



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.

11 коробок

1 2 3 4 5 ... 11

$$P = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{cases} xy = 4z + z^2 & (1) \\ yz = 4x + x^2 & (2) \\ xz = 4y + y^2 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(1) - (2) = xy - yz = 4z + z^2 - 4x - x^2$$

$$y(x - z) = 4(z - x) + (z - x)(x + z)$$

~~$$y(z - x) = 4(x - z) + (x - z)(x + z)$$~~

$$y(z - x) + 4(z - x) + (z - x)(x + z) = 0$$

$$(z - x)(y + x + z + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x & (1) \\ y + z + x = -4 & (2) \end{cases}$$

(3) Если $x = z$, то (Заменим z на x)

$$\begin{cases} xy = 4x + x^2 \\ yx = 4x + x^2 \\ x^2 = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 4y + y^2 \\ yx = 4x + x^2 \end{cases} \quad | \cdot \frac{1}{x}$$

По условию $x \neq 0$:

$$\begin{cases} x^2 = 4y + y^2 \\ y = 4 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4y + y^2 \\ x = y - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} (y - 4)^2 = 4y + y^2 \\ x = y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 8y + 16 = 4y + y^2 \\ x = y - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{16}{12} = \left(\frac{4}{3}\right) \\ x = \frac{4}{3} - 4 = \left(-\frac{8}{3}\right) \end{cases}$$

$$x = z = -\frac{8}{3}$$

Получили (x, y, z)

$$\left(-\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Mongol $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 2 \cdot \left(-\frac{8}{3} + 4\right) + \left(\frac{4}{3} + 4\right)^2 =$
 $= 2 \cdot \frac{16}{9} + \frac{256}{9} = \frac{32 + 256}{9} = \frac{288}{9} = \boxed{32}$

② Если $x+y+z = -4$, то

~~$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 16 \cdot 3 =$~~
 $= x^2 + y^2 + z^2 - 4 \cdot 8 + 16 \cdot 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 16$

~~$A = B + 16$~~

$x^2 + y^2 + z^2 + 16 = ?$

$$\begin{cases} A = B + 16 \\ A = 16 - 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B + 16 \\ B + 16 = 16 - 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 16 \\ B = 0 \end{cases}$$

 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$
 $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 16 = 16 + 16 = 32$

(1) + (2) + (3) = $xy + yz + xz = x^2 + y^2 + z^2 + 4(x+y+z)$
 $\Rightarrow (xy + yz + xz) = (x^2 + y^2 + z^2) - 16$

Заметим, что $(-4)^2$

$(x+y+z)^2 - 2(xy + yz + xz) = (x^2 + y^2 + z^2)$

Пусть $x^2 + y^2 + z^2 = A$

$2(xy + yz + xz) = B$

То есть

$B = A - 16$

~~$A = B$~~
 $16 - 2B = A$

Ответ: 32.



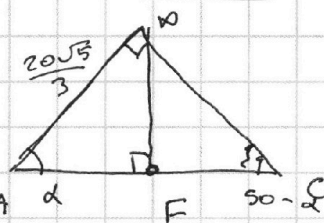
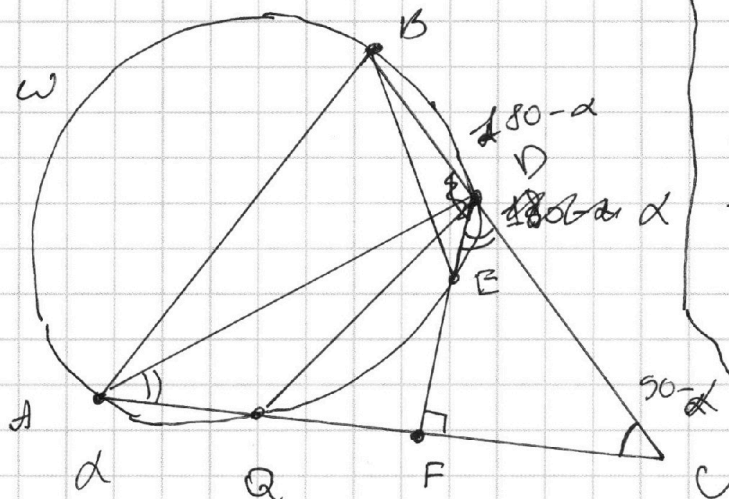
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = 15, BE = 10, AC = 20$$



$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\frac{BC}{AC} = \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\frac{10}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 37^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$AB = AC \cdot \cos \alpha = \frac{20 \cdot 4}{5} = 16$$

