



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 7

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В теленгрипе ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.

✓ коробок

— — — — —

$\text{F. B. A. P. } P_1 \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
1 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \begin{cases} xy = 4z + z^2 \quad (1) \\ yz = 4x + x^2 \quad (2) \\ xz = 4y + y^2 \quad (3) \end{cases}$$

$$(1)-(2) = xy - yz = 4z + z^2 - 4x - x^2$$

$$y(x-z) = 4(z-x) + (z-x)(x+z)$$

~~$(z-x)^2$~~

$$y(z-x) + 4(z-x) + (z-x)(x+z) = 0$$

$$(z-x)(y + x + z + 4) = 0$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} z = x \quad (1) \\ y + z + x = -4 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x \\ y + z + x = -4 \end{cases}$$

(замени z на x)

① Если $x = z$, то

$$\begin{cases} x^2 = 4y + y^2 \\ yx = 4x + x^2 \quad | \cdot \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 4x + x^2 \\ yx = 4x + x^2 \\ x^2 = 4y + y^2 \end{cases}$$

Но учитывая $x \neq 0$:

$$\begin{cases} x^2 = 4y + y^2 \Leftrightarrow x^2 = 4y + y^2 \\ y = 4 + x \quad | \quad x = y - 4 \quad | \quad x = y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-4)^2 = 4y + y^2 \\ y^2 - 8y + 16 = 4y + y^2 \quad | \quad y = \frac{16}{12} = \left(\frac{4}{3}\right) \\ x = y - 4 \quad | \quad x = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3} \quad \left(\frac{-8}{3}\right) \end{cases}$$

$$x = z = -\frac{8}{3}$$

Множество (x, y, z)

$$\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{8}{3}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Проверка $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 2 \cdot \left(-\frac{8}{3} + 4\right) + \left(\frac{4}{3} + 4\right)^2 = 2 \cdot \frac{16}{9} + \frac{256}{9} = \frac{32 + 256}{9} = \frac{288}{9} = 32$

② Если $x+y+z = -4$, то

~~$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + z^2 + y^2 + 8(x+y+z) + 16 \cdot 3 =$~~

$$= x^2 + z^2 + y^2 - 4 \cdot 8 + 16 \cdot 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 16$$

~~A = B~~ ~~A = C~~

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 16}{?} - ? \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} A = B + 16 \\ A = 16 - 2B \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A = B + 16 \\ B + 16 = 16 - 2B \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 16 \\ B = 0 \end{array} \right. \\ \cancel{x^2 + y^2 + z^2 = 16} \\ (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 16 = 16 + 16 = 32 \end{array} \right.$$

$$(1) + (2) + (3) = xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 + 4(x+y+z) \underbrace{- 4}_{= 0}$$

$$(xy + yz + zx) = (x^2 + y^2 + z^2) - 16.$$

Заметим, что $(-4)^2 = 16$

~~$(x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2$~~

Ну чт $x^2 + y^2 + z^2 = A$ Тогда

$$xy + yz + zx = B$$

$$B = A - 16$$

Ответ: 32.

$$16 - 2B = A$$

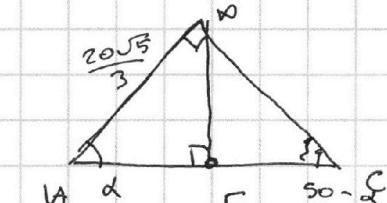
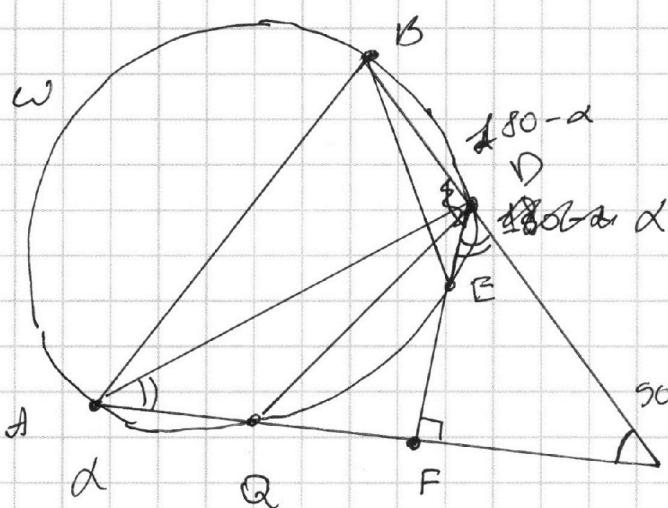
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 17

