МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D. Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω, отличная от D. Найдите AF, если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leqslant 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M, которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D, для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90°$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50°$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Вычтем из первой строки вторую, тогда

$xy - yz = z^2 - 2z - x^2 + 2x$

$(x-z)y = (z+x)(z-x) + 2(x-z)$

$(x-z)y = (x-z)(2-x-z)$

Аналогично если вычтем из второй строки третью и из третей первую

$(y-x)z = (y-x)(2-y-x)$ - из второй третью

$(z-y)x = (z-y)(2-z-y)$ - из третей вторую.

Если $x-z$, $y-x$, $z-y$ все равные 0, то $x=y=z$, тогда $xy = x^2 = z^2 - 2z = x^2 - 2x$, что возможно только при $x=0$, что противоречит условию => не все числа одинаковы => пусть $x \neq y$ (все выражение циклично и мы можем значения менят между переменными и система все равно будет выполнятся).

Тогда $(y-x)z = (y-x)(2-x-y)$, $y-x \neq 0$ => $z = 2-x-y$ => $x+y+z=2$. Тогда $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (2-x)^2 + (2-y)^2 + (2-z)^2 =$

$= (y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$.

Также $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 2^2 = 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Также из системы $xy = -2z + z^2 \Rightarrow z^2 = xy + 2z$,

аналогично $y^2 = zx + 2y$, $x^2 = yz + 2x$.

Тогда $3((x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2) =$

$= \cancel{12}\,6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 6xy + 6yz + 6zx =$

$= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6xy + 6yz + 6zx + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$ (замена) $=$

$= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6xy + 6yz + 6zx + 2(yz + 2x) + 2(zx + 2y) + 2(xy + 2z) =$

$= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 8xy + 8yz + 8zx + 4(x + y + z) =$

$= 4(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + 4(x + y + z) =$

$= 4(x + y + z)^2 + 4(x + y + z) = 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 16 + 8 = 24 \Rightarrow$

$3((x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2) = 24 \Rightarrow (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 8 \Rightarrow$

$(2-z)^2 + (2-x)^2 + (2-y)^2 = 8 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 8.$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$n = (10^{30001} - 1)$

$n^3 = (10^{30001} - 1)^3 = 10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1$,

тогда это равно $10^{60002}(10^{30001} - 3) + 3 \cdot 10^{30001} - 1 \Rightarrow$

нам надо посчитать сколько девяток в числе

$10^{30001} - 3$ и $10^{30001} - 1$, так как число выглядит

как $\overline{(10^{30001} - 3)\underbrace{0\ldots0}_{30000}(3 \cdot 10^{30001} - 1)}$, в числе

$10^{30001} - 3$ будет 30001 цифра, где все девятки кроме

последней (последняя 7) $\Rightarrow$ 30000 девяток. В числе $3 \cdot 10^{30001} - 1$

будет 30002 цифры где все кроме первой это девятки

(первая 2) $\Rightarrow$ 30001 девятка $\Rightarrow$ всего девяток $30001 + 30000 =$

$= 60001$.

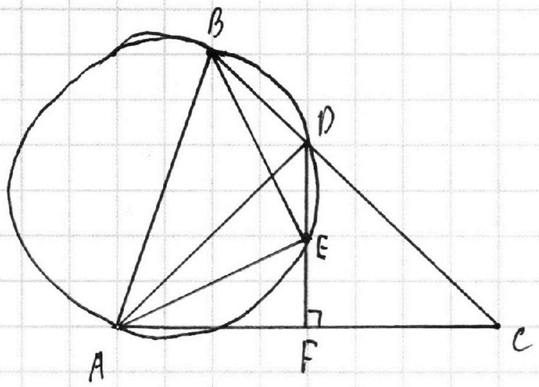
Ответ: 60001.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$ABDE$ - вписанный четырехугольник, AB - диаметр $\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$, т.к опирается на диаметр. $AB = 8$, $BE = 6$, по условию $\Rightarrow$ по пифагору
$AB^2 = BE^2 + AE^2 \Rightarrow$
$64 = 36 + AE^2 \Rightarrow AE^2 = 28 \Rightarrow$
$AE = \sqrt{28}$.