AFB

$$\frac{AF}{AB} = \cos \alpha$$

$$AF = \cos \alpha \cdot AB$$

Отметим $AC \cap \omega = Q$

Пусть $\angle FDC = \alpha$. $\angle ADB = 90^\circ$ (опущен на хорду)

$$\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ, \angle DCF = 90 - \alpha$$

$$\angle DAC = \alpha, \angle BDA = 180 - \alpha$$

По т. синусов в $\triangle BDE$: $\frac{BE}{\sin(180 - \alpha)} = AB$

, а в $\triangle ADQ$: $\frac{DQ}{\sin \alpha} = AB$. Отсюда

$$BE = DQ = AB \cdot \sin \alpha = 10$$

$DQ = 10 = \frac{1}{2} AC \Rightarrow DQ$ — медиана в прямоугольном треугольнике $\triangle ABC$ и $AQ = QC = 10$

$$\sin \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$AF = \cos \alpha \cdot AB = \frac{4}{5} \cdot 15 = 12$$

$$\text{Ответ: } AF = 12$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего коробок у телеведущего n штук. $n > 5$

В ~~пер~~ в первом случае вероятность выиграть $\frac{1}{5}$

$$P_1 = \frac{1 \cdot \binom{2}{n-3}}{\binom{5}{n}}$$

Одновременно выбираются 3 коробки с шариками и еще две без них.

$$P_1 = \frac{(n-3)(n-4)}{2} \cdot \frac{5!}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} =$$

$$= \frac{5!}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

Во втором случае вероятность выиграть

$$P_2 = \frac{\binom{5}{n-3}}{\binom{8}{n}} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) \cdot 8!}{5! \cdot \frac{n!}{(n-8)!}}$$

$$= \frac{8!}{5!} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)}$$

Отношение $\frac{P_2}{P_1} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 6}{60} = \frac{23}{5} = \frac{42}{10} = 4,2$

Ответ: 6 4,2 раз 10 5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
5 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть y_n — ариф. прогрессия

$$y_n = y_1 + b(n-1)$$

$$y_4, y_5 - \text{корни } x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0$$

$$y_2, y_7 - \text{корни } 2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 30a - 47 = 0$$

$$y_4 + y_5 = 2y_1 + 3b + 4b = 2y_1 + 7b$$

$$y_2 + y_7 = y_1 + b + y_1 + 6b = 2y_1 + 7b$$

$$y_4 + y_5 = y_2 + y_7. \text{ По т. Виетта}$$

сумма корней $= -\frac{b}{a}$

Тогда $y_2 + y_7 = y_4 + y_5$

$$\frac{a^3 - a^2}{2} = a^2 - a$$

$$a(a-1) \cdot \frac{a}{2} = a(a-1)$$

$$a(a-1) \left(\frac{a}{2} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 & (1) \\ a = 1 & (2) \\ a = 2 & (3) \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☒ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
6 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(1) Если $\alpha = 0$, то $x^2 - (\alpha^2 - \alpha)x + \frac{2 - \alpha^3}{3} = 0$

Значит если

$\alpha = 0$ не подходит.

$$0 \leq x^2 + \frac{2}{3} = 0$$

Решения 4

Решения Нет

(2) Если $\alpha = 1$, то $x^2 - (\alpha^2 - \alpha)x + \frac{2 - \alpha^3}{3} = 0$

Если $\alpha = 1$
не подходит

$$x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

Решения нет

(3) Если $\alpha = 2$ получим два уравнения

y_4, y_5 — корни

~~$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad [1]$$~~

y_2, y_7 — корни

$$2x^2 - 4x - 2 \cdot 2^6 - 8 \cdot 2 - 4 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 128 - 16 - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0 \quad [2]$$

Корни [1] — 2 уравнения — $(1 \pm \sqrt{3})$

Корни второго уравнения — $(1 \pm 5\sqrt{3})$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
7 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть

$$y_2 = 1 - 5\sqrt{3}$$

$$y_4 = 1 - \sqrt{3}$$

$$y_5 = 1 + \sqrt{3}$$

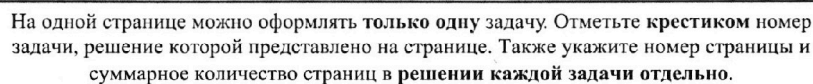
$$y_7 = 1 + 5\sqrt{3}$$

Значит прогрессия $2\sqrt{3}$

а $y_1 = 1 - 7\sqrt{3}$

Ответ: $a = 2$

тогда все
сходится и
корни уравнения
и прогрессия
является
ариф. прогрессией
с разностью $2\sqrt{3}$
и членом $1 - 7\sqrt{3}$



СТРАНИЦА
8 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим что если мы, ^{график} контур
 фигуры Φ , то получим предельно
 узкий, так как если мы рассмотрим
 все профили множества точек, ^{линия}
 из которых состоит Φ , то получим
 относительно узкий предельный

отличительных и знаковых коэф-тов,

то в конце из 4-х сигналов
получим ~~либо~~ ^{уменьшо} порошки
или либо ОХ, либо ОУ.

Hand-drawn graph on grid paper showing a shaded region between two lines. The lines are labeled $y = \frac{x}{2\sqrt{3}} + 15$ and $y = -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 15$. The shaded region is labeled III. The x-axis is labeled x and the y-axis is labeled y. The region is bounded by vertical dashed lines at $x = -10$ and $x = 10$. The y-axis has a tick mark at 15. The shaded region is a rectangle with a width of 20 and a height of 15.

(график изобразил без
символической нагрузки для компактности)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 9 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем те эти прямые, определим
 границы $\Phi \Rightarrow \Phi$.

