МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D. Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω, отличная от D. Найдите AF, если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D, для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

$y(x-z) = 3(z-x) + (z-x)(z+x)$

$x = z$ или $-y = 3 + z + x$ $\quad z + x + y = -3$

$z(y-x) = 3(x-y) + (x-y)(x+y)$

$y = x$ или $z + x + y = -3$

$x(y-z) = 3(z-y) + (z-y)(z+y)$

$y = z$ или $x + y + z = -3$

$x = y = z$

$x^2 = 3x + x^2$ $\quad x=0\ y=0\ z=0$ – не подходит

$x = z$ $\quad z + x + y = -3$ $\quad 2x + y = -3$

$x^2 = (-3-2x)^2 + 3(-3-2x)$

$x^2 = 9 + 4x^2 + 12x - 9 - 6x$ $\quad 3x^2 + 6x = 0$

$x = 0$ $\quad x = -2$ $\quad (0; 0; -3)$

$z = 0$ $\quad z = -2$ $\quad (0; -3; 0)$

$y = -3$ $\quad y = 1$ $\quad (-3; 0; 0)$

– не подходит т.к. есть 0 $\quad$ – не подходит т.к. числа не должны быть 0.

Аналогично другие случаи не содержащие 0

Итоговые решения: $(-2; -2; 1)$ $(-2; 1; -2)$ $(1; -2; -2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Значение выражения

$(x+3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=(-2+3)^2+(-2+3)^2+(1+3)^2$

$=2+16=18$

Ответ: 18

$x=z$

$xy=3x+x^2 \quad x\neq 0$ $\cancel{(x+3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2}$

$y=3+x$

$x^2=3(3+x)+(3+x)^2$

$\cancel{x}^2=9+3x+9+x^2+6x$

$9x=-18 \quad x=-2$

$y=1 \quad z=-2$

$x+y+z=-3$

$z=-3-x-y$

$y(-3-x-y)=3x+x^2$

$x^2+y^2+3x+xy+3y=0$

$y^2+(x+3)y+3x+x^2=0$

~~[illegible]~~

Если $x\neq z\neq y$ – третье уравнение вырождается через два предыдущих ⇒ решений нет.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~№2~~

~~n девяток~~

~~n+2 цифры~~

~~8*8~~

~~9999~~
~~9999~~
~~9991~~

~~89...991~~
~~899 91~~

~~...999~~
~~...999~~
~~999~~

~~...999~~
~~...999~~
~~999~~

~~...999~~
~~...999~~
~~...9991~~
~~+ 89...9991~~
~~899...991~~
~~909 9901~~

~~909.9...9901~~
~~99 9999~~
~~09~~

№2

$\underbrace{99999\ldots9}_{n} = 10^n - 1$

$$\begin{array}{r} 99\ldots99970000 \\ +\ 99.9.. \\ \hline 99\ldots\underbrace{999}_{n}700\ldots\underbrace{999}_{n} \end{array}$$

$(10^n-1)^3 = 10^{3n} - 3\cdot10^{2n} + 10^n\cdot3 - 1$

$$\begin{array}{r} -\ 1000000000\ldots0 \\ 3000\ldots0 \\ +\ 100\ldots0 \\ -\ 1 \\ \hline 99999\ldots9 \end{array}$$

вычтем столбиком

$10^{3n} - 3\cdot10^{2n}$
$= 10^{2n}\cdot(10^n - 3)$

$10^n - 1 = \underbrace{99999\ldots9}_{n}$

$(10^n-1)^3 = (10^{3n} - 3\cdot10^{2n}) + (10^n - 1)$

2n−1 − девятка

$\underbrace{999999999}_{n}\underbrace{7000000}_{n}\underbrace{9\ldots999}_{n}$

$10^{3n} - 3\cdot10^{2n}$
$= \underbrace{99\ldots99}_{n-1\text{ число } 9}7000000$

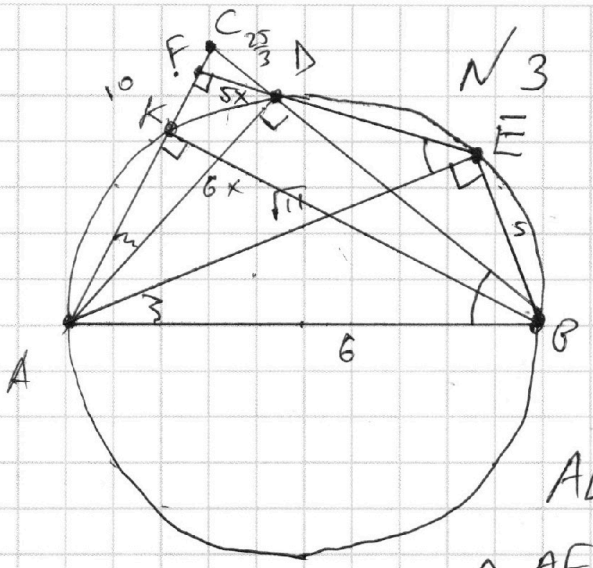
Ответ: $2n-1 = 79999$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



