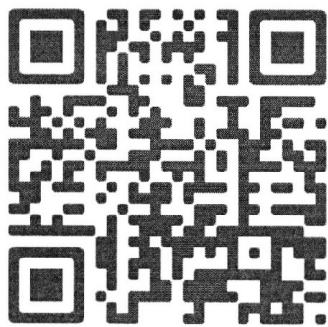
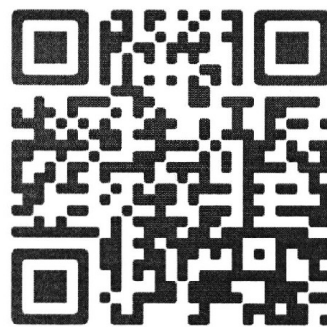




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 & / \cdot x \\ yz = 3x + x^2 & / \cdot z \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y = 3xz + z^2x & (1) \\ yz^2 = 3xz + x^2z & (2) \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

Пусть все три переменные одновременно не равны 0 (т.е. хотя бы одна ненулевая)
Если $x=y=z=0$, то $3^2+3^2+3^2 = 9 \cdot 3 = 27$
 $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = ?$

$$(2)-(1): y(z-x)(z+x) = xz(x-z)$$

$$xz(x-z) + y(x-z)(z+x) = 0$$

$$(x-z)(xz + y(z+x)) = 0 \quad (3)$$

$$x=z \quad \text{или} \quad xz = -y(z+x)$$

$$\begin{cases} zy = 3z + z^2 \\ z^2 = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z + 3 \\ z^2 = 9 + 3z + 9 + 6z + z^2 \\ x = z = 0 \\ 0 = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z + 3 \\ 9z = -18 \\ x = z = 0 \\ y = -3 \quad (\text{считаем, что хотя бы одна ненулевая}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -2 = x & (-2+3)^2 + (1+3)^2 + (-2+3)^2 = 1+16+1 = 18 \\ y = 1 \\ x = z = 0 & 3^2 + 0^2 + 3^2 = 9+9 = 18 \\ y = -3 \end{cases}$$

Из симметрии построим впр-е, аналогичные (3):

$$(x-y)(xy + z(x+y)) = 0 \quad (y-z)(yz + x(z+y)) = 0$$

$$x=y \quad \text{или} \quad xy + z(x+y) = 0 \quad y=z \quad \text{или} \quad yz + x(z+y) = 0$$

→ значения переменных те же, что и при $x=z$, но в другом порядке (из симметрии системы)
→ знак-е искомого выражения (тоже симметричного) то же самое.

Тогда остается ситуация: $\begin{cases} xz = -y(z+x) \\ xy = -z(x+y) \\ yz = -x(z+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y+3) = -y(x+z) \\ z(z+3) = -z(x+y) \\ x(x+3) = -x(y+z) \end{cases}$
(замечим, что если хотя бы одна из пер-ных = 0, то должна быть = 0 еще хотя бы одна, а такие случаи мы разобрали $\Rightarrow x, y, z \neq 0$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+3=-(x+z) \\ z+3=-(x+y) \\ x+3=-(y+z) \end{cases}$$

Сложим все три ур-я: $x+y+z+9 = -2(x+y+z)$
 $3(x+y+z) = -9$
 $\boxed{x+y+z = -3}$

Сложим первые два ур-я исходной системы:

$$\begin{aligned} y(x+z) &= z(z+3) + x(x+3) \\ -y(y+3) &= z(z+3) + x(x+3) \\ \boxed{x(x+3) + y(y+3) + z(z+3) = 0.} \end{aligned}$$

Представим искомое выражение в след. виде:

$$x(x+3) + 3(x+3) + y(y+3) + 3(y+3) + z(z+3) + 3(z+3) = 0 + 3(x+y+z) + 9 \cdot 3 = 3 \cdot (-3) + 27 = -9 + 27 = \boxed{18}.$$

Ответ: 18; 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

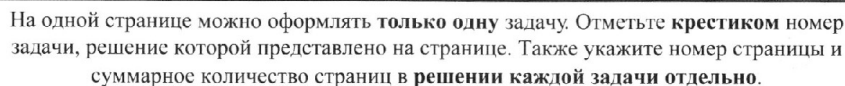
$$n = \underbrace{99 \dots 9}_{40000} = \underbrace{100 \dots 0}_{40000} - 1$$

$$n^3 = (\underbrace{100 \dots 0}_{40000} - 1)^3 = \underbrace{100 \dots 0}_{120000} - 3 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{80000} + 3 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{40000} - 1 = \underbrace{100 \dots 0}_{39000} \underbrace{30 \dots 0}_{39000} \underbrace{30 \dots 0}_{40000} - 1$$

$$-1 = \underbrace{100 \dots 0}_{39000} \underbrace{30 \dots 0}_{39000} \underbrace{299 \dots 9}_{40000}$$

