

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичную запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В теленгрире ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 & \text{(1)} \\ yz = 3x + x^2 & \text{(2)} \\ zx = 3y + y^2 & \text{(3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y = 3zx + z^2x & \text{(1)} \\ yz^2 = 3xz + x^2z & \text{(2)} \\ zx = 3y + y^2 & \text{(3)} \end{cases}$$

Пусть все три переменные одновременно не равны 0 (т.е. хотя бы одна неисчезла).
Если $x=y=z=0$, то $3^2 + 3^2 + 3^2 = 9 \cdot 3 = 27$
 $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 - ?$

$$(2)-(1): y(z-x)(z+x) = xz(x-z)$$

$$xz(x-z) + y(x-z)(z+x) = 0$$

$$(x-z)(xz + y(z+x)) = 0 \quad (3)$$

$$x=z \quad \text{или} \quad xz = -y(z+x)$$

$$\left(\begin{cases} zy = 3z + z^2 \\ z^2 = 3y + y^2 \end{cases} \right)$$

$$\left[\begin{cases} y = 3+z \\ z^2 = 9+3z+9+6z+z^2 \end{cases} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=z=0 \\ 0=3y+y^2 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{cases} y = z+3 \\ 9z = -18 \end{cases} \right]$$

$$\left[\begin{cases} x=z=0 \\ y=-3 \quad (\text{считаем, что хотя бы одна неисчезла}) \end{cases} \right]$$

$$\left[\begin{cases} z=-2=x \\ y=1 \end{cases} \right]$$

$$\left[\begin{cases} x=z=0 \\ y=-3 \end{cases} \right] \quad 3^2 + 0^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$$

Из симметрии построим бир-2, аналогичное (3):

$$(x-y)(xy + z(x+y)) = 0 \quad (y-z)(yz + x(x+y)) = 0$$

$$x=y \quad \text{или} \quad xy + z(x+y) = 0$$

$$y=z \quad \text{или} \quad yz + x(x+y) = 0$$

→ значение переменных те же,

но и при $x=z$, но в другом

порядке (из симметрии системы)

→ зна-е искомого выражение

(то же симметричного) то же самое.

Тогда остается ситуация:
(заметим, что если хотя бы одна из первых = 0, то должна

быть = 0 еще хотя бы одна, а такие случаи мы разобрали $\Rightarrow x, y, z \neq 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} xz = -y(z+x) \\ xy = -z(x+y) \\ yz = -x(z+y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y(y+3) = -y(x+z) \\ z(z+3) = -z(x+y) \\ x(x+3) = -x(y+z) \end{array} \right. \Leftrightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+3 = -(x+z) \\ z+3 = -(x+y) \\ x+3 = -(y+z) \end{cases}$$

Сложим все три ур-я:

$$x+y+z+9 = -2(x+y+z)$$
$$3(x+y+z) = -9$$
$$\boxed{x+y+z = -3}$$

Сложим первые два ур-я исходной системы:

$$y(x+z) = z(z+3) + x(x+3)$$

$$-y(y+3) = z(z+3) + x(x+3)$$

$$\boxed{x(x+3) + y(y+3) + z(z+3) = 0.}$$

Представим исходное ур-е в след. виде:

$$x(x+3) + 3(x+3) + y(y+3) + 3(y+3) + z(z+3) + 3(z+3) = 0 + 3(x+y+z) + 9 \cdot 3 = 3 \cdot (-3) + 27 = -9 + 27 = 18$$

Ответ: 18; 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{99\dots 9}_{40000} = \underbrace{100\dots 0}_{40000} - 1$$

$$n^3 = \underbrace{(100\dots 0 - 1)^3}_{40000} = \underbrace{100\dots 0}_{120\ 000} - 3 \cdot \underbrace{100\dots 0}_{80\ 000} + 3 \cdot \underbrace{100\dots 0}_{40\ 000} - 1 = \underbrace{100\dots 030\dots 030\dots 0}_{39000\ 39000\ 40000} - 1$$

$$-1 = \underbrace{100\dots 030\dots 0299\dots 9}_{39000\ 39000\ 40000}$$

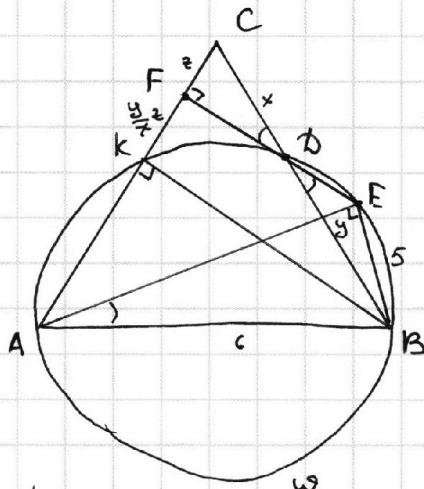
Итого 40000 девяток в записи числа n^3

Отв: 40000

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: АВ-диаметр, $DF \perp AC$, $AC=10$,
 $AB=6$, $BE=5$.