Пусть $\angle ABE = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \cancel{\frac{\sqrt{28}}{2\sqrt{7}}} = \cancel{\frac{\sqrt{28}}{8}} \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\angle ABE = \angle ADE$, так как в $ABDE$ опираются на AE в вписанном. $\angle ADE = \alpha$. $\angle ADB = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр в вписаном четырехугольнике $\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \angle FDC = 90 - \alpha$ $\Rightarrow \angle FCD = \alpha$ (т.к. $\angle DFC = 90^\circ$ и $\Rightarrow \angle FDC + \angle FCD = 90^\circ$).

$\triangle ADC$ прямоугольный ($\angle ADC = 90^\circ$) $\Rightarrow AD = \sin\alpha \cdot AC =$ $= 10 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$. $\triangle AFD$ прямоугольный ($\angle AFD = 90^\circ$) $\Rightarrow$ $AF = \sin\alpha \cdot AD = \frac{5\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{35}{8} = 4{,}375$.

* везде $\sin\alpha$ т.к. $\angle ADF = \alpha$ и $\angle ACD = \alpha$. ($\angle ACD = \angle FCD$), ($\angle ADF = \angle ADE$).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Вероятность того, что он выиграет 5 коробок открыв. Пусть всего коробок n. Тогда шанс выиграть это вероятность достать 3 шарика пятью выбрали (C_{n-3}^{2}, т.к. 3 коробки где шары однозначны и еще какие то 2) делено на количество вариантов выбрать 5 коробок (C_n^5). Аналогично для 7 это C_{n-3}^{4} и C_n^7. Тогда для 5 коробок вероятность

$$\frac{C_{n-3}^{2}}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!\cdot(n-5)!}}{\frac{n!}{5!\cdot(n-5)!}} = \frac{(n-3)!\cdot 5!}{n!\cdot 2!}$$

Теперь посчитаем для 7 коробок

$$\frac{C_{n-3}^{4}}{C_n^7} = \frac{\frac{(n-3)!}{4!\cdot(n-7)!}}{\frac{n!}{7!\cdot(n-7)!}} = \frac{(n-3)!\cdot 7!}{n!\cdot 4!}.$$

Теперь узнаем во сколько раз увеличилась вероятность

$$\frac{\frac{(n-3)!\cdot 7!}{n!\cdot 4!}}{\frac{(n-3)!\cdot 5!}{n!\cdot 2!}} = \frac{7!\cdot 2!}{4!\cdot 5!} = \frac{7\cdot 6\cdot 2}{24} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Ответ: увеличилась вероятность победы в 3,5 раза.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть шестой член ариф прогрессии с периодом k равен n, тогда корни $x^2-(a^2-2a)x+a^2-a-7=0$ будут равны n и $n+k$ и по Виету $n+(n+k)=\cancel{2a-a^2}\ a^2-2a$. Тогда корни $3x^2-(a^3-2a^2)x+6-a^5=0$ будут равны $n-2k$ и $n+3k \Rightarrow$ по Виету $n-2k+n+3k=\cancel{\frac{2a^2-a^3}{3}}\ \frac{a^3-2a^2}{3}$, тогда получается что (домножено на -1) $2a-a^2=\frac{2a^2-a^3}{3} \Rightarrow \frac{2a^2-a^3}{3}+a^2-2a=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2a^2+3a^2-a^3-6a}{3}=0 \Rightarrow 5a^2-a^3-6a=0 \Rightarrow a^3-5a^2+6a=0 \Rightarrow$

$a(a-3)(a-2)=0$. Тогда $a\in\{0;2;3\}$. Проверим

$a=0$, тогда $x^2-(a^2-2a)x+a^2-a-7=x^2-7 \Rightarrow$ корни $\pm\sqrt{7}$.

$3x^2-(a^3-2a^2)x+6-a^5=3x^2+6 \Rightarrow$ корней нет. $\Rightarrow$ не ариф прогрессия.

$a=2$, тогда $x^2-(a^2-2a)x+a^2-a-7=x^2-5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

$x^2-(a^3-2a^2)x+6-a^5=3x^2-26 \Rightarrow$ корни $\pm\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$, но

по ариф прогрессии $-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 5\sqrt{5}$ и $5\sqrt{5}\neq\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ не подходит.

Значит $a=3$. Проверим $x^2-(a^2-2a)x+a^2-a-7=x^2-3x-1$

корни $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$, $3x^2-(a^3-2a^2)x+6-a^5=3x^2-9x-237=x^2-3x-79$

$D=9+316=13\cdot5^2 \Rightarrow x=\frac{3\pm5\sqrt{13}}{2}$, и заметим, что

$\frac{3-5\sqrt{13}}{2}, \frac{3-3\sqrt{13}}{2}, \frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}, \frac{3+3\sqrt{13}}{2}, \frac{3+5\sqrt{13}}{2}$ ариф прогрессия.