Итого 40000 разрядов в записи числа n^3

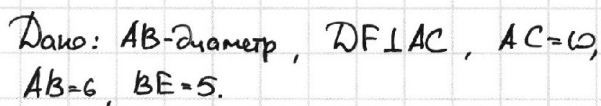
Ответ: 40000



7

СТРАНИЦА
(ИЗ)

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Попоча OR-кода недопустима!



Гаїті: AF

Решение:

- 1) Пусть $AC \cap \omega = K$ (помимо т. A); $\angle AKB = 90^\circ$ (т.к. опирается на диаметр AB)
 2) Пусть $CF = z$, $CD = x$, $BD = y$.
 $\triangle CFD \sim \triangle KCB$ (прямоуг. с общ. острым углом C) $\Rightarrow \frac{z}{x} = \frac{z + KF}{x + y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 + \frac{KF}{z} = 1 + \frac{y}{x} \Rightarrow KF = \frac{y}{x} z$$

- 3) По д-бу аргументов CA и CB к окр-ти ω :

$$Ck \cdot CA = CD \cdot CB$$

$$2\left(\frac{y}{x} + 1\right) \cdot 10 = x(x+y) \quad / \cdot x$$

$$z(x+y) \cdot 10 = x^2(x+y)$$

$0z = x^2$ (т.к. $x, y, z \neq 0$ — это отрезки)

- 4) Заметим, что $\angle CDF = \angle EDB$ (верт. к.) = $\angle EAB$ (т.к. опущ. на одну дугу EB окруж. ω)

Уз $\triangle AEB$ ($\angle AEB = 90^\circ$ как охр. на диаметр AB) $\sin \angle EAB = \frac{EB}{AB} = \frac{5}{6}$.

$U_3 \triangle CDF$ ($\angle CDF = 90^\circ$ w/ yca.) $\sin \angle CDF = \frac{z}{x}$

$$\frac{5}{6} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{6}{5} \cdot 2 \quad (2)$$

$$5) \quad (2) \rightarrow (1): \quad 10z = \left(\frac{6}{5}z\right)^2 = \frac{36}{25}z^2 \Rightarrow 10 = \frac{36}{25}z \Rightarrow z = \frac{250}{36} = \frac{125}{18} = 6\frac{17}{18}$$

$$AF = AC - CF = AC - z = 10 - 6 \frac{17}{18} = 3 \frac{1}{18}.$$

Or: $3 \frac{1}{12}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если игрок выбирает 5 ящиков.

C_n^5 - всего способов выбрать 5 ящ. из n
 n - общее кол-во ящиков

Кол-во благоприят. исходов: $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$, т.к. ^{выбравшие} 3^я коробки (с шариками) фиксированы остаётся C_{n-3}^2

Аналогично если 6 ящиков:

C_n^6 - всего исх.

C_{n-3}^3 - благоприят. исх.

$$P(A) = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

$$P(B) = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$$

- в первом сл.

- в втором сл.

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{C_n^5}{C_n^6} \cdot \frac{C_{n-3}^3}{C_{n-3}^2} = \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!} \cdot \frac{(n-6)! \cdot 6!}{n!} \cdot \frac{(n-3)!}{(n-6)! \cdot 3!} \cdot \frac{(n-5)! \cdot 2!}{(n-3)!} =$$

$$= \frac{1}{5!} \cdot \frac{6!}{1} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{2!}{1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 2.$$

Ответ: 2 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(1) $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ b_5 и b_6 ар. - $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8$
пр. разность - d .