Вертикаль, полагая значение $x=0$.

$$|y-15 + \frac{0}{6\sqrt{3}}| + |y-15 - \frac{0}{6\sqrt{3}}| \leq 6$$

$$2|y-15| \leq 6$$

$$|y-15| \leq 3 \Rightarrow y=18 \text{ или } y=12$$

Обозначим границы границы Φ

$$A \in \pi: \varphi(y = \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15)$$

Значит полагая

y_A по x_A

$$y_A = 18$$

$$18 = \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15$$

Тогда:

$$A(18\sqrt{3}; 18)$$

$$\frac{x}{6\sqrt{3}} = 3$$

$$B(18\sqrt{3}; 12)$$

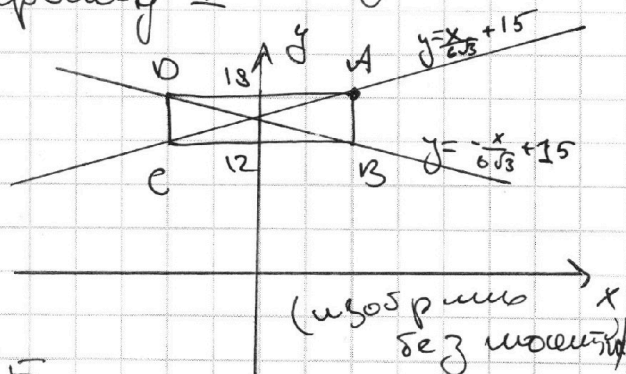
$$x = 18\sqrt{3}$$

$$D(-18\sqrt{3}; 18)$$

$$x_A = x_B = 18\sqrt{3}$$

$$C(-18\sqrt{3}; 12)$$

$$x_D = x_C = -x_A = -18\sqrt{3}$$



Тогда из симметрии
 и параллельности

$AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$
 $AD \parallel BC$, $CB \parallel DA$

$$y_A = y_D = 18$$

$$y_C = y_B = 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

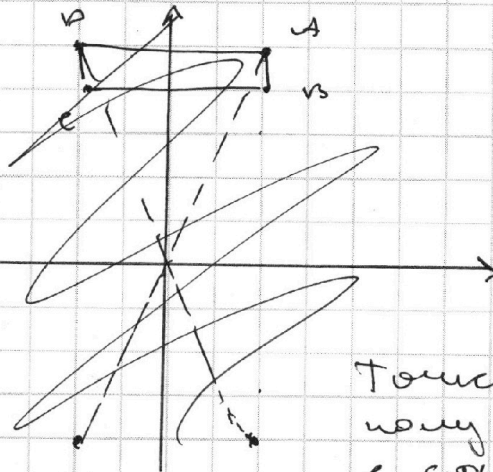
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
10 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим, какую фигуру займёт фигура Φ при повороте на π .

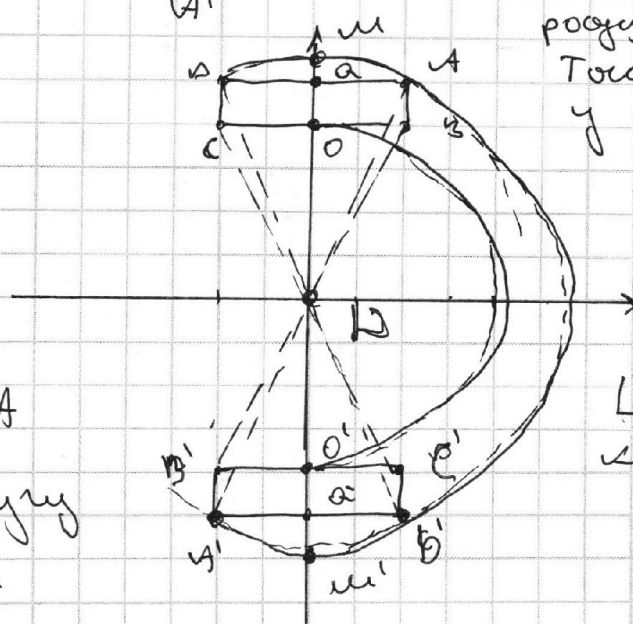
Сами Φ при повороте на π перейдёт в прямую, фигуру Φ' — прямую $A'B'C'D'$



Точка B займёт полуокружность с центром B радиусом BA . Точка A займёт A

$A \ B \ A'$
 $B \ B \ B'$
 $C \ B \ C'$
 $D \ B \ D'$

Вместе D и A займёт дугу окружности DA'



Γ — почва координат

Окружность с центром O займёт точку O — центр стороны BC



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 11 из 12

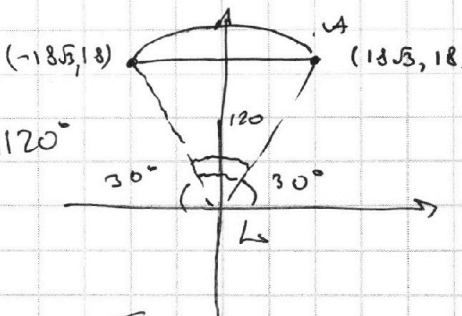
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В итоге мы получили фигуру А, границами которой являются две полуокружности MM' (где MM' - диаметр дуги) и, полуокружности OO' (где OO' - диаметр дуги).
Фигура $PM A$, ограничена ~~ограничена~~ дугой и ее