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = 15, BE = 10, AC = 20.$$



$$\sin \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AC}{AF} = \sin \alpha = \frac{2}{3}$$

~~$$\frac{20}{AF} = \frac{2}{3}$$~~

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$AB = AC \cdot \cos \alpha = \frac{20\sqrt{5}}{3}$$

$\triangle AFB$

$$\frac{AF}{AB} = \cos \alpha$$

$$AF = \cos \alpha \cdot AB$$

Отметим $AC \cap \omega = Q$

Ну т.к. $\angle FDC = \alpha$. $\angle ADB = 90^\circ$ (смежные вертикальные углы)

$$\Rightarrow \angle ABD = 90^\circ. \angle DCB = 90 - \alpha$$

$$\angle BAC = \alpha. \angle BCA = 180 - \alpha$$

Но т.к. смежные углы $\triangle BDE$: $\frac{BE}{\sin(180 - \alpha)} = AB$

, а еще $\triangle ADQ$ $\frac{DQ}{\sin \alpha} = AB$. Отсюда

$$BE = DQ = AB \cdot \sin \alpha = 10$$

$DQ = 10 = \frac{1}{2}AC \Rightarrow DQ$ — медиана f
премножим треугольник $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$

$$\sin \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$AF = \cos \alpha \cdot AB = \frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{20\sqrt{5}}{3} = \frac{100}{3}$$

Ответ: $AF = \underline{\underline{\frac{100}{3}}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
4 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего коробок у генералу
n штук. n > 5

В первом случае требуется
выбрать 5

$$P_1 = \frac{1 \cdot \binom{n-3}{2}}{\binom{n}{5}}$$

однозначно выбираются 3
коробки с маркировкой
и еще где без них.

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{(n-3)(n-4)}{2} \cdot \frac{5!}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \\ &= \frac{5!}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

во втором случае вероятность выигра

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{\binom{n-3}{5}}{\binom{n}{8}} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) \cdot 8!}{5! \cdot \frac{n!}{(n-8)!}} \\ &= \frac{8!}{5!} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

$$\text{Отношение } \frac{P_2}{P_1} = \frac{60}{\frac{7 \cdot 8 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)}} = \frac{23}{5} = \frac{42}{10} = 4,2$$

Ответ: $\boxed{6,2 \text{ результата}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
5 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть y_n — ариф. прогрессия

$$y_n = y_1 + b(n-1)$$

$$y_4, y_5 \text{ — корни } x^2 - (\alpha^2 - \alpha)x + \frac{\alpha^3 - \alpha^2}{3} = 0$$

$$y_2, y_7 \text{ — корни } 2x^2 - (\alpha^3 - \alpha^2)x - 2\alpha^6 - 8\alpha^4 - 4\alpha^2 = 0$$

$$y_4 + y_5 = 2y_1 + 3b + 4b = 2y_1 + 7b$$

$$y_2 + y_7 = y_1 + b + y_1 + 6b = 2y_1 + 7b$$

$$y_4 + y_5 = y_2 + y_7. \text{ Но т. Всегда } \text{сумма корней} = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Тогда } y_2 + y_7 = y_4 + y_5$$

$$\frac{\alpha^3 - \alpha^2}{2} = \alpha^2 - \alpha$$

$$\alpha(\alpha-1) \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha(\alpha-1)$$

$$\alpha(\alpha-1) \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 & (1) \\ \alpha = 1 & (2) \\ \alpha = 2 & (3) \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
6 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \text{ Если } \alpha = 0, \text{ то } x^2 - (\alpha^2 - \alpha)x + \frac{2 - \alpha^3}{3} = 0$$

Знаменатель не нулю не равен. Решение \downarrow

Решение нет

$$(2) \text{ Если } \alpha = 1, \text{ то } x^2 - (\alpha^2 - \alpha)x + \frac{2 - \alpha^3}{3} = 0$$