(2) $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ b_3 и b_8

(1): по т. Виета,

$$x_1 + x_2 = a^2 - a = b_5 + b_6 = b_1 + 4d + b_1 + 5d = 2b_1 + 9d \quad (3)$$

(2): $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \quad / : 4$

$$x^2 - \frac{a^3 - a^2}{4}x + \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} = 0$$

по т. Виета: $x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{4} = b_3 + b_8 = b_1 + 2d + b_1 + 7d = 2b_1 + 9d \quad (4)$

Из (3) и (4):

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$4a(a-1) = a^2(a-1)$$

$$a^2(a-1) - 4a(a-1) = 0$$

$$a(a-1)(a-4) = 0$$

$$a=0 \text{ или } a=1 \text{ или } a=4$$

Проверим возможность:

1) $a=0$

$$x^2 - 5 = 0 \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{5} \quad b_5 \text{ и } b_6 = \pm\sqrt{5}$$

$$4x^2 - 4 = 0 \quad x_{3,4} = \pm 1 \quad b_3 \text{ и } b_8 = \pm 1$$

Если пр. возрастает, то получаем: $-1, -\sqrt{5}, \sqrt{5}, 1$ - то, очевидно, не является ^{нужной} ар. пр.

Если пр. убывает, то получаем: $1; \sqrt{5}; -\sqrt{5}; -1$ - аналогично неверно

2) $a=1$

$$x^2 - 4 = 0 \quad x_{1,2} = \pm 2 \quad b_5 \text{ и } b_6 = \pm 2$$

$$4x^2 - 1 = 0 \quad x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \quad b_3 \text{ и } b_8 = \pm \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{matrix} -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 \\ 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2 \end{matrix}$$

~~не подходит, если $b_1 \neq 0$~~

не подходит, если $b_1 \neq 0$ не подходит,
т.к. $d = 1 \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \right)$, а -2 и 2 не
подходят

3) $a = 4$

$$x^2 - 12x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{37}$$

~~$x^2 - 12x + 4 = 0$~~

$$x^2 - 12x - 892 = 0$$

$$x_{3,4} = 6 \pm \sqrt{925} = 6 \pm 5\sqrt{37}$$

$$6 - 5\sqrt{37}$$

$$6 - \sqrt{37}$$

$$6 + \sqrt{37}$$

$$6 + 5\sqrt{37}$$

подходит, если $d = 2\sqrt{37}$ $b_1 = 6 - 9\sqrt{37}$

Ответ: 4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

Разобьём на четыре случая:

$$1) \quad x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 \quad x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y \geq -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3} \quad y \leq 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

(для прямой: $x = 7,5 \quad y = 0$
 $x = 0 \quad y = 45\sqrt{3}$)

(для прямой: $x = 7,5 \quad y = 0$
 $x = 0 \quad y = -45\sqrt{3}$)

$$2x - 15 \leq 3$$

$$2x \leq 18$$

$$x \leq 9$$

Область (I)

$$2) \quad x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 0$$

$$y \geq -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$$

$$y > 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

$$\cancel{x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3}$$

$$y \leq 9\sqrt{3}$$

(II)

$$\cancel{y \leq -3\sqrt{3}x + 9\sqrt{3} + \frac{45\sqrt{3}}{2}}$$
$$\cancel{y \leq -3\sqrt{3}x + \frac{63\sqrt{3}}{2}}$$

$$3) \quad x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} < 0$$

$$x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y < -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$$

$$y \leq 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

$$\cancel{x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3}$$

$$y \geq -9\sqrt{3}$$

(III)

$$4) \quad x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} < 0$$

$$x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} < 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$y < -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$~~ $y < -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$

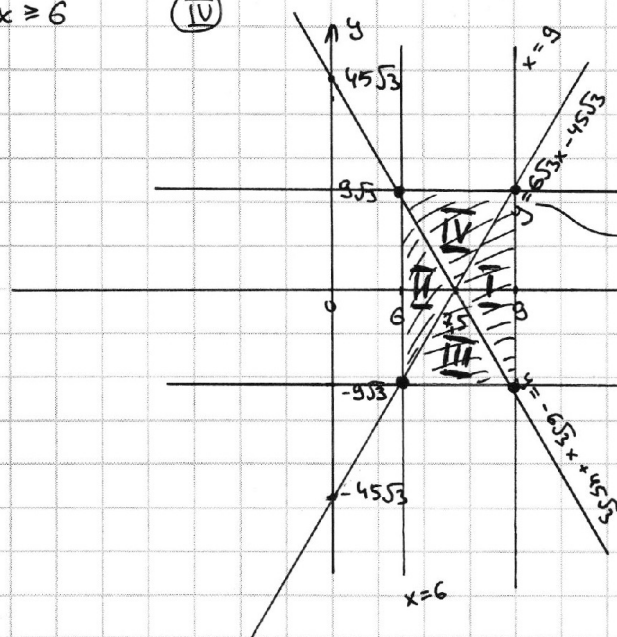
$y > 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$

