29}}{2}, \frac{5+3\sqrt{29}}{2} - \text{правда}$$

арифметическая прогрессия, при этом
не постоянная.

Получено 8 вариантов разл. от 120 до 800 и на

$$1\text{-й} \quad \frac{5-11\sqrt{29}}{2}$$

$$2\text{-й} \quad \frac{5-9\sqrt{29}}{2}$$

$$3\text{-й} \quad \frac{5-7\sqrt{29}}{2}$$

$$4\text{-й} \quad \frac{5-5\sqrt{29}}{2}$$

$$5\text{-й} \quad \frac{5-3\sqrt{29}}{2} \rightarrow b_1$$

$$6\text{-й} \quad \frac{5-\sqrt{29}}{2} \rightarrow a_1$$

$$7\text{-й} \quad \frac{5+\sqrt{29}}{2} \rightarrow a_2$$

$$8\text{-й} \quad \frac{5+3\sqrt{29}}{2} \rightarrow b_2$$



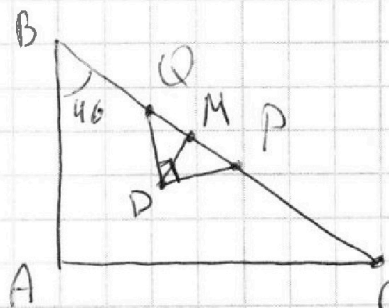
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. $\angle B > \angle C$, то

$AC > BA$

Т.е. $QP = AC - BA$
M - середина QP.

$\triangle QDP$ - р/б и прямоугольный

Т.е. $MD = \frac{QP}{2}$ т. медiana

к гипотенузы равна половине гипотенузы.

$DM \perp QP$, по св. б/у

р/б тр-уг.

$$AC = BA \cdot \tan \angle B = BA \cdot \tan 46^\circ$$

$$MD = \frac{AC - BA}{2} = \frac{BA \cdot \tan 46^\circ - BA}{2}$$

$$MC = QC - QP = AC - \frac{AC - BA}{2} = \frac{AC + BA}{2} =$$

$$= \frac{BA \cdot \tan 46^\circ + BA}{2}$$

$$\tan(\angle DCB) = \frac{MD}{MC} = \frac{\frac{BA \cdot \tan 46^\circ - BA}{2}}{\frac{BA \cdot \tan 46^\circ + BA}{2}} = \frac{\tan 46^\circ - 1}{\tan 46^\circ + 1} =$$

$$= \frac{\sin 46^\circ - \cos 46^\circ}{\sin 46^\circ + \cos 46^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 46^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 46^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 46^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 46^\circ} =$$

$$= \frac{\sin(46^\circ - 45^\circ)}{\sin(46^\circ + 45^\circ)} = \frac{\sin(1^\circ)}{\sin(91^\circ)} = \frac{\sin(1^\circ)}{\cos(1^\circ)} = \tan 1^\circ$$

Т.е. $\angle DCB = 1^\circ$

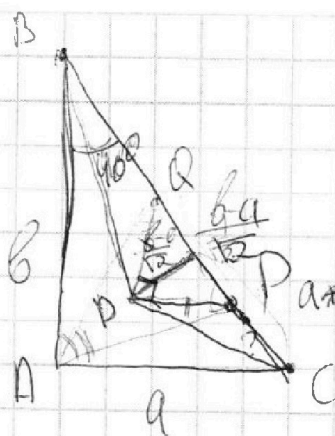


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

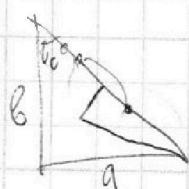
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{a-b}{2} = \frac{2a - (a-b)}{2} = \frac{2a - a + b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{2a - b\gamma}{2} = \frac{3a - b}{2} = \frac{b - \gamma}{2}$$



$$a - \frac{a-b}{2} = \frac{2a - a + b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$a \cdot b = \frac{a+b}{2} \cdot c$$

$$a = \frac{a+b}{2} \cdot c = \frac{3 \lg 46 - 1}{2} = \frac{\lg 46 - 1}{\lg 46 - 1} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3 \lg 46 - 1}{1 - \lg 46} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3 \lg 46 - 1}{1 - \lg 46}$$

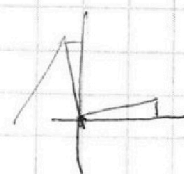
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3 \lg 46 - 1}{1 - \lg 46}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3 \lg 46 - 1}{\lg 46 - 1} = \frac{\sin 46 + \cos 46}{\sin 46 - \cos 46}$$

$$\frac{3 \sin 46 - 1}{\cos 46 - \sin 46} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin^2 24 \cos^2 24 = 1$$

$$\frac{\sin(91)}{\sin(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

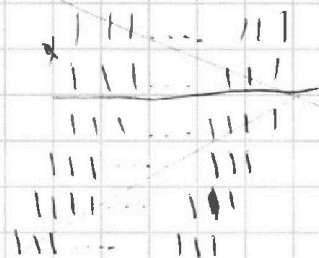
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Дугу укладывать по дуге. (классика 11Т.11Т)