Случай $\alpha = 1$ не подходит. Решение нет

(3) При $\alpha = 2$ получаем две уравнения

y_4, y_5 — корни

~~$x^2 - 2x - 2 = 0 [1]$~~

y_2, y_7 — корни

$$2x^2 - 4x - d \cdot 2^6 - \varphi \cdot 2 - 4 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 128 - 36 - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x - \frac{164}{2} = 0 [2]$$

Корни [1] — это решения $-(1 \pm \sqrt{3})$

Корни второго уравнения $-(1 \pm 5\sqrt{3})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
7 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть

$$y_2 = 1 - 5\sqrt{3}$$

$$y_4 = 1 - \sqrt{3}$$

$$y_5 = 1 + \sqrt{3}$$

$$y_7 = 1 + 5\sqrt{3}$$

Значит прогрессия $2\sqrt{3}$

$$\text{or } y_4 = 1 - 7\sqrt{3}$$

Тогда если

сходится и
корни уравнения
и праेьфола яв-
ляются членами
ариф прогрессии
с соотвейшую-
щими индексами.

Ответ: $\boxed{a = 2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
8 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6$$

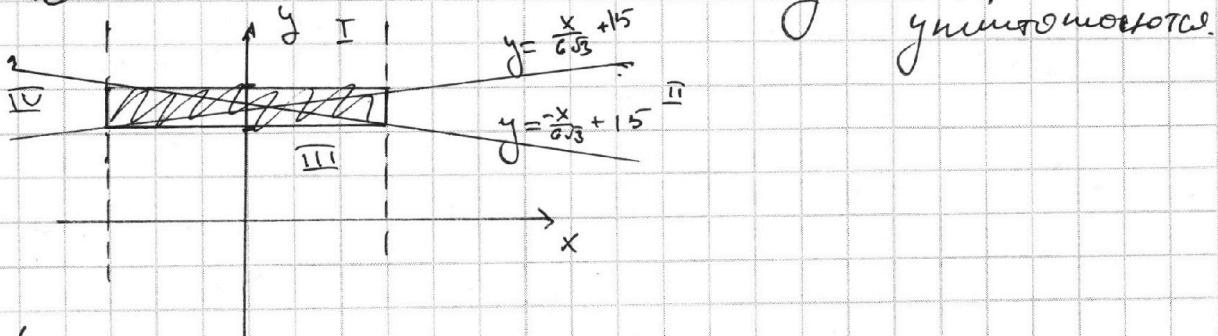
Задача такая что если взять контур фигуры Φ , то получим что это
лучек, так как если мы рассмотрим
точки прямые имеющие симметрию,
знак которых зависит от
относительного положения точки
относительно линии прямых

$$y = -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \text{ и } y = \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15,$$

отличающихся в знаками коэффициентов,

то в контур из четырех лучей
имеющие прямую ~~пересечение~~ пересечения
имеют либо Ox , либо Oy .

Т.к при изображении рассмотрим лоду-
ши ~~коэффициенты~~ все симметрии с X име-
ют симметрии с y ~~коэффициенты~~
имеют симметрии с y ~~коэффициенты~~



(график изображен без
составления исходной для константы)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем все эти прямые, определив
коэффициент ~~перп~~ Φ .

Вертикаль, получив $y = 15$ при $x = 0$.

$$\left| y - 15 + \frac{0}{6\sqrt{3}} \right| + \left| y - 15 - \frac{0}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6$$

$$2 |y - 15| \leq 6$$

$$|y - 15| \leq 3 \Rightarrow y = 18 \text{ или } y = 12$$

Добудем вертикаль прямую Φ

$$A \in \gamma: \Phi \left(y = \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \right)$$

Значит получим

Чтобы найти x_A

$$y_A = 18$$

$$18 = \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15$$

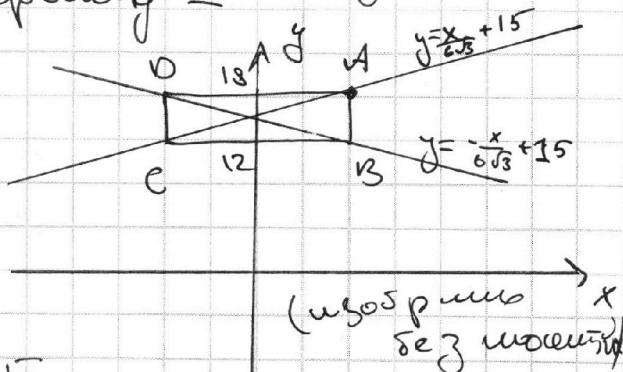
Тогда:

$$A(18\sqrt{3}; 18) \quad \frac{x}{6\sqrt{3}} = 3$$

$$B(18\sqrt{3}; 12) \quad x = 18\sqrt{3}$$

$$D(-18\sqrt{3}; 18) \quad x_A = x_B = 18\sqrt{3}$$

$$C(-18\sqrt{3}; 12) \quad x_B = x_C = -x_A = -18\sqrt{3}$$



Тогда из симметрии

и параллельности

$AB \parallel OP$, $DC \parallel OP$

$AD \parallel OX$, $BC \parallel OX$

$$y_A = y_D = 18$$

$$y_C = y_B = 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

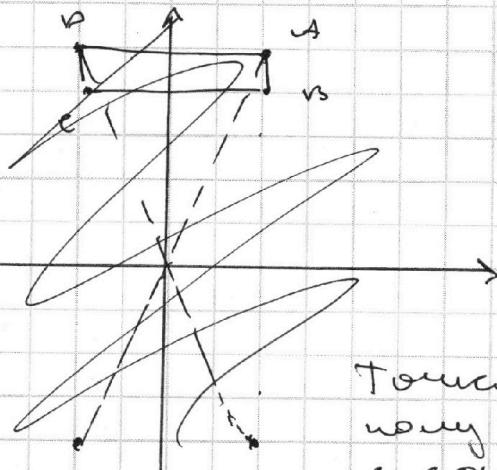
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
10 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

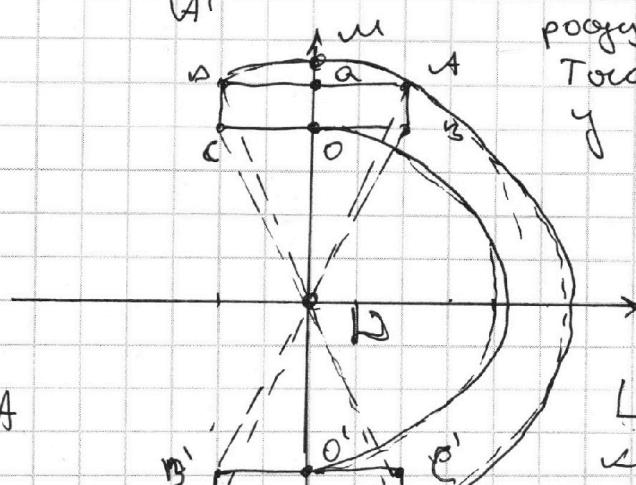
Рассмотрите, какую фигуру получится фигура Φ при поворте на π .

Сделав Φ фигури поверните на π
перейдет в изображение
фигуру Φ'
— прямые AB ,
 AC , BC



Точка A заменит
нашу фигуру с самими теми
расстояниями
Также все, что
у получится A

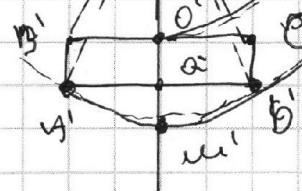
$A \rightarrow A'$
 $B \rightarrow B'$
 $C \rightarrow C'$
 $W \rightarrow W'$



L-коэффициент

Вместе D и A

заметят фигуру
окр $D A'$



Окружность с меньшим радиусом
заметят точка O — центр
стороны BC

(O — центр)

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
11 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В итоге мы получили фигуру A, состоящую из двух частей: $M_1M'_1$ и OO' .