$-2x + 15 \leq 3$

$2x \geq 12$

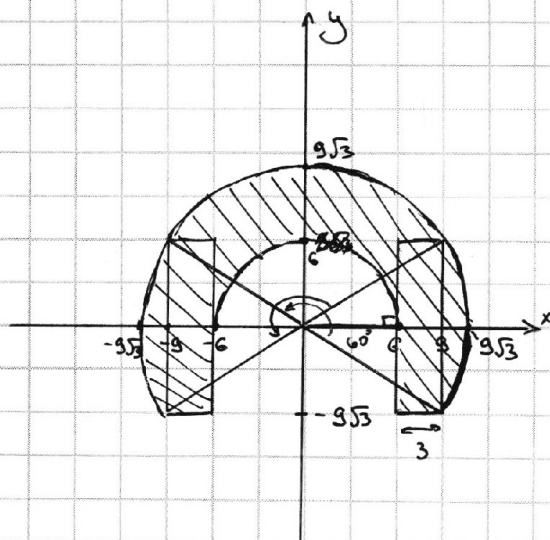
$x \geq 6$

(IV)



изобразим схематично, отметив только характерные точки

подстановкой удовлетворяется, что $(9; 9\sqrt{3})$ есть точка прямой $y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$ (и аналогично для остальных точек)



фигура, которую замечает построений ~~не~~ прямоугольник при повороте состоит из полукольца с внеш. радиусом $R=9\sqrt{3}$ и внутр. $r=6$, двух половинок исходного прямоугольника и двух полуэллипсов

1) Площадь полукольца: $S_1 = \frac{1}{2} (\pi \cdot R^2 - \pi r^2) = \frac{1}{2} \pi (243 - 36) = \frac{1}{2} \pi \cdot 207 = 103,5 \pi$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) Площадь одного полуэлемента: $S_2 = \pi R^2 \cdot \frac{\arctg(\frac{9\sqrt{3}}{9})}{\pi} - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9\sqrt{3} = R^2 \cdot \frac{\arctg(\sqrt{3})}{2} - \frac{81\sqrt{3}}{2} = R^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{81\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{81\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi \cdot 243\pi}{6} - \frac{81\sqrt{3}}{2}$

3) Площадь одного полуэлемента: $S_3 = (9 - \frac{6}{2}) \cdot 9\sqrt{3} = 3 \cdot 9\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$

4) $S_{\phi} = S_1 + 2S_2 + 2S_3 = \frac{207}{2}\pi + 81\pi - 81\sqrt{3} + 54\sqrt{3} = 184,5\pi - 27\sqrt{3}$

Ответ: $184,5\pi - 27\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

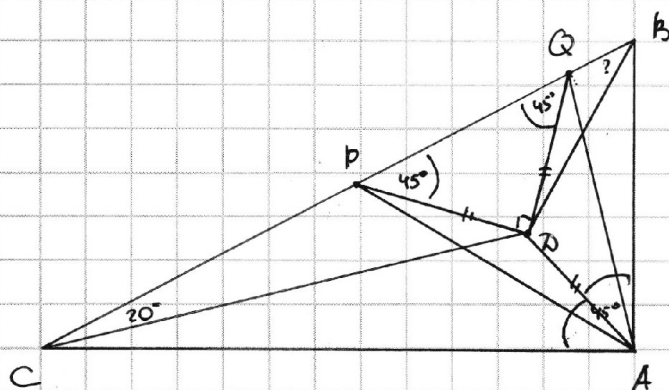
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $DP = DQ$, $CQ = AC$,
 $BP = BA$, $\angle PDQ = 90^\circ$,
 $\angle DCB = 20^\circ$
Найти: $\angle DBC$.

Решение.

1) $\angle BAP = \angle BPA$, $\angle CAQ = \angle CQA$ (из равнобедр. Δ -ков ABP и ACQ)

Сложим: $\angle BAP + \angle CAQ = \angle BPA + \angle CQA$

$\angle BAC + \angle PAQ = 180^\circ - \angle PAQ$

$90^\circ + 2\angle PAQ = 180^\circ$

$\angle PAQ = 45^\circ$

2) Тогда если провести окр-гу с центром в т. D и радиусом DP , то точка A будет лежать на этой окр-гу ($\angle PAQ = \angle PDQ/2$) $\Rightarrow DA = DP = DQ$.

3) $\angle DPQ = \angle DQP = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$ (т.к. ΔPDQ - равнобедр. прямоуг.)