хордой, и фигура $PCAB = \Phi$ (Фигура А симметрична относ. OX)

Поэтому $S_A = S_\Phi + S_{\triangle} + S_D$

$$S_D = \frac{1}{2} (\pi (LA^2 - LO^2))$$

$$S_{\triangle} = S_D - S_{\triangle} =$$


$$= \frac{120}{360} \cdot \pi \cdot LA^2 - \frac{LA^2 \cdot \sin 120^\circ}{2}$$

$$= \frac{1}{3} \pi LA^2 - \frac{1}{2} LA^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \pi \cdot LA^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$S_{\triangle} = AO \cdot OC = 36\sqrt{3} (18 - 12) = 216\sqrt{3}$$

$$S_A = 216\sqrt{3} + \pi \left(\frac{1}{2} (LA^2 - LO^2) + LA^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right)$$

$$S_A = 216\sqrt{3} + \pi \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) 36^2 - \frac{1}{2} \cdot 12^2 \right)$$

$$S_A = 216\sqrt{3} + \pi \left(\left(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) 36^2 - 72 \right) \text{ — Ответ.}$$

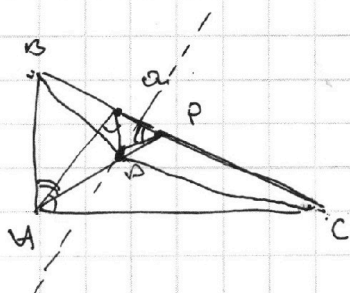
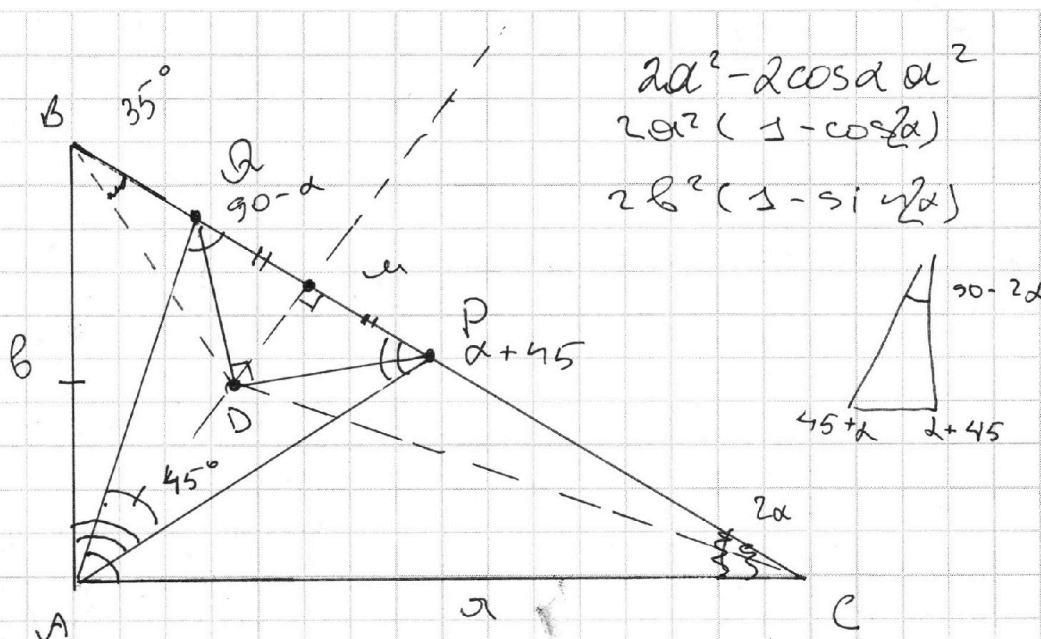


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
12 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \angle QAP &= 180^\circ - \angle AQP - \angle APQ = \\ &= 180 - 90 + \alpha - \alpha - 45 = 45 \\ \angle QAP &= 45^\circ \end{aligned}$$