N 3

$\angle AEB = 90^\circ$

т.к AB – диаметр

$\angle ADB = 90^\circ$

т.к AB – диаметр

$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{11}$

$\triangle AFE \sim \triangle ADB$ т.к $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle AFE = 90^\circ$

$\angle ABD = \angle AED$ т.к опираются на одну дугу

$\angle CAE = \angle DAB$ по сумме углов т.к $\angle ABD = \angle AEC$

$\Rightarrow \angle FAD = \angle EAB \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle AEB$

т.к $\angle AFD = \angle AEB = 90^\circ$ $\angle FAD = \angle EAB$

$\frac{FD}{BE} = \frac{AF}{AE} = \frac{AD}{AB}$ $FD = 5x$, $AD = 6x$

из подобия $\triangle AFE$ и $\triangle ADB$

$\frac{6}{\sqrt{11}} = \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AF} = \frac{6}{\sqrt{11}}$

~~$\angle AKB = 90^\circ$ т.к опирается на диаметр~~

~~$\triangle BCD \sim \triangle$~~

$\triangle ACD \sim \triangle AEB$ т.к $\angle CAD = \angle EAB$

$\angle CDA = \angle AEB = 90^\circ$ $\frac{AC}{AB} = \frac{5}{3} = \frac{CD}{EB}$ $CD = \frac{25}{3}$

$FC = \sqrt{CD^2 - FD^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 - (5x)^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$AF = \sqrt{11}x$

$AF + FC = AC$

$10 = \sqrt{11}x + \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 - (5x)^2}$

$(10 - \sqrt{11}x)^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2 - (5x)^2$

$100 + 11x^2 - 20\sqrt{11}x = \left(\frac{25}{3}\right)^2 - 25x^2$

$36x^2 - 20\sqrt{11}x + \frac{100 \cdot 9 - 625}{9} = 0$

$36x^2 - 20\sqrt{11}x + \frac{275}{9} = 0$

$\begin{array}{r} 275 \\ \times\ 4 \\ \hline 1100 \end{array}$

$D = 20^2 \cdot 11 - 4 \cdot \frac{275}{9} \cdot 36 = 400 \cdot 11 - 4 \cdot 275 \cdot 4$

$= 4400 - 4400 = 0$

$\left(6x - \frac{10}{6}\sqrt{11}\right)^2 = 0$

$x = \frac{10\sqrt{11}}{36}$ $\quad AF = \sqrt{11} \cdot x = \frac{10 \cdot 11}{36} = \frac{5 \cdot 11}{18}$

$= \frac{55}{18}$

Ответ: $AF = \frac{55}{18}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

V – был в коробке X – не был в коробке.

n – коробок n−3 – пустые 3 – с шариком

1 открытие

вероятность, что при первом открытии

будет шарик: $\frac{3}{n}$

не будет шарика: $\frac{n-3}{n}$

2 открытие

был шарик в первом открытии, но нет во втором: $\frac{3}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1}$ VX

был шарик в первом и во втором: $\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1}$ VV

не был в первом, но есть во втором: $\frac{n-3}{n} \cdot \frac{2}{n-1}$ XV

не был не в первом, ни во втором: $\frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1}$ XX

3 открытие – V – был X – не был

VVV: $\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}$

VVX: $\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2}$

VXV: $\frac{3}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2}$

VXX: $\frac{3}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2}$

5 пустых коробок: $\frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} \cdot \frac{n-5}{n-2} \cdot \frac{n-6}{n-3} \cdot \frac{n-7}{n-4}$

4 пустых в 1 шарик: $\frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} \cdot \frac{n-5}{n-2} \cdot \frac{n-6}{n-3} \cdot \frac{3}{n-4}$

$+ \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} \cdot \frac{n-5}{n-2} \cdot \frac{3}{n-3} \cdot \frac{n-6}{n-4} + \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2}$

$\cdot \frac{n-5}{n-3} \cdot \frac{n-6}{n-4} + \frac{n-3}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-3} \cdot \frac{n-6}{n-4}$

$+ \frac{3}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-3} \cdot \frac{n-6}{n-4} = \frac{5(n-3)(n-5)(n-6)3}{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3 пустых и 2 шарика: $\frac{3}{n}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}+$

$\frac{3}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-3}\cdot\frac{2}{n-4}+\frac{3}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{2}{n-2}\cdot\frac{n-4}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}$

$+\frac{3}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\frac{2}{n-3}\cdot\frac{n-5}{n-4}+\ldots\ldots=\frac{6(n-5)}{n(n-1)(n-2)}\cdot 4!$

$=\frac{6(n-5)}{n(n-1)(n-2)}\cdot 2\cdot 3\cdot 4$

2 пустых и 3 шарика: $\frac{3}{n}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-3}\cdot\frac{n-4}{n-4}\cdot k$

одинаковых

k – кол-во расстановок 3 шариков в 5 клетках

$k=\frac{5\cdot4\cdot3}{3!}=10$ $\quad\frac{3}{(n)}\cdot\frac{2}{(n-1)}\cdot\frac{1}{(n-2)}\cdot 10=\frac{60}{n(n-1)(n-2)}=p_1$

– вероятность для 5

3 пустых и 3 шарика: $\frac{3}{n}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot k'$

k' – кол-во расстановок 3 одинаковых шариков в 6 клетках.