$$\frac{111 \dots 111}{20001} = \frac{111 \dots 111}{20001}$$



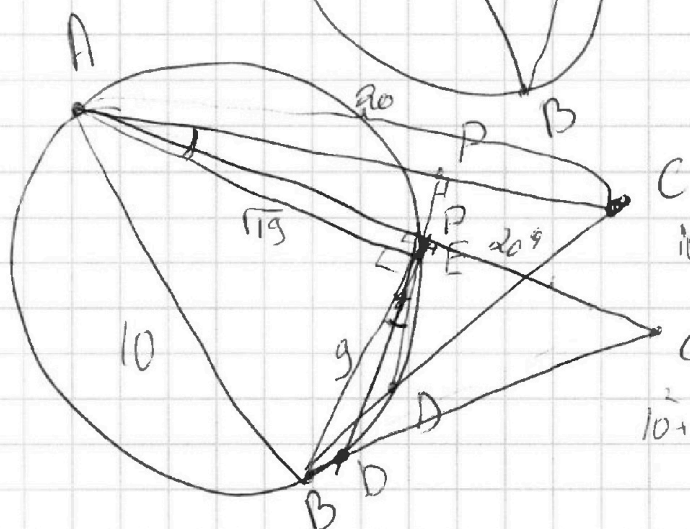
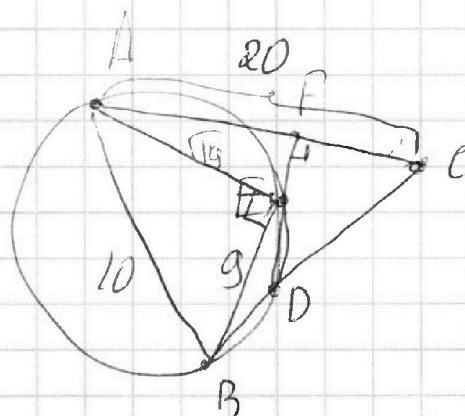
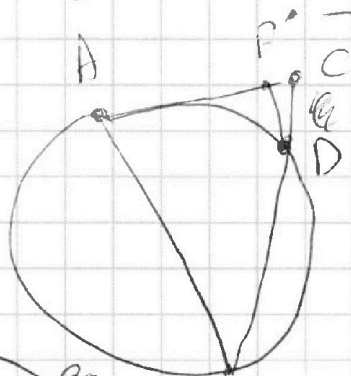
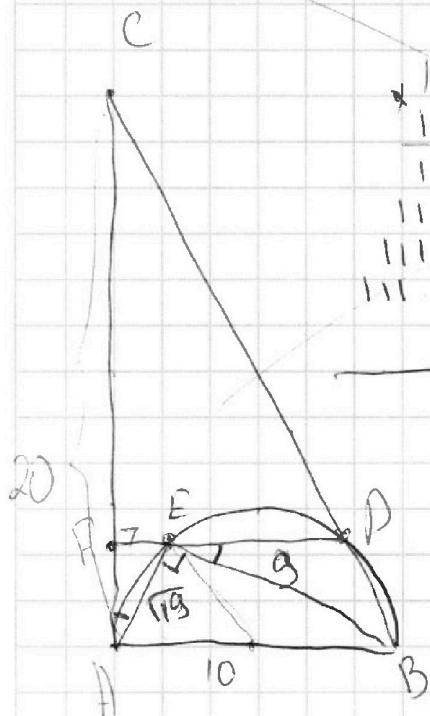
321

(23) (23)

4 - 5
3 - 7
2 - 9
1 - 11

$$3 \sqrt{x+1}^3$$

10



$$100 - 81 = 19$$

$$10^2 + 4^2 = 20^2$$

$$100 - 81 = 19$$

$$25$$

$$250$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 59 \\ \hline 236 \\ 25 \\ \hline 261 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☒2
☒3
☒4
☒5
☒6
☒7
☒СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$2xy = -12z + z^2$$

$$2xy + z^2 = -12z + 3z^2$$

$$\begin{cases} 2yz + x^2 = -12x + 3x^2 \\ 2zx + y^2 = -12y + 3y^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$z^2 + x^2 + y^2 + 2xy + 2yz +$$

$$+ 2zx = -12(x+y+z) + 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$(x+y+z)^2 = -12 \cdot 6 + 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$36 + 2 \cdot 36 = 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$36 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z-x)^2 =$$

$$= 2(x^2+y^2+z^2) + (x+y+z)^2 + (x^2+y^2+z^2)$$

$$36 = 36$$

$$729$$

$$72$$

$$9009$$

$$-1+k = -1+3 \cdot k - 3k^2 + k^3$$

$$729 \quad 16 = 12 + 4$$

$$-1 - 3+k - 3+k^3$$

$$-3 = -6 + 9$$

$$9 = 3 = x$$

$$99 \quad 5 \pm \sqrt{25}$$

$$-8 = -6 \cdot 4 + \frac{4^2}{16}$$

$$-8 = -24 + 16$$

$$16 = 8 + 8$$

$$-9 = -18 + 9$$

$$-9 = -18 + 9$$

$$9 = 18 + 9$$

$$12z + 36 = 0$$

$$z = -3$$

$$9 \quad (9+6 \cdot 1)$$

$$(6 \cdot 9) = 1$$

$$9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y(x-z) = -6(z-x) + 6(x-z) \cdot \frac{(x-z)(x+z)}{(x-z)}$$

$$(x-z)y + (x-z)(x+z) = 6(x-z)$$
$$(x-z)(y + x + z - 6) = 0$$

$$(x+y+z=6)$$

$$(x^2 - 6x + 36)$$

$$1000 \cdot 3 = 3000$$

$$4 \cdot 16.3 = 65.2$$

$$y^2 = -6xy + y^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(-6 \cdot 6 + z^2 + x^2 + y^2) - 72 + 4(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$xy + yz + zx + 36 \cdot 3 = 4 \cdot 36 + (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 2yz + z^2 + 2zx$$

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + (xy + yz + zx) = 36 + (x^2 + y^2 + z^2)$$
$$x^2 + y^2 + 2xy + z^2 + x^2 + 2zx + y^2 + z^2 + 2yz$$

$$3 \cdot 6 = xy + yz + zx + 6(x+y+z) = 36 + 72 + xy + yz + zx$$