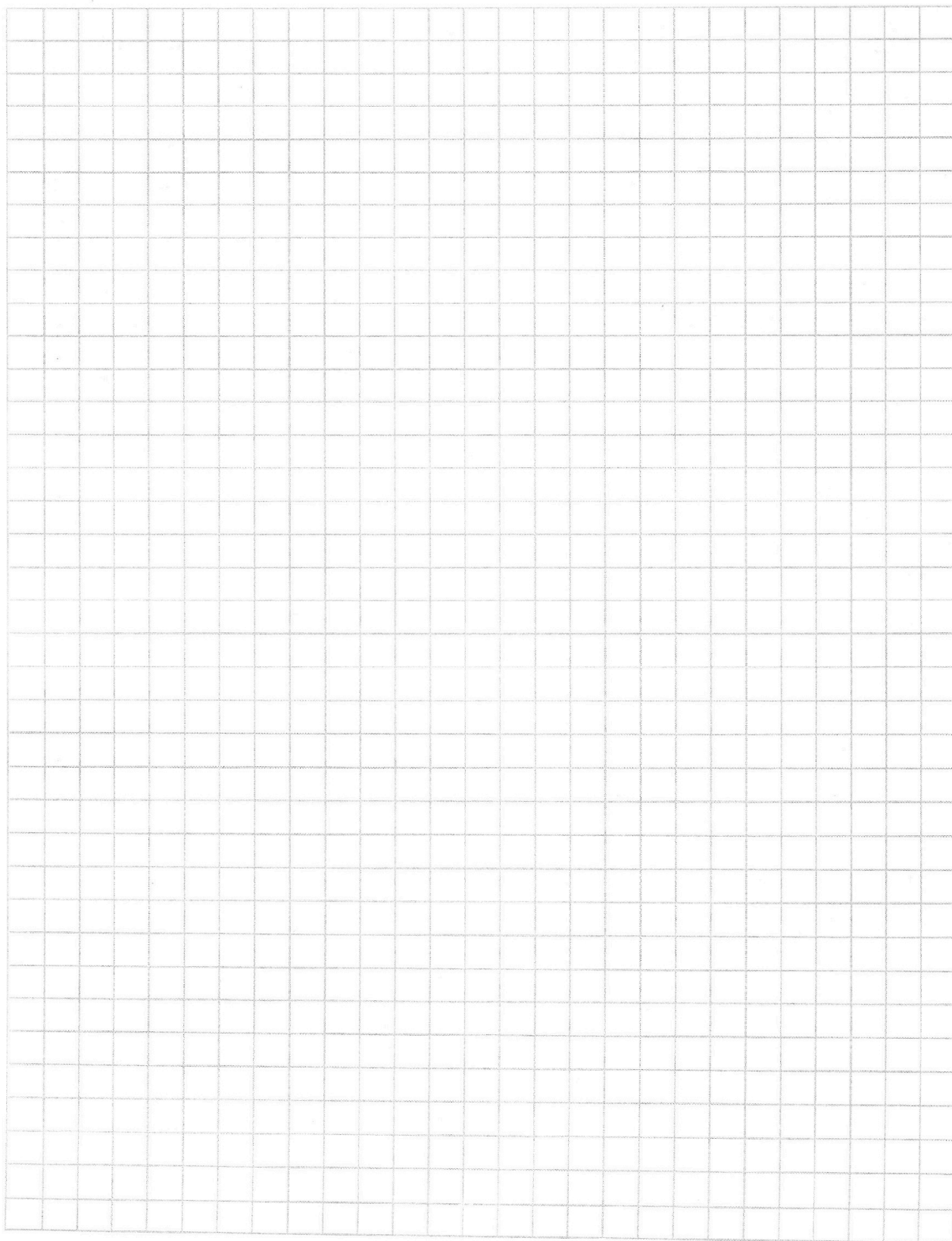


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

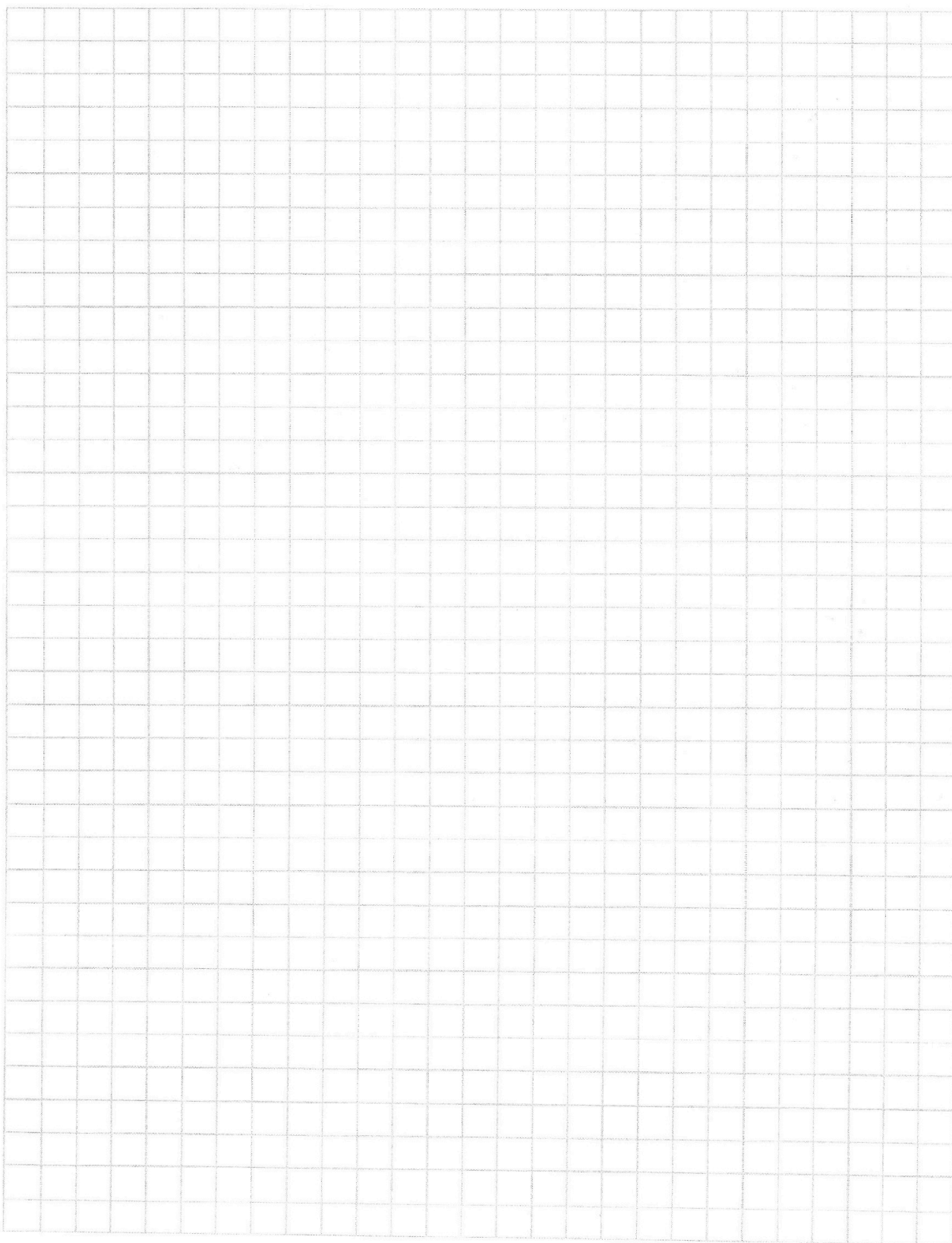
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