$\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}=5\cdot2\cdot2=20$

$p_2=\frac{3\cdot2\cdot20}{n(n-1)(n-2)}=\frac{120}{n(n-1)(n-2)}$ – вероятность для 6

$\frac{p_2}{p_1}=2$

Ответ: в 2 раза.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

$x^2-(a^2-a)x+a-5=0$

$x^2-\left(\frac{a^3-a^2}{4}\right)x+\frac{2a^4+2a^2-a^6-4}{4}=0$

$a_3=a_0+3d \quad a_5=a_0+5d$

$a_3=a_0+3d \quad a_6=a_0+6d$

$a_3+a_3=a_5+a_6$

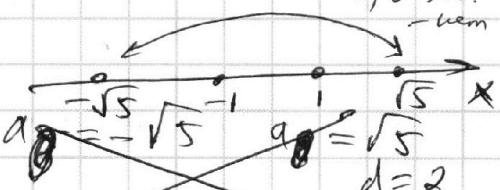
Т. Виета: $x^2+ax+b=0 \quad -a=x_1+x_2$

$a^2-a=\frac{a^3-a^2}{4}$

$(a^2-a)=\frac{(a^2-a)a}{4} \quad a^2-a=0 \quad \frac{a}{4}=1$

$a=0 \quad a=1 \quad a=4$

3, 3 эл. – нет



$x^2-5=0 \quad x=\pm\sqrt{5}$

$a_2=-\sqrt{5} \quad a_6=\sqrt{5}$

$d=2$

$4x^2-4=0 \quad x=\pm 1$

$a_3=-1 \quad a_3=1 \quad 1+2\cdot 2 \neq \sqrt{5}$

$d=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$a_2<a_6$ – нет.

– не подходит т.к не арифм. прогрессия

$a=0$ – нет

$x^2-4=0 \quad 4x^2-1=0$

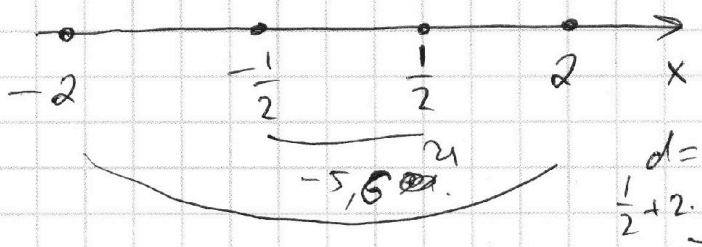
$x=\pm 2 \quad x=\pm\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$d=1$

$\frac{1}{2}+2\cdot 1 \neq 2$

$\Rightarrow$ не арифмет прогрессия

– не подходит т.к. 2, –2 – 5,6 элемент, а не 3 и 8 элемент. $a=1$ – не подходит

$a=4$

$x^2-12x-1=0 \qquad x=\frac{12\pm\sqrt{12^2+4}}{2}=6\pm\sqrt{6^2+1}=6\pm\sqrt{37}$

$4x^2-48x+2\cdot 4^4+2\cdot 4^2-4^6-4=0$

$x^2-12x+2\cdot 4^3+2\cdot 4^2-4^5-1=0$

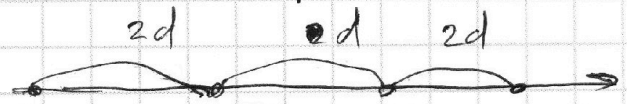
$x^2-12x+2\cdot 4^3-4^2\cdot 4^3+2\cdot 4^2-1=0$

$x^2-12x-14\cdot 4^3+2\cdot 4^2-1=0$

$x^2-12x-\boxed{829}=0$

$x=6\pm\sqrt{6^2+829}$

$=6\pm\sqrt{925}=6\pm 5\sqrt{37}$



– подходит $a=4$

Ответ: $a=4$

$4^2=64$

$4^3=$

$64\cdot 4=256$

896

$897-32=$

865

$2\cdot 4^4-4^6+2\cdot 4^2-4$

4

$2\cdot 4^3-4^5+2\cdot 4-1$

$=2^7-2^{10}+8-1$

$=128-1024+8-1$

$=-(1024-128-8+1)$

$=1024-128-8+1$

$=896-8+1=829$

$901 \mid 37$, -64, $361 \mid 29$

$1024-128$

$+8-$

$-1024-1\cdot 10$

1

$928 \mid 37$, -74, $185 \mid 25$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