4) ΔADQ (равнобедр.) $\Rightarrow \angle DAQ = \angle DQA$ | $\Rightarrow \angle DAC = \angle DQC = 45^\circ$.
 ΔACQ (равнобедр.) $\Rightarrow \angle CAQ = \angle CQA$

Аналогично $\angle DAB = \angle DPB = 45^\circ$.

5) чет-ки $CPDA$ и $ADQB$ - впис. (т.к. $\angle DAC = \angle DPQ = 45^\circ$ и $\angle DAB = \angle PQD = 45^\circ$) $\Rightarrow$ из чет-ки $CPDA$: $\angle DAP = \angle DCP = 20^\circ$

$\angle DAQ = \angle PAQ - \angle DAP = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$

из чет-ки $ADQB$: $\angle DBQ = \angle DAQ = 25^\circ$.

$\angle DBC = \angle DBQ = 25^\circ$.

Отв: 25° .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

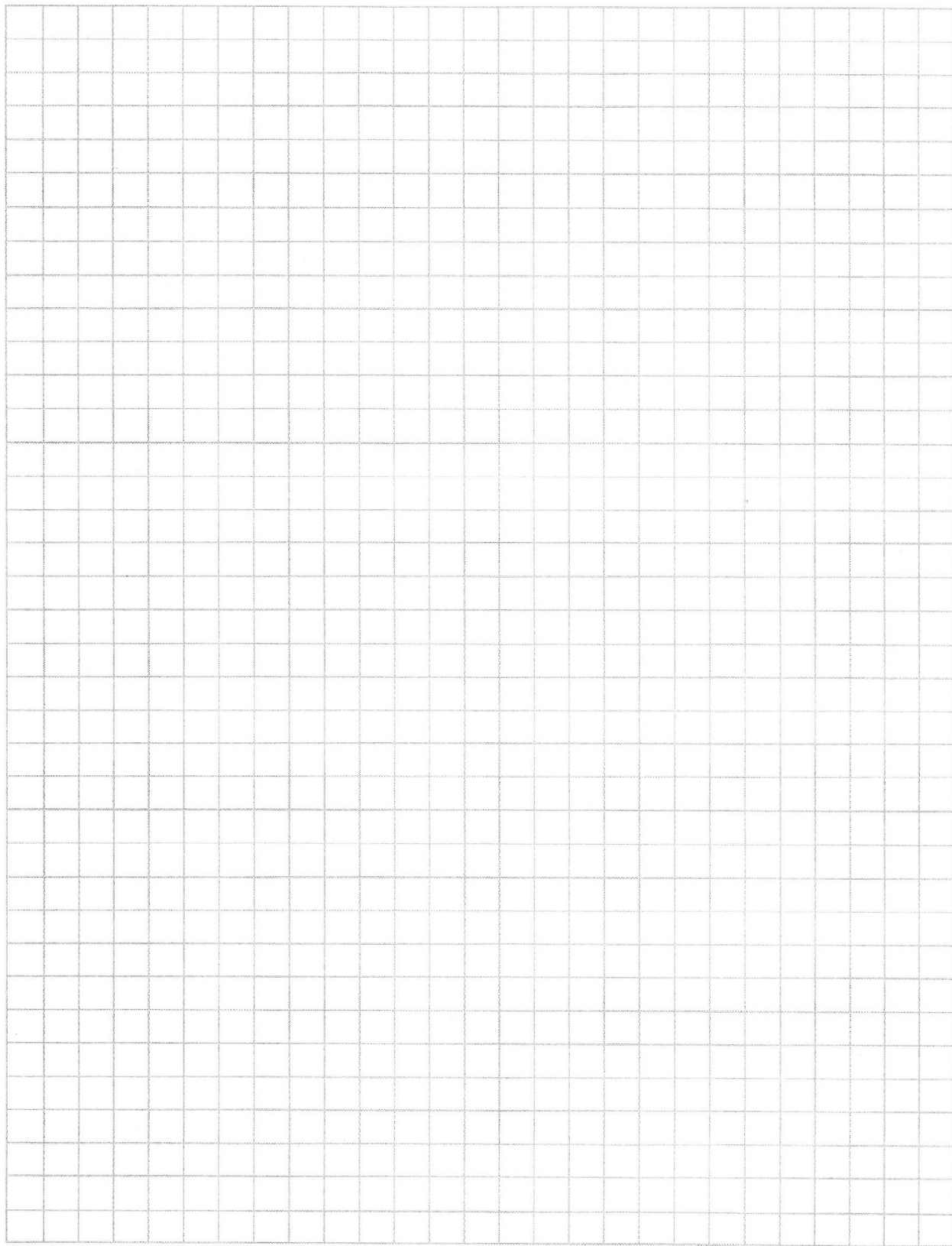
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 1 1 1 1 1 1 1

$$C_n^5 - \text{все исх.}$$

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

$$P(A) = \frac{10}{C_n^5}$$

$$C_n^6 - \text{все}$$

$$C_n^6 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

$$P(B) = \frac{20}{C_n^6}$$

7 кор.