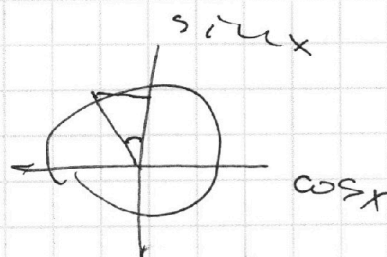
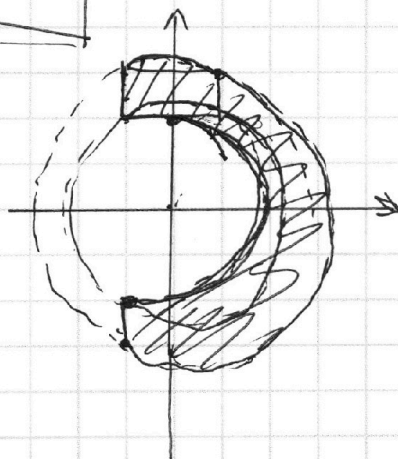
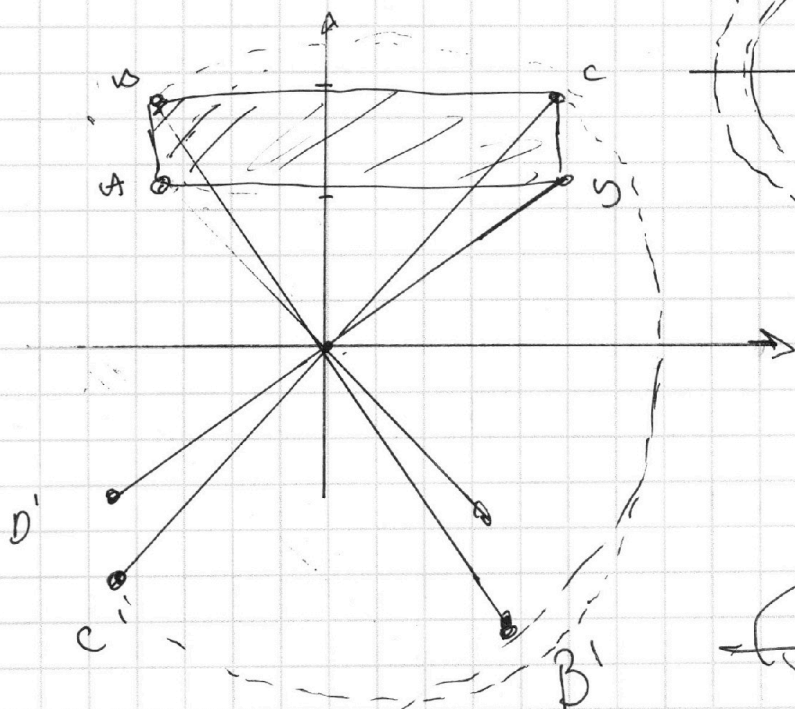
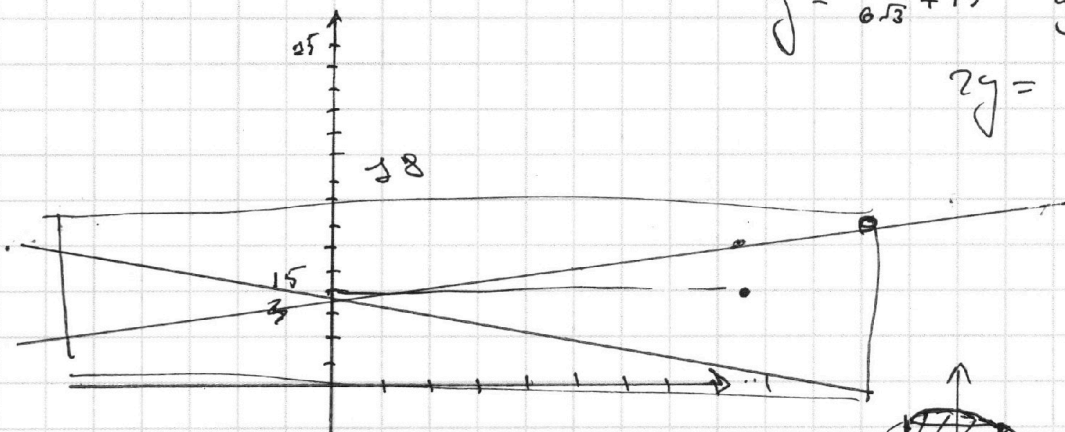
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6$$