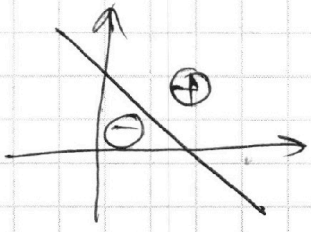
СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0$

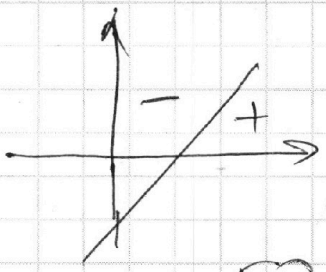
$y = \left(\frac{15}{2} - x\right) 6\sqrt{3}$

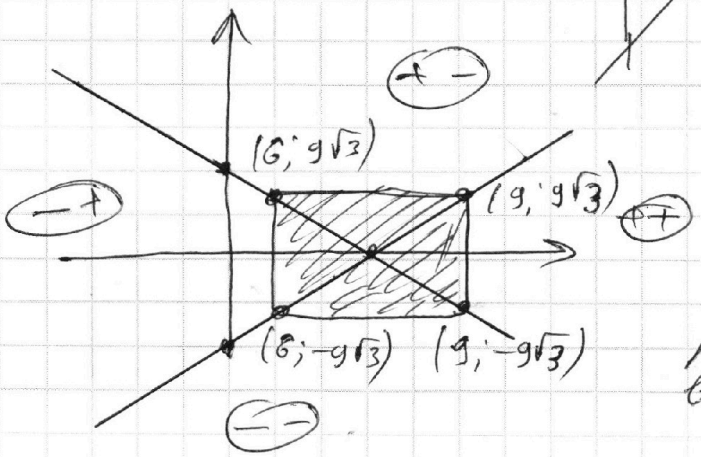


"+" значение

$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} > 0$ "−" < 0

$y = \left(x - \frac{15}{2}\right) 6\sqrt{3}$





(+ +) – оба модуля раскрываются с +

(+ −) – первый модуль раскрывается с +, второй с минус.

(+ +) $2x - 15 \le 3$ $x \le 9$ $\left(9 - \frac{15}{2}\right) \cdot 6\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

(+ −) $y \le 9\sqrt{3}$ $9\sqrt{3} = \left(x - \frac{15}{2}\right) 6\sqrt{3}$ $x = 9$

(− +) $y \ge -9\sqrt{3}$

(− −) $x \ge 6$ Полученная фигура – прямоугольник

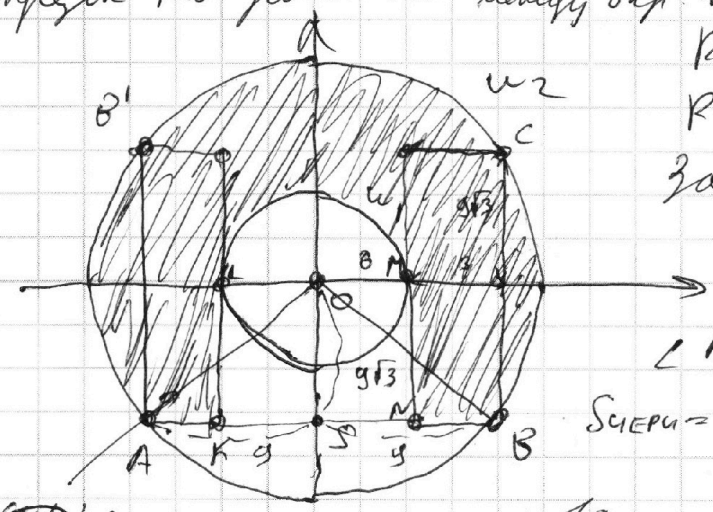
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

отрезок MB заметает между окр 1ск до LB' аналогично



$R_{\omega_1} = 6$ MC до LA

$R_{\omega_2} = 18$

Заметенная площадь - чёрным цветом.

$\angle AOB = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$S_{черн} = 18^2\pi - 6^2\frac{\pi}{2} - S_{KLMN} - S_{CEFM}$

фигура полученная поворотом Φ на π

Найдем площадь сегмента ~~фиг~~ ~~AB~~ ограниченного AB

$S_{CEFM} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 18^2 - S_{AOB} = \frac{18^2\pi}{6} - 81\sqrt{3}$

$S_{AOB} = 9 \cdot 9\sqrt{3} = 81\sqrt{3}$

$S_{черн} = 18^2 \cdot \pi - 6^2 \cdot \frac{\pi}{2} - 9\sqrt{3} \cdot 12 - S_{CEFM}$

$= \left(18^2 - \frac{6^2}{2}\right)\pi - 9\sqrt{3} \cdot 12 - \frac{18^2\pi}{6} + 81\sqrt{3}$

$= 306\pi - \frac{324}{6}\pi + \cancel{81\sqrt{3}} - \cancel{81\sqrt{3}} - 27\sqrt{3}$