Фигура $M_1M'_1$ ограничена дугой MM' и её

хордой $M_1M'_1$. и фигура $SCAVB = \Phi$
(Фигура A симметрична относ. OX)

Площадь $S_A = S_\Phi + S_\Sigma + S_D$

$$S_D = \frac{1}{2} (\pi (LA^2 - LO^2))$$

$$\begin{aligned} S_\Sigma &= S_D - S_\Phi = (-18\sqrt{3}, 18) \\ &= \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot LA^2 - \frac{LA^2 \cdot \sin 120^\circ}{2} \\ &= \cancel{\pi \cdot LA^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cancel{S_\Phi} \end{aligned}$$

$$S_\Phi = AO \cdot DC = 36\sqrt{3} (18 - 12) = 216\sqrt{3}$$

$$S_D = 216\sqrt{3} + \pi \left(\frac{1}{2} (LA^2 - LO^2) + LA^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right)$$

$$S_A = 216\sqrt{3} + \pi \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) 36^2 - \frac{1}{2} \cdot 12^2 \right)$$

$$S_A = 216\sqrt{3} + \pi \left(\left(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) 36^2 - 72 \right) — \text{ответ.}$$

L

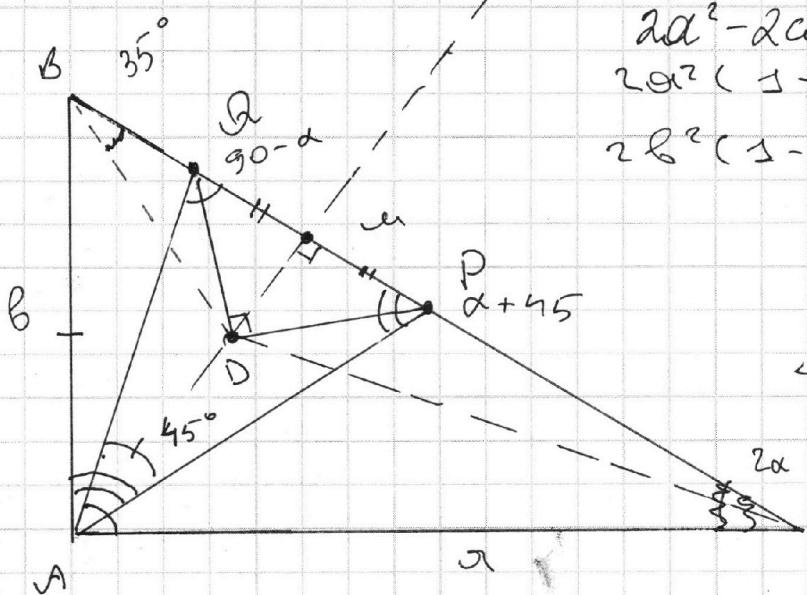


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
12 из 12

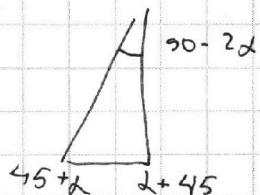
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



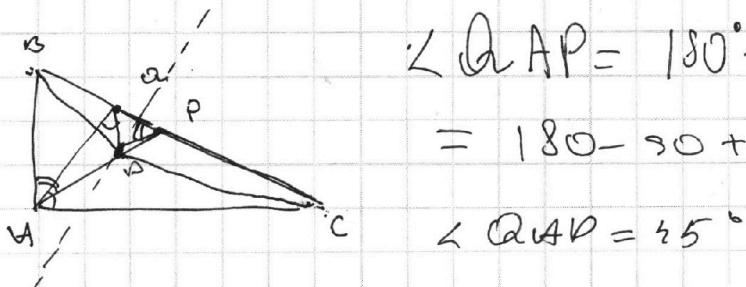
$$2\alpha^2 - 2\cos\alpha \alpha^2$$

$$2\alpha^2 (1 - \cos^2\alpha)$$

$$2\alpha^2 (1 - \sin^2\alpha)$$



$$\begin{aligned} \angle QAP &= 180^\circ - \angle QAP - \angle QDQ = \\ &= 180 - 90 + \alpha - \alpha - 45 = 45^\circ \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