$$y = \frac{x}{6\sqrt{3}} + 15 \quad y = -\frac{x}{6\sqrt{3}} + 15$$

$$2y = 6 + 30 \\ y = 18$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (\alpha^2 - \alpha)x + \frac{2 - \alpha^2}{3} = 0 - (128 + 32 + 4)$$

$$(y_5, y_4) \quad \nearrow \text{корни}$$

$$128 + 32 + 4 =$$

$$\frac{164}{2} = 82$$

$$2x^2 - (\alpha^3 - \alpha^2)x - 2\alpha^6 - 8\alpha - 4 = 0$$

$$(y_2, y_7) \quad \nearrow \text{корни}$$

$$-2 \cdot 2^6 - 8 \cdot 2 - 4 =$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$$

$$y_4 = y_2 + \alpha \cdot (n-1)$$

$$-128 - 16 - 4 =$$

$$-128 - 20 = -148 =$$

$$= -74$$

Заметим, что $y_2 + y_7 = y_4 + y_5$

$$\alpha^2 - \alpha = \alpha^3 - \alpha^2$$

$$\alpha(\alpha - 1) = \alpha^2(\alpha - 1) \Rightarrow$$

$$\alpha(\alpha - 1)^2 = 0$$

$$\alpha(\alpha - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 + 81}}{2} = 1 \pm \sqrt{85}$$

$$2 \pm 2\sqrt{44} \quad 1 \pm \sqrt{1 + 82}$$

$$1 \pm \sqrt{25 \cdot 3} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{9999 \dots 99}_{25000 \text{ } 10013} = 9 \cdot 1111 \dots 11$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

11³

$$n^3 = 9^3 \cdot 111 \dots 11^3$$

$$9^3 = 27$$

$$\begin{array}{r} \times 121 \\ 11 \\ \hline 121 \end{array}$$

$$99^2 = 27 \cdot 11^3 = 27 \cdot 1331 = 35937$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times 111 \\ \hline 121 \\ 1210 \\ 12100 \\ \hline 1331 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1331 \\ 27 \\ \hline 30317 \\ + 3662 \\ \hline 35937 \end{array}$$

Пусть $a_n = \underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ раз}}$

Мы знаем, что $9 \leq a_n$

$$n < k$$

$$S_9(a_n) = n - 1$$

$$S_9(a_k) = k - 1$$

$$(999 \dots 90 + 9)^3 = 27 + (999 \dots 90)^3 + 999 \dots 90 \cdot 91$$

$$(99 \dots 9)^3 = 9^3 \cdot (111 \dots 1)^3$$

$$\begin{array}{r} 1111 \dots 111 \\ 1111 \dots 11 \\ 1111 \dots 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \dots 1 \\ 111 \dots 1 \\ 111 \dots 1 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

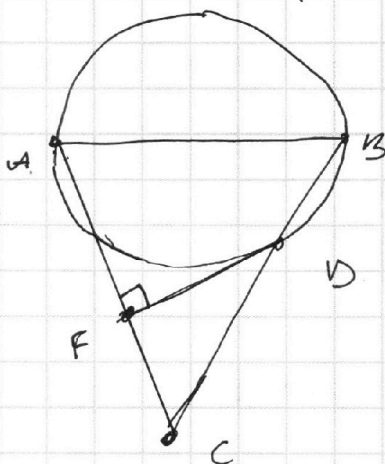
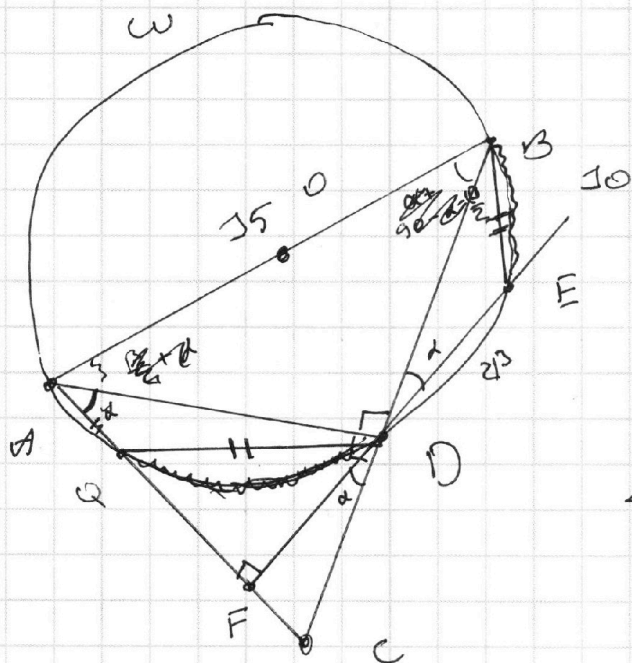
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\beta + \alpha \quad AC = 20, AB = 15, BE = 10.$$