Ответ: 3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5) $\angle QMB = \angle BAQ$ из вписаности $ABQM$, $\angle BAQ = 90° - \angle QAC =$

$= 90° - 65° = 25°$.

6) $\angle CMP = \angle CAP$ из вписаности $AMPQC$, $\angle CAP = 90° - \angle BAP =$

$= 90° - 70° = 20°$

7) $\angle BDC = 25° + 20° + 90° = 135°$.

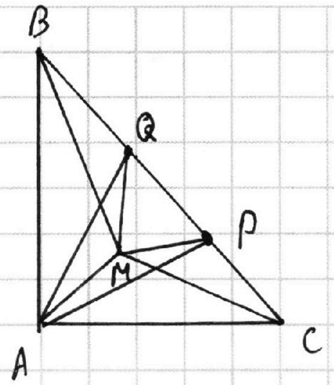
Ответ: $135°$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть точка M - это пересечение всех биссектрис, тогда $\angle ABM = \angle MBC = 20^\circ$, $\angle ACM = \angle QCM = 25^\circ$, $\angle CAM = \angle BAM = 45^\circ$.

2) $AC = CQ \Rightarrow \angle CAQ = \angle CQA = \frac{180-50}{2} = 65^\circ \Rightarrow \angle QAM = 65^\circ - 45^\circ = 20^\circ \Rightarrow ABQM$ вписанный, так как $\angle MAQ = \angle MBQ = 20^\circ$ опирается на QM и BM биссектриса $\Rightarrow AM = MQ$ и также $\angle MQP = \angle BAM = 45^\circ$ из вписаности.

3) $AB = BP \Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \frac{180-40}{2} = 70^\circ \Rightarrow \angle MAP = 70^\circ - 45^\circ = 25^\circ \Rightarrow AMPC$ - вписанный четырехугольник т.к. $\angle MAP = \angle MCP = 25^\circ$ опирается на MP и CM биссектриса $\Rightarrow AM = MP$ и также $\angle MAC = \angle MPQ = 45^\circ$ из вписаности.

4) $MQ = AM$, $MP = AM \Rightarrow$ ~~$\triangle MQP$ равн~~ $QM = MP$ и также $\angle QMP = 180 - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow M$ это и есть D (такая точка D одна это очевидно) $\Rightarrow \angle BDC = \angle BMC = \angle QMB + \angle PMC + \angle QMP$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

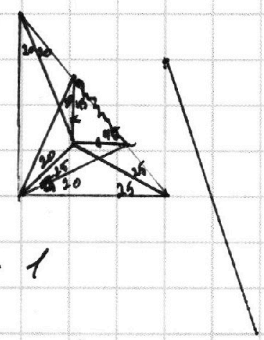
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\times$ ~~99~~ ~~99~~ ~~891~~ ~~891~~ 9801

$\times$ 9801 99 88209 88209 970299

~~$\times$ 999 999~~

2



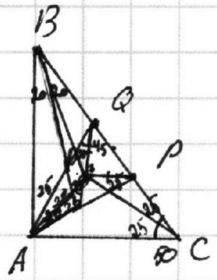
$$(1000-1)^3 = 1000^3 - 3\cdot1000^2 + 3\cdot1000 - 1$$

$$(100-1)^3 = 1000000 - 30000 + 3000 - 1$$

lz

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} \to \frac{C_{n-3}^4}{C_n^7}$$

4



$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{5!\,(n-5)!\,(n-3)!}{2!\cdot(n-5)!\,n!} = \frac{5!\,(n-3)!}{2!\,n!} \qquad \frac{5!\cdot4!}{2!\cdot7!} = \frac{4!}{2\cdot6\cdot7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{7\cdot6}{3\cdot4} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} = \frac{\frac{(n-3)!}{4!(n-7)!}}{\frac{n!}{7!(n-7)!}} = \frac{(n-3)!\cdot7!}{4!\cdot n!}$$

3,5 раза

$$\begin{cases} z^2-2z=xy \\ x^2-2x=yz \\ y^2-2y=zx \end{cases}$$

$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 = 2(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)$