6

7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

5

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

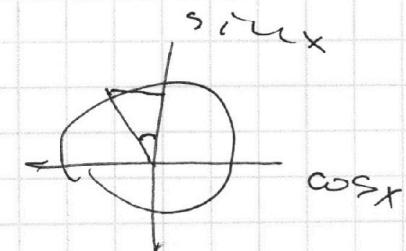
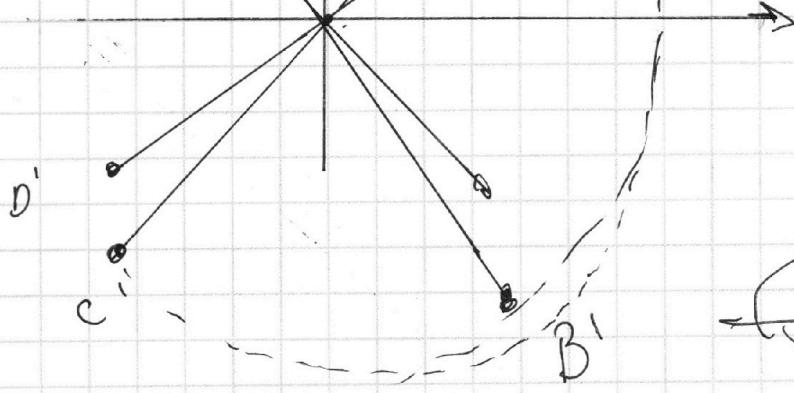
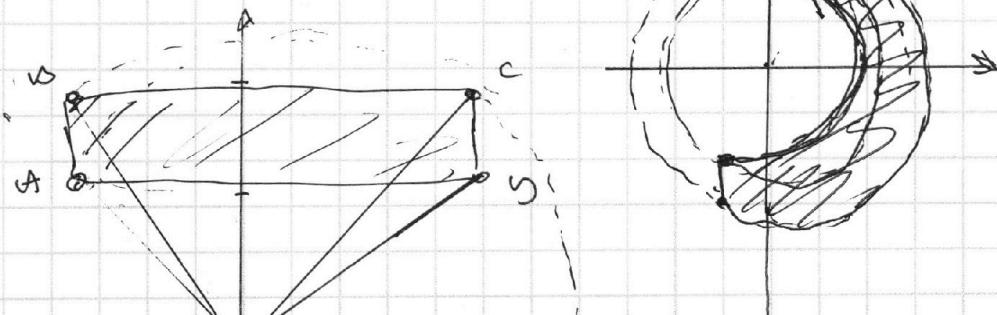
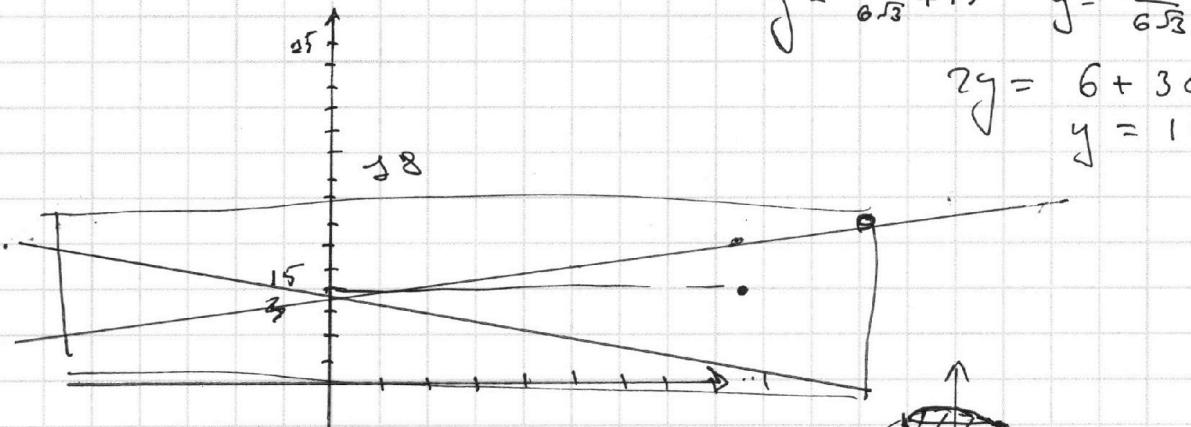
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\left| y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6$$

$$y = \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \quad y = -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15$$

$$2y = 6 + 30 \\ y = 18$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (\alpha^2 - \alpha) x + \frac{\alpha^2 - \alpha^2}{3} = 0 - (128 + 32 + 4)$$