$= 252\pi - 27\sqrt{3}$

Ответ: $252\pi - 27\sqrt{3} = 252\pi - 27\sqrt{3}$

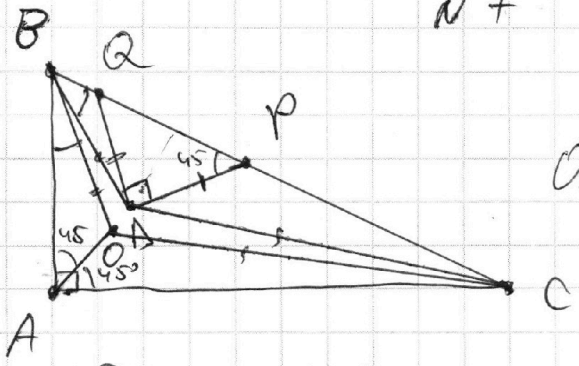
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7



$\angle DQP = \angle DPQ = 45°$

Отразим $\triangle BDP$ отн. биссектрисы угла B

$BP \to AB$ $D \to O$ $P \to A$ $AO = PD$

$\angle ABO = \angle PBD$ $\angle BAO = \angle DPB = 45° \Rightarrow \angle OAQ = 45°$

$\triangle ABO = \triangle BDP$

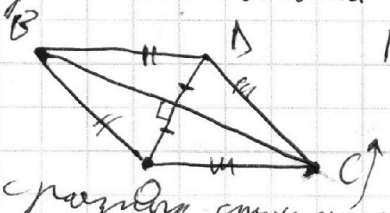
При отражении $\triangle QDC$ относительно биссектрисы угла C $Q \to A$ т.к $QC = AC$

$D \to O$ т.к $\angle OAC = 45°$ $\triangle QDC \to \triangle AOC$

$DC = OC$ $BD = BO$ $\triangle PDC = \triangle AOC$

$AO = QD$

два равнобедренных треугольника на одном основании OD O, D - должны быть с разных сторон.



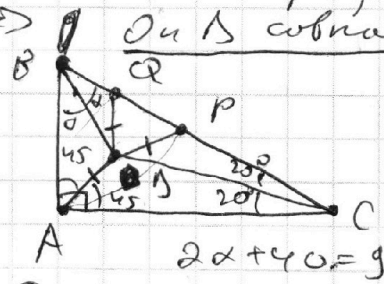
D - лежит внутри

O, D - лежат с одной стороны от BC

O, D - с разных сторон

O - внутри ABC

$\Rightarrow$ O и D совпадают. т.к получается при симметрии отн. биссектрис.



$\angle DCB = 20° = \angle ACD$

$\angle ABD = \angle DBQ = \frac{90-40}{2} = 25°$

$2\alpha + 40 = 90$ $\alpha = 25°$

Ответ: $\angle DBC = 25°$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

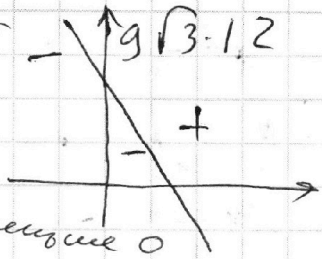
$10-\frac{55}{18}=\frac{180-55}{18}=\frac{125}{18}$ №6

$\frac{5}{6}\cdot\pi\cdot 18^2+9\sqrt{3}\cdot 9$

$x-\frac{15}{2}+\frac{y}{6\sqrt{3}}=0$

$-\frac{6\cdot\pi}{2}$

$y=\left(\frac{15}{2}-x\right)6\sqrt{3}$ — лин. функция



снизу значение $x-\frac{15}{2}+\frac{y}{6\sqrt{3}}$ — меньше 0

сверху — больше

$=(5\cdot 18\cdot 3-3\cdot 6)\pi$

$+9\sqrt{3}\cdot 3$

$y=\left(x-\frac{15}{2}\right)6\sqrt{3}$

$=3(5\cdot 18-6)\pi$

$-9\cdot 3\sqrt{3}$

$\left(\frac{125}{18}\right)^2+\left(5\cdot\frac{10\sqrt{11}}{36}\right)^2$

$=\frac{125^2\cdot 4+50^2\cdot 11}{36^2}$

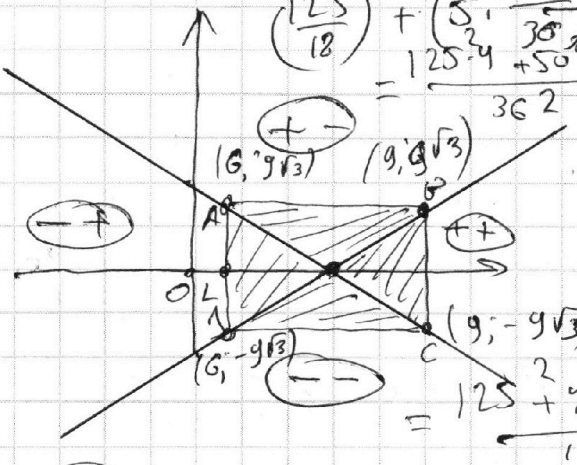
$=18(5\cdot 3-1)\pi$

$-27\sqrt{3}\pi$

$\frac{18}{\times 14}$ $\frac{72}{18}$ $\frac{252}{}$

$\frac{144}{262}$ — оба модуля с +

раскрыть



(+ −) первый в с "+" второй с "−"