⊗ ○ ⊗ ○ ○ ⊗ ○

$$C_7^5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21$$

$$C_7^6 = 7$$

$$\Delta_n = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

$$\frac{(n-4)(n-5)}{2}$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}, d$$

$$D = (a^2 - a)^2 - 4(a - 5) = a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20$$

$$x_{2,3} = \frac{a^2 - a \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$b_5 + b_6 = 2b_1 + 9d$$

$$2b_1 + 9d = a^2 - a$$

$$2b_1 + 9d = a(a^2 - a)$$

$$a^2 - a = a(a^2 - a)$$

$$(a^2 - a)(1 - a) = 0$$

$$a(a-1)^2 = 0$$

$$a = 0 \quad a = 1$$

$$(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

$$= a^3 + 2a^2b + a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9$

$$x_1 + x_2 = a^2 - a = b_5 + b_6 = 2b_1 + 9d$$

$$2b_1 = -9d \quad d = -\frac{2}{9}b_1$$

$$x_3 + x_4 = a^3 - a^2 = \frac{b_3 + b_2}{4} = \frac{2b_1 + 9d}{4} = \frac{b_1}{2} + \frac{9}{4}d$$

$$a^2 - a = a^3 - a^2$$

$$a(a-1) = a^2(a-1)$$

$$a(a-1)^2 = 0$$

$$a = 0$$

$$a = 1$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

$$4x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

$$64 - 16 = 54 - 6 = 48$$

$$b_1, b_1 + d$$

$$b_1 + 2d = b_1 - \frac{4}{9}b_1 = \frac{5}{9}b_1, \quad b_1 = -\sqrt{5}$$

$$2 \cdot 64 + 2 \cdot$$

$$2a^3 + 2a - a^5 - 4$$

$$2 \cdot 64 + 2 \cdot 4 - 16 \cdot 64 - 4 = -1$$

$$a^2 - a = 4a(a^2 - a)$$

$$(a^2 - a)(4a - 1) = 0$$

$$2a^3 + 2a - a^5 - 4 =$$

$$\begin{array}{r} \times 64 \\ 14 \\ + 256 \\ 64 \\ \hline 296 \end{array}$$

$$a(a-1)(4a-1) = 0$$

$$a = 0 \quad a = 1 \quad a = \frac{1}{4}$$

$$= 2 \cdot 64 + 2 \cdot 4 - 16 \cdot 64 - 4 =$$

$$= 848 - 14 \cdot 64 =$$

$$4 - 14 \cdot 64$$

$$4 - 896 = -892$$

$$\begin{array}{r} -889 \overline{) 37} \\ \cdot 74 \overline{) 12} \\ \hline 149 \end{array}$$

$$6 \pm \sqrt{36 + 892}$$

$$\begin{array}{r} \times 928 \overline{) 32} \\ - 24 \overline{) 25} \\ \hline 188 \\ - 148 \overline{) 40} \\ \hline 40 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = ?$$

$$\left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2 = \frac{y^4 z^4 + z^4 x^4 + x^4 y^4}{x^2 y^2 z^2}$$

$$\begin{cases} xy = z(z+3) \\ yz = x(x+3) \\ zx = y(y+3) \end{cases} \quad \begin{aligned} z+3 &= \frac{xy}{z} \\ x+3 &= \frac{yz}{x} \\ y+3 &= \frac{zx}{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 &= \\ &= x^2 + 3x + y^2 + 3y + z^2 + 3z + \\ &+ 3(x+y+z) + 18 = \\ &= 3(x+y+z) + 18 \end{aligned}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{z}{x} \cdot \frac{z+3}{x+3}$$