(y_5, y_4) корни

$$128 + 32 + 4 =$$

$$\frac{164}{2} = 82$$

$$2x^2 - (\alpha^3 - \alpha^2)x - 2\alpha^6 - 8\alpha - 4 = 0$$

(y_2, y_7) корни

$$-2 \cdot 2^6 - 8 \cdot 2 - 4 = 412$$

$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$

$$y_n = y_2 + \cancel{16} \cdot (n-1) - 128 - 16 - 4 =$$

$$-128 - 20 = -148 =$$

$$= \underline{\underline{-74}}$$

Заметим, что $y_2 + y_7 = y_4 + y_5$

$$\alpha^2 - \alpha = \alpha^3 - \alpha^2$$

$$\alpha(\alpha - 1) = \alpha^2(\alpha - 1) \Rightarrow$$

~~$$(\alpha^2 - \alpha)(\alpha - 1) = 0$$~~

$$\alpha(\alpha - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\alpha \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$2 \pm \sqrt{4 + 8}$$

$$1 \pm \sqrt{1 + 8} = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{9999 \dots 99}_{25000 \text{ раз}} = 9 \cdot 1111 \dots 11$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b$$

11³

$$n^3 = 9^3 \cdot 1111 \dots 11^3$$

$$9^3 = 27$$

$$\begin{array}{r} \times 121 \\ 111 \\ \hline 121 \\ 111 \\ \hline 121 \end{array}$$

$$99^3 = 27 \cdot 11^3 = 27 \cdot 1111 \quad \frac{121}{1111}$$

$$\begin{array}{r} \times 1111 \\ 27 \\ \hline 10317 \\ 1662 \\ \hline 20937 \end{array}$$

$$\text{Нусть } a_n = \underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ раз}}$$

Мы делим, что где

$$n < k$$

~~$$S_3(a_k) = n - 1$$~~

$$(999 \dots 90 + 9)^3 = 27 + (999 \dots 90)^3 + 999 \dots 90 \cdot 81$$

$$(99 \dots 9)^3 = 9^3 \cdot (111 \dots 1)^3$$

$$\begin{array}{r} 1111 \dots 111 \\ 1111 \dots 111 \\ 1111 \dots 111 \\ \hline 1111 \dots 111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \dots 111 \\ 1111 \dots 111 \\ 1111 \dots 111 \\ \hline 1111 \dots 111 \end{array}$$



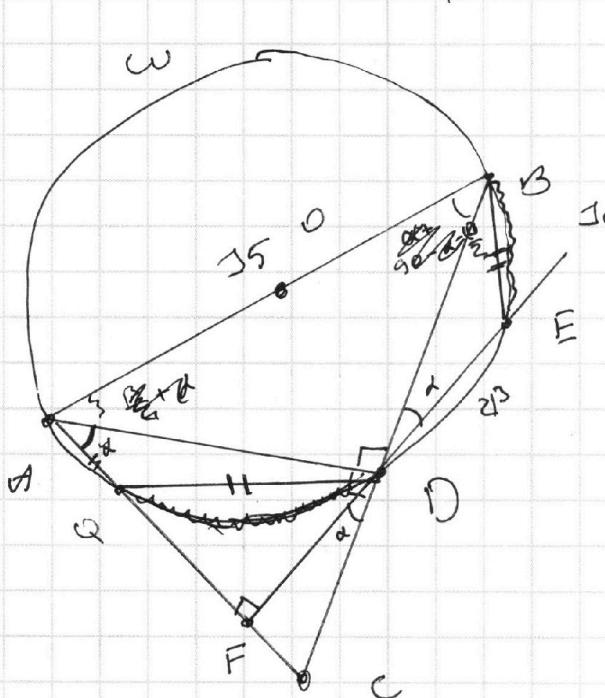


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

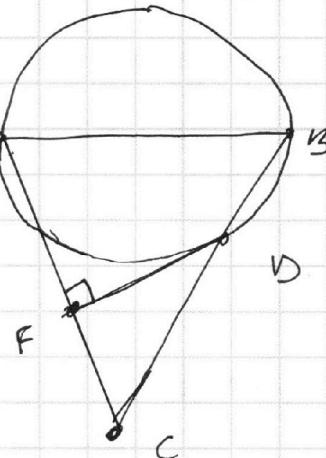
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\beta + \gamma = \angle ACD = 90^\circ - \alpha$$

$$90^\circ - \beta - \gamma = \alpha + 90^\circ - 2\alpha - \beta = 90^\circ - \alpha - \beta$$