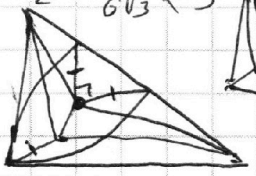
$=\frac{125^2+25^2\cdot 11}{18^2}=\frac{25^2(5^2+11)}{18^2}=\frac{25^2\cdot 36}{18^2}=\frac{5}{18}\cdot 6=\frac{5}{3}$

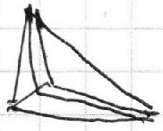
(++) $2x-15\le 3$ $x\le 9$ $324/54$ $-30/2$

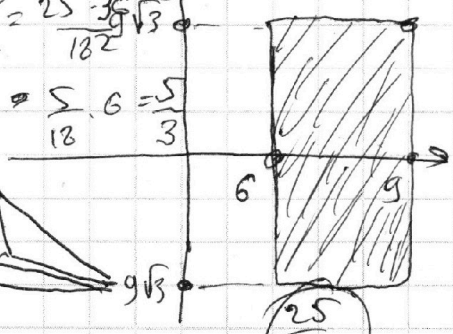
$\left(9-\frac{15}{2}\right)6\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

(+−) $x-\frac{15}{2}+\frac{y}{6\sqrt{3}}-x+\frac{15}{2}+\frac{y}{6\sqrt{3}}\le 3$

$y\le 9\sqrt{3}$





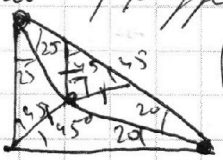


$\frac{25}{3}$

(−+) $y\ge -9\sqrt{3}$

(−−) $x\ge 6$ Полученная фигура — прямоугольник

$OL=6$ $OB=18$



$\left(\frac{125}{18}\right)^2+\left(\frac{5\cdot 6\sqrt{11}}{36}\right)^2$

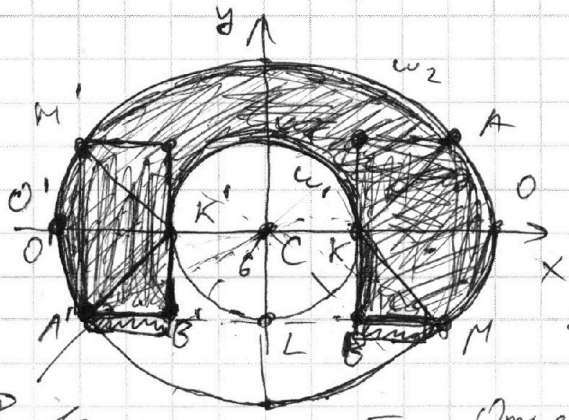
$=\frac{25^2(5^2+11)}{18^2}=\frac{25\cdot 6^2}{18^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

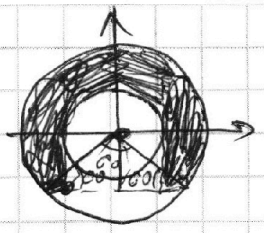
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$R_{\omega_2} = 18$

$R_{\omega_1} = 6$



Заштрихованная фигура закрашена чёрным

Повернуть на π. Отрезок KM заметёт всю площадь между окружностями ω_1 и ω_2 до отрезка K'M'. Аналогично отрезок AK до ~~[illegible]~~ A'K'.

Найдем площадь дуги под отрезком A'M.

$BK = 9\sqrt{3}$ $O'O = 36$ $\angle A'CM = 60^\circ$

~~[illegible]~~

$A'L = 12\sqrt{2}$ $CL = 6$ $S_{A'CM} = 6 \cdot 12\sqrt{2} = 72\sqrt{2}$

$\cos\angle A'CL = \frac{1}{3}$ $\cos 2\alpha = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$

$S_{\text{дуги между } A'M} = \frac{18^2 \cdot \arccos(-\frac{7}{9})}{2} - S_{A'CM}$

$= 9 \cdot 18 \arccos(-\frac{7}{9}) - 72\sqrt{2}$

$S = \pi \cdot 18^2 - \frac{\pi}{2} \cdot 6^2 - 12 \cdot 9\sqrt{3} - 9 \cdot 18 \arccos(-\frac{7}{9}) + 72\sqrt{2}$

~~[illegible]~~

Ответ:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

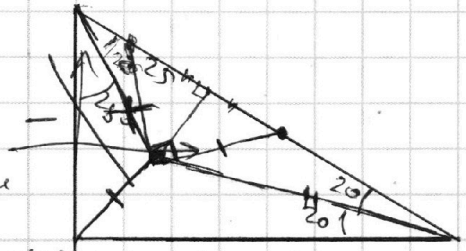
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