$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{z+3}{x+3}$$

$$x^3 + 3x^2 = z^3 + 3z^2$$

$$x^2(x+3) = z^2(z+3) = y^2(y+3)$$

$$-3 + 18 = 15$$

$$18$$

$$\begin{cases} xy^2 = 3z + z^2 y \\ yz = 3x + x^2 \\ zx^2 = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$x(z^2 - y^2) = yz(y - z)$$

$$x(z - y)(z + y) = -yz(y - z)$$

$$x(y + z) = -yz$$

$$x(y + z) = -x(3 + x)$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = -(y + z) \\ y + 3 = -(x + z) \\ z + 3 = -(x + y) \end{cases}$$

$$y(x + z) = (3 + z)z + x(3 + x)$$

$$y(x + z) =$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$y(x + z) = z(z + 3) + x(x + 3)$$

$$xy = -z(x + y)$$

$$-2S = S + 3$$

$$3S = -3$$

$$S = -1$$

$$y = 3 + z$$

$$y = 3 + z$$

$$z^2 = 3y + y^2$$

$$z^2 = 3(3 + z) + (3 + z)^2$$

$$z^2 = 3(3 + z) + (3 + z)^2$$

$$z^2 = 3(3 + z) + (3 + z)^2$$

$$z^2 = 3(3 + z) + (3 + z)^2$$

$$z^2 = 3(3 + z) + (3 + z)^2$$

$$z^2 = 3(3 + z) + (3 + z)^2$$

$$z^2 = 3(3 + z) + (3 + z)^2$$

$$z^2 = 3(3 + z) + (3 + z)^2$$

$$z^2 = 3(3 + z) + (3 + z)^2$$

$$z^2 = 3(3 + z) + (3 + z)^2$$

$$z^2 = 3(3 + z) + (3 + z)^2$$

$$z(z + 3) + \frac{z^2}{x}(z + 3) + \frac{z^4}{y}(z + 3) = 0$$

$$(z + 3)\left(z + \frac{z^2}{x} + \frac{z^4}{y}\right) = 0$$

$$z(z + 3)\left(1 + \frac{z}{x} + \frac{z^3}{y}\right) = 0$$

$$z(z + 3) \frac{xy + zy + zx}{xy} = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \overbrace{99 \dots 9}^{40000}$$

$$h^3$$

$$n = \overbrace{10 \dots 0}^{40000} - 1$$

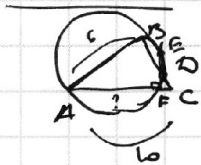
$$h^3 = (\overbrace{10 \dots 0}^{40000} - 1)^3 = \overbrace{10 \dots 0}^{40000} - \underbrace{3 \cdot 10 \dots 0 \cdot 1}_{120000} + \underbrace{3 \cdot 10 \dots 0 \cdot 1}_{80000} - 1 =$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

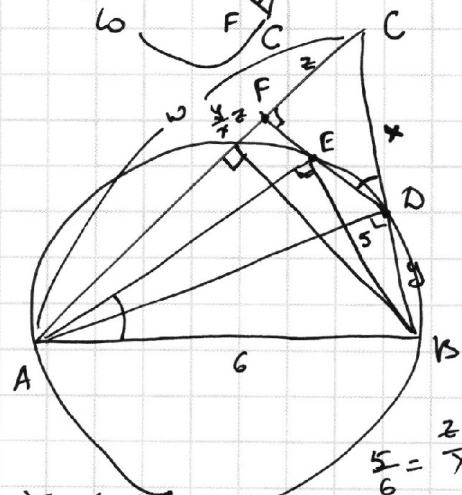
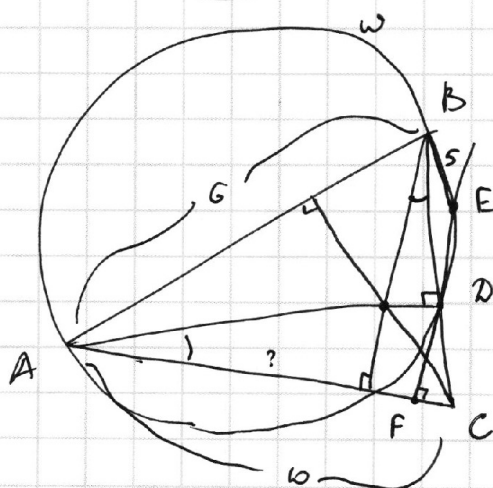
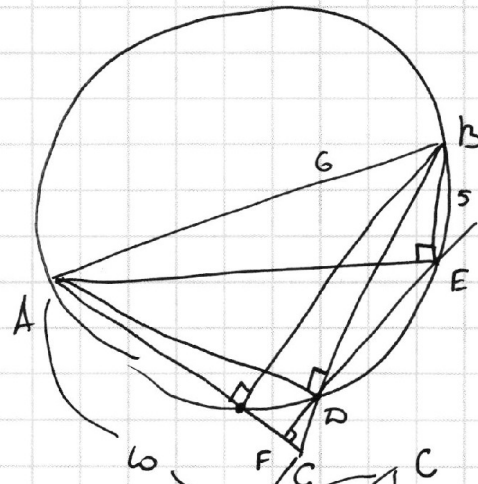
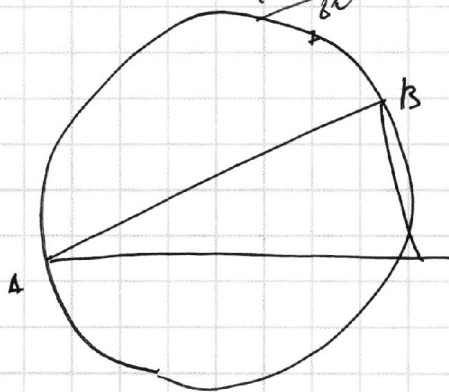
$$+ \underbrace{3 \cdot 10 \dots 0 \cdot 1}_{40000} - 1 =$$