$$\angle CAD = \angle FDC = \angle BDE = \alpha$$

$\sin \alpha$ из Т синусов

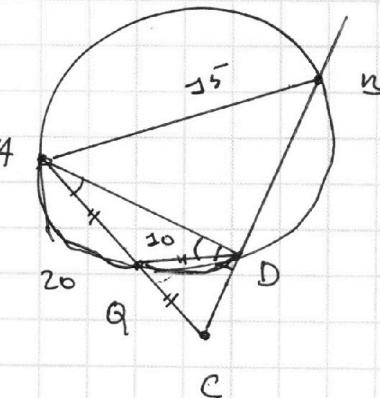
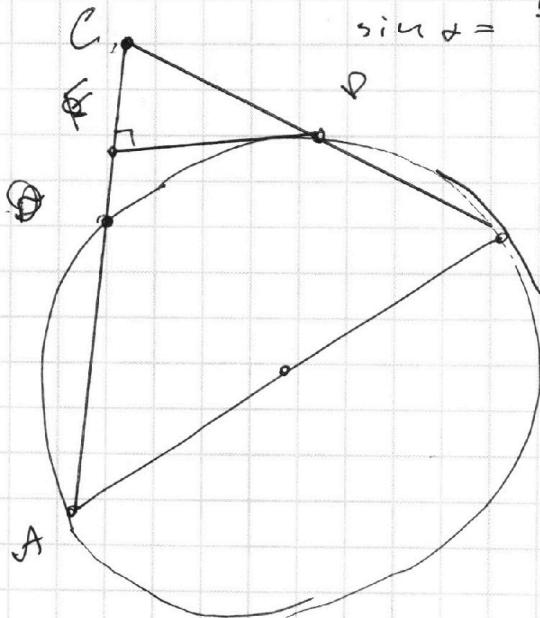
$\triangle DBE$

$$\frac{BE}{\sin \alpha} = QD$$

~~sin alpha~~

$$\frac{BE}{\sin \alpha} = 2AB$$

$$\sin \alpha = \frac{BE}{2AB} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$z^2 = xy - 4z \quad x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz - 4z - 4x - 4y$$

$$x^2 = yz - 4x$$

$$y^2 = zx - 4y$$

$$xy + yz + xz - 4(-4) =$$

$$xy + yz + xz + 16 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(x-4)(y-4) \rho_3 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^2} = \cancel{\frac{(n-3)!}{2!(n-2)!}} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2} \cdot \frac{5!}{\cancel{n(n-1)} \cancel{(n-2)} \cancel{(n-3)} \cancel{(n-4)}}.$$

$$\cancel{(x+y+z)^2} - 2(xy + yz + xz) = (x^2 + y^2 + z^2) \\ \cancel{(-4)^2} - 2 \cancel{Q} = S^2 \quad = \frac{5!}{2(n-3)(n-2)}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(x+y+z)^2 - 2(xy + yz + xz) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 16 - 2(xy + yz + xz) = (x^2 + y^2 + z^2) \\ (xy + yz + xz) + 16 = (x^2 + y^2 + z^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 16 - 2B = A \\ B + 16 = A \end{array} \right. \Rightarrow 16 - 2B = B + 16$$

$$3B = 0$$

B



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} xy - yz &= 4z + z^2 - 4x - x^2 \\ y(x-z) &= 4(z-x) + (z-x)(x+z) \\ \cancel{z} &\Rightarrow \\ -y &= 4 + x + z \\ x + z + y &= -4 \end{aligned}$$

$$(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 16 \cdot 3$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 4 \cdot 8 + 16 \cdot 3 &= (-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}) \\ x^2 + y^2 + z^2 + 16 - ? & \end{aligned}$$

$$\text{или } x = z \Rightarrow y = 4 + x$$

$$\cancel{x+x+x+x} = 4$$

$$\text{или } x = z \Rightarrow xy = 4x + x^2$$

$$\begin{cases} y = 4 + x \\ x^2 = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yx = 4x + 4y + y^2 \\ x^2 = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$\cancel{yx = 4x + 4y + y^2}$$

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ (y-4)^2 = 4y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 4 & x = z = -\frac{8}{3} \\ y^2 - 8y + 16 = 4y + y^2 & y = \frac{4}{3} \\ 12y = 16 & \end{cases}$$