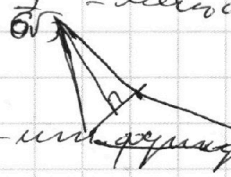
$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0$



$y = \left(\frac{15}{2} - x\right) 6\sqrt{3}$ – лин. функция

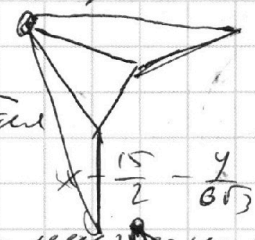
снизу – значит $x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}$ – меньше нуля

сверху – больше

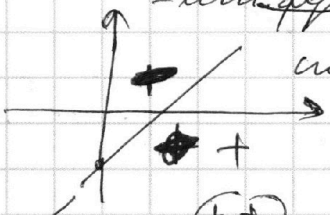


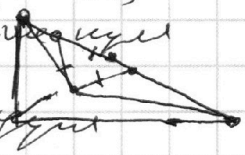
$x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0$ – лин. функция

$y = \left(x - \frac{15}{2}\right) 6\sqrt{3}$



снизу $x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}$ – меньше нуля



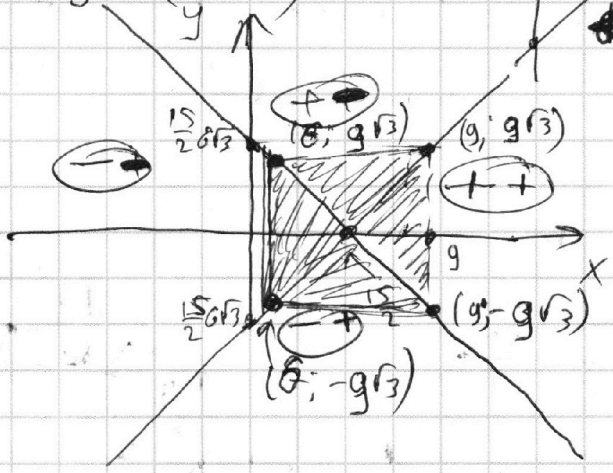


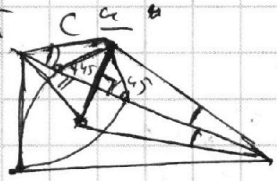
(++) – оба больше

"+" раскрываются

(+−) – первый "+"

второй "−"





(++); $2x - 15 \le 3$ $x \le 9$ – треугольник ограниченный прямыми $y = 6\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{15}{2}\right)$

$y = 6\sqrt{3}\left(9 - \frac{15}{2}\right) = 9\sqrt{3}$ $y = 6\sqrt{3}\left(\frac{15}{2} - x\right)$

(+−): $x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} - x + \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \le 3$

$y \le 9\sqrt{3}$ $9\sqrt{3} = \left(\frac{15}{2} - x\right) 6\sqrt{3}$ $\frac{15}{2} - x = \frac{3}{2}$

$x = 6$

(−+) $-x + \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} + x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \le 3$