$xy+2z=z^2$

~~$(x+y+z)^2 = x^2+2xy+z^2$~~

$xy-yz = z^2-x^2+2x-2z$

$y(x-z) = (x-z)(-x-z)+2(x-z)$

$(x-z)(2-x-z)$

$y=2-x-z$

$x+y+z=2$

$(z-1)^2 = xy+1$ $\qquad (x^2-2)^2 = yz-2x+4$

$(x-1)^2 = yz+1$

$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2 = xy+yz+zx-2x-2y-2z+12$

$(y-1)^2 = zx+1$

$(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)=g$

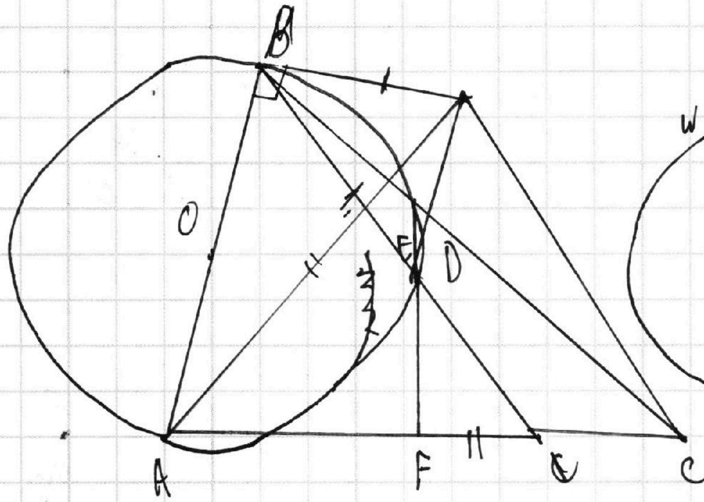
~~xy~~ $x^2-2x-yz=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

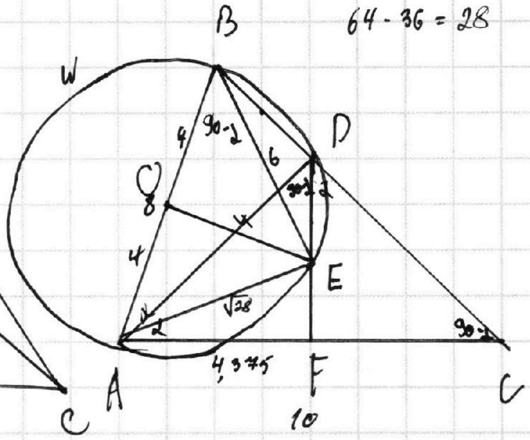
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$64-36=28$



$x^2-(a^2-2a)x+a^2-a-7=0$

$n \quad n+k$

$n-2k \quad n+3k$

$a^4-4a^3+4a^2-4a^2+4a+28=$

$=\sqrt{a^4-4a^3+4a-28}=k$

$3\sqrt{a^6-4a^5+4a^4+12a^5-\cancel{27}\,72}=5\sqrt{a^4-4a^3+4a-28}$

$\frac{\sqrt{\ } \pm a}{6} \qquad \frac{a}{3}$

$n+n+k=\cancel{a^2-2a}\ 2a-a^2$

$n-2k+n+3k=2n+k=\frac{2a^2-a^3}{3}$

$\frac{2a^2-a^3}{3}-(2a-a^2)=0$

$2a^2+3a^2-a^3-6a=0$

$5a^2-a^3-6a=0$

$a^3-5a^2+6a=0$

$a(a^2-5a+6)=0 \quad a=0 \quad a=3 \quad a=2$

$\cancel{80}\cdot\frac{8}{4\sqrt7} \qquad \frac{4}{\sqrt7}$

$\sin 90-\alpha=\frac{\sqrt7}{4}$

$10\cdot\frac{\sqrt7}{4}\cdot\frac{\sqrt7}{4}=10\cdot\frac{7}{16}=$

$=\frac{35}{8}=4{,}375$

$a=2$

x^2-5

$\pm\sqrt5$

$x^2-3x-1=0$

$D=9+4=13$

$\frac{3\pm\sqrt{13}}{2} \qquad \sqrt{13}$

$3x^2-9x-237$

$x^2-3x-79$

$D=9+79\cdot4=$

$=9+316=325=13\cdot25$

$\frac{3-5\sqrt{13}}{2} \qquad \frac{3+5\sqrt{13}}{2}$