$$= \overbrace{10 \dots 030 \dots 030 \dots 0}^{40000} - 1$$

$$10 \dots 030 \dots 0299 \dots 9$$



$$\begin{array}{r} 125 \overline{) 12} \\ 108 \\ \underline{120} \\ 162 \\ \underline{160} \\ 20 \end{array}$$

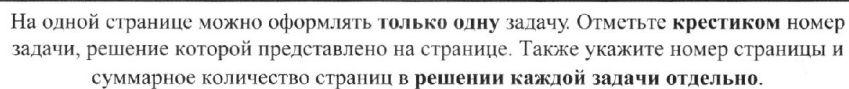


$$x^2(x+y) = z(x+\frac{y}{x}) \cdot 10$$

$$x^3 = 10z = 10 \cdot \frac{5x}{6}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{z}{x}$$

$$x = \frac{50}{6}$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



16.64

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 16 \\ \hline 384 \\ + 64 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + 2a^3 + 2a - a^5 - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x + 128 + 8 - 1024 - 1 = 0$$

136-1025

$$\begin{array}{r} \overset{.9}{10} \overset{10}{25} \\ - 136 \\ \hline 889 \end{array}$$

$$x^2 - 12x + 289 = 0$$

$$6 \pm \sqrt{36 + 889} = 6 \pm \sqrt{925}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 889 \\ + 36 \\ \hline 925 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 925 \overline{) 37} \\ \underline{-24} \\ 185 \\ \underline{-185} \\ 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

1) ① > 0 ② > 0

$$2x - 15 \leq 3$$

$$2x \leq 18$$

$$x \leq 9$$

$$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y \geq -x \cdot 6\sqrt{3} + \frac{15 \cdot 6\sqrt{3}}{2}$$

$$y \geq -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$$

$$x = \frac{45}{6} = 7,5$$

$$y = 0$$

$$\begin{array}{r} 103,5 \\ + 81 \\ \hline 184,5 \end{array}$$

$$54\sqrt{3} + 54\sqrt{3} - 11\sqrt{18} + \frac{2}{11\sqrt{20}}$$

$$54\sqrt{3} = 54 \cdot 1,732 = 93,528$$

$$y = -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$$

$$y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

$$7,5; 0$$

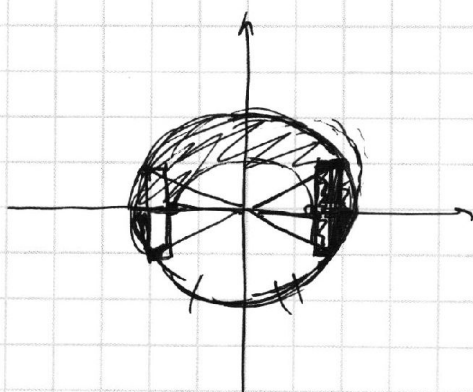
$$0; 45\sqrt{3}$$

$$7,5; 0$$

$$0; -45\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{8\sqrt{3}} = \frac{2}{13,856} = 0,144$$

$$\frac{2}{8\sqrt{3}} = \frac{2}{13,856} = 0,144$$



$$\begin{array}{r} 243 \\ - 36 \\ \hline 207 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 103,5 \\ + 81 \\ \hline 184,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ - 36 \\ \hline 207 \end{array}$$

$$243 + 36 = 279$$

$$S' = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi \cdot 81 - \pi \cdot 36 = 45\pi$$