$y \le -9\sqrt{3}$

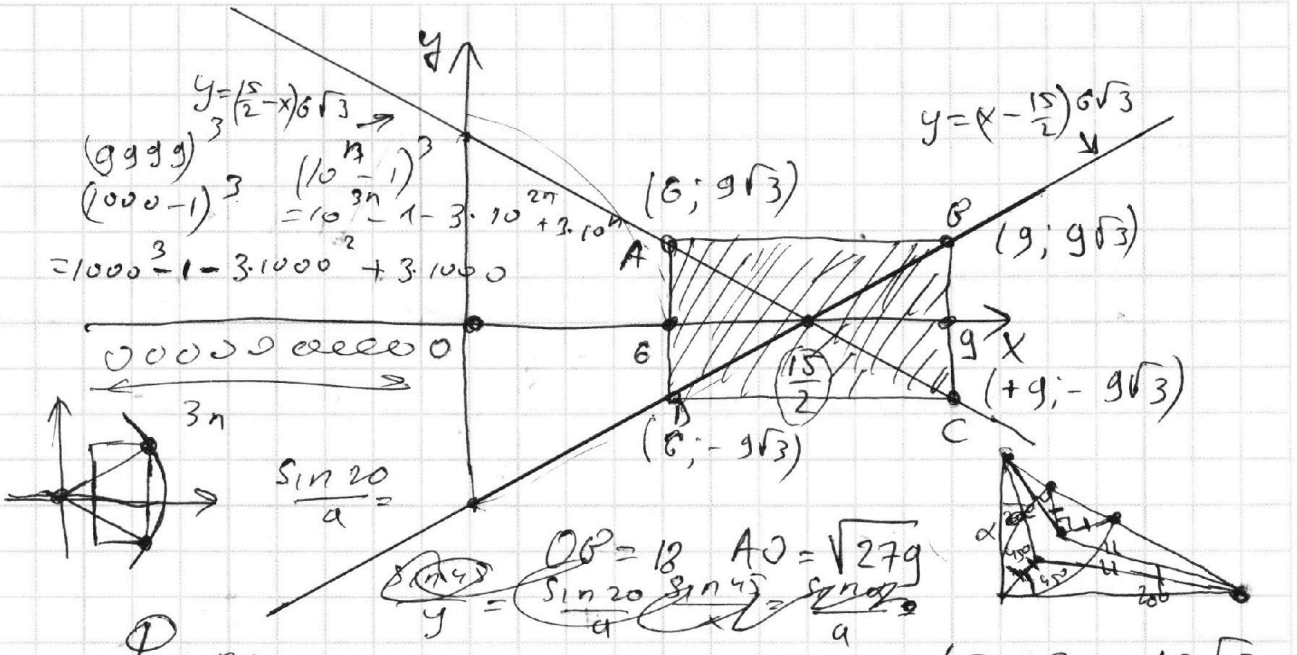
(−−) $-2x + 15 \le 3$ $x \ge 6$

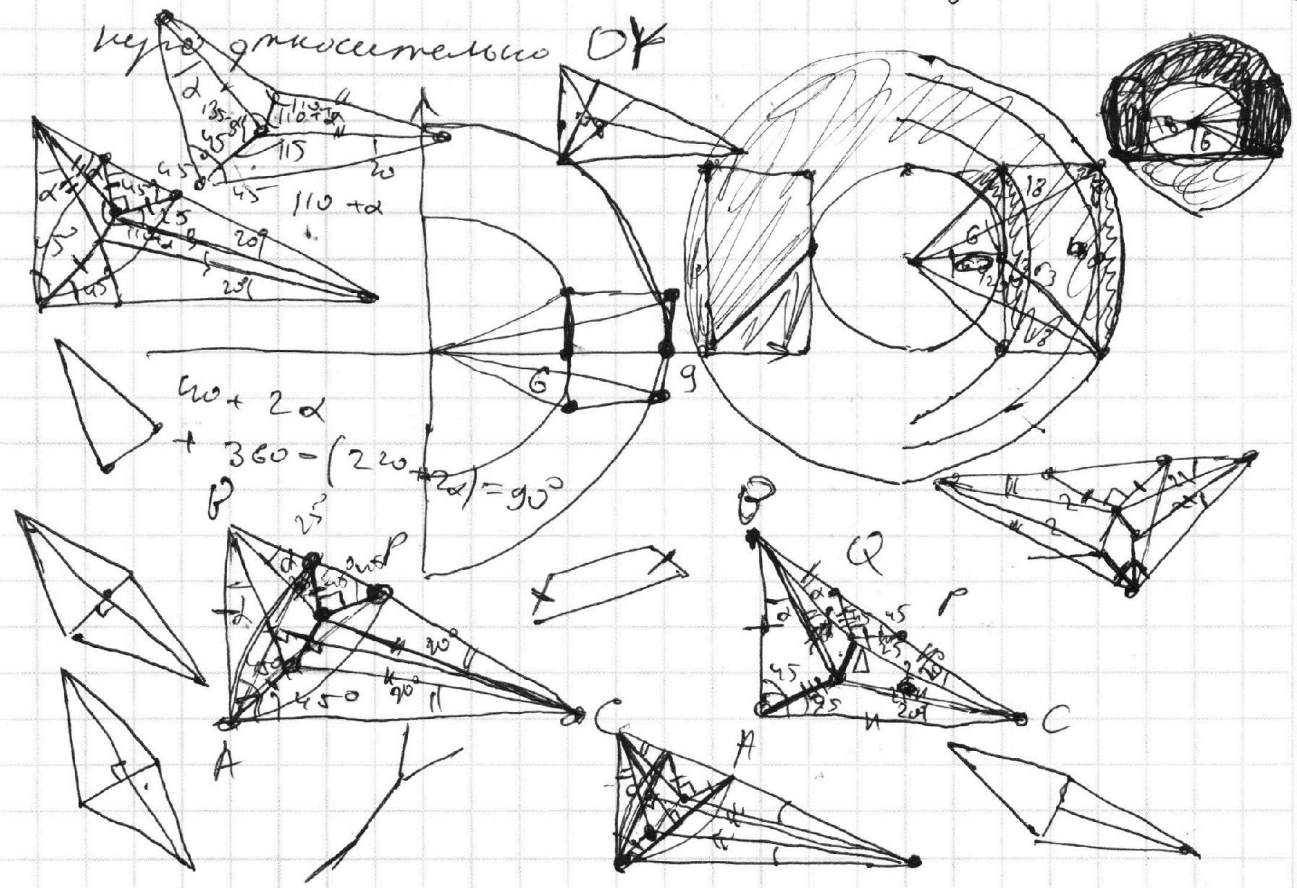
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Ф – прямоугольник со сторонами 3 и $18\sqrt{3}$

При повороте он перейдет в фигуру симметричную относительно OY