$$90 - \beta - \alpha = \alpha + 90 - 2\alpha - \beta = 90 - \alpha - \beta$$



$$\angle CAD = \angle FDE = \angle BDE = \alpha$$

$\sin \alpha$ и 3 T $\sin \alpha$ g m

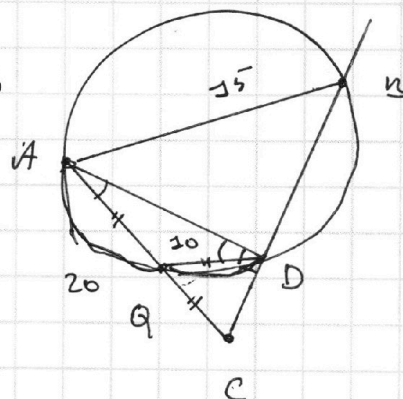
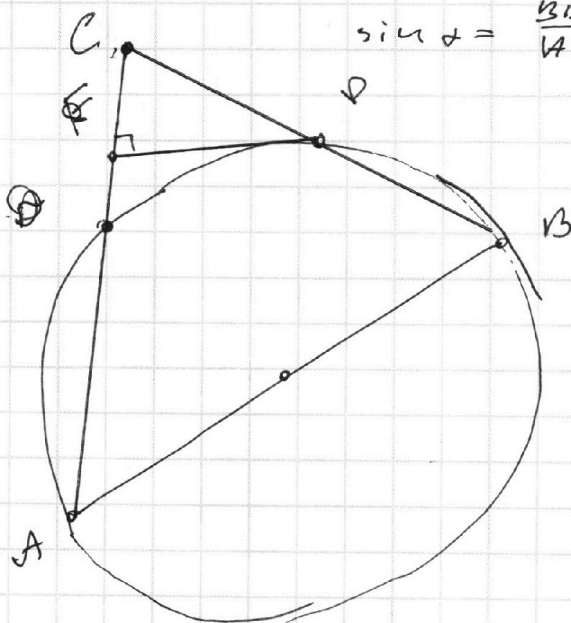
$\triangle DBE$

$$BE = QD$$

$\sin \alpha =$

$$\frac{BE}{\sin \alpha} = 2AB$$

$$\sin \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{1}{3}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$z^2 = xy - 4z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz - 4z - 4x - 4y$$

$$x^2 = yz - 4x$$

$$xy + yz + xz - 4(-4) =$$

$$y^2 = zx - 4y$$

$$xy + yz + xz + 16 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(x-4)(y-4) \quad p_s = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^2} = \frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-4)!} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2} = \frac{5!}{2 \cdot (n-3)(n-4)}$$

$$(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+xz) = x^2+y^2+z^2$$

$$(-4)^2 - 2 \cdot 16 = S^2$$

$$(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+xz) = x^2+y^2+z^2$$

$$\begin{cases} 16 - 2B = A \\ (xy+yz+xz) + 16 = (x^2+y^2+z^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 - 2B = A \\ B + 16 = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 - 2B = B + 16 \\ 3B = 0 \end{cases}$$

B



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$xy - yz = 4z + z^2 - 4x - x^2$$

$$y(x - z) = 4(z - x) + (z - x)(x + z)$$

$$\neq \Rightarrow$$

$$-y = 4 + x + z$$

$$x + z + y = -4$$

$$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$(x + 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8(x + y + z) + 16 \cdot 3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 \cdot 8 + 16 \cdot 3 =$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 16 - ?$$

$$\left(-\frac{4}{3}; -\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

$$\text{или } x = z \Rightarrow y = 4 + x$$

$$\cancel{x + x + x + 4 = -4}$$

$$\text{Если } x = z \Rightarrow xy = 4x + x^2$$

$$\begin{cases} y = 4 + x \\ x^2 = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yx = 4x + x^2 \\ x^2 = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$\cancel{yx = 4x + 4y + y^2}$$

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ (y - 4)^2 = 4y + y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y - 4 & x = z = -\frac{8}{3} \\ y^2 - 8y + 16 = 4y + y^2 \\ 12y = 16 \end{cases} \quad y = \frac{4}{3}$$