Найти: AF.

Решение:

1) Т.к. $AC \cap AB = K$ (помимо т. A); $\angle AKB = 90^\circ$ (т.к. опирается на диаметр AB)

2) Т.к. $CF=z$, $CD=x$, $BD=y$.

$\triangle CFD \sim \triangle KCB$ (преподв. с обн. острвм углом C) $\Rightarrow \frac{z}{x} = \frac{z+kF}{x+y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 + \frac{kF}{z} = 1 + \frac{y}{x} \Rightarrow kF = \frac{y}{x} z$$

3) Т.к. CA и CB к окр-ту ω : $Ck \cdot CA = CD \cdot CB$

$$z \left(\frac{y}{x} + 1 \right) \cdot 10 = x(x+y) \quad / \cdot x$$

$$z(x+y) \cdot 10 = x^2(x+y)$$

$$(10z = x^2)(\text{т.к. } x, y, z \neq 0 - \text{ это отриц.)}$$

4) Запишем, что $\angle CDF = \angle EDB$ (вертик.) $= \angle EAB$ (т.к. опир. на одну дугу EB) окр-ту ω)

Уз $\triangle AEB$ ($\angle AEB = 90^\circ$ как опир. на диаметр AB) $\sin \angle EAB = \frac{EB}{AB} = \frac{5}{6}$

Уз $\triangle CFD$ ($\angle CFD = 90^\circ$ по ус.) $\sin \angle CDF = \frac{z}{x}$

$$\frac{5}{6} = \frac{z}{x} \Rightarrow x = \frac{6}{5} z \quad (2)$$

$$5) \quad (2) \rightarrow (1): \quad 10z = \left(\frac{6}{5} z \right)^2 = \frac{36}{25} z^2 \Rightarrow 10 = \frac{36}{25} z \Rightarrow z = \frac{250}{36} = \frac{125}{18} = 6 \frac{17}{18}$$

$$AF = AC - CF = AC - z = 10 - 6 \frac{17}{18} = 3 \frac{1}{18}.$$

Отв: $3 \frac{1}{18}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если игрок выбирал 5 коробок.

C_n^5 - всего способов выбрать 5 кор. из n
n - общее кол-во коробок

Кол-во благоприят. исходов.
(какие) фиксировали осталось C_{n-3}^2

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2}, \text{ т.к. } 3^{\text{в}} \text{ коробки (с маркировкой)}$$

Аналогично если 6 коробок:

C_n^6 - всего исх.

C_{n-3}^3 - благоприят. исх.

$$P(A) = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

$$P(B) = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$$

- 6 первым сл.

- 6 вторым сл.

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{C_n^5}{C_n^6} \cdot \frac{C_{n-3}^3}{C_{n-3}^2} = \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!} \cdot \frac{(n-6)! \cdot 6!}{n!} \cdot \frac{(n-3)!}{(n-6)! \cdot 3!} \cdot \frac{(n-5)! \cdot 2!}{(n-3)!} =$$

$$= \frac{1}{5!} \cdot \frac{6!}{1} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{2!}{1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 2.$$

Ответ: 2 раза

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \quad b_5 \text{ и } b_6$$

$$(2) 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \quad b_3 \text{ и } b_8$$

$a^6 - b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8$
 np
 разность $-d$.

(1): По т. Виета,

$$x_1 + x_2 = a^2 - a = b_5 + b_6 = b_1 + 4d + b_1 + 5d = 2b_1 + 9d \quad (3)$$

$$(2): 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \quad | : 4$$

$$x^2 - \frac{a^3 - a^2}{4}x + \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} = 0$$

$$\text{По т. Виета: } x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{4} = b_3 + b_8 = b_1 + 2d + b_1 + 7d = 2b_1 + 9d \quad (4)$$

Уз (3) и (4):

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$4a(a-1) = a^2(a-1)$$

$$a^2(a-1) - 4a(a-1) = 0$$

$$a(a-1)(a-4) = 0$$

$$a=0 \text{ или } a=1 \text{ или } a=4$$

Проделаны возможности:

1) $a=0$

$$x^2 - 5 = 0 \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{5} \quad b_5 \text{ и } b_6 = \pm \sqrt{5}$$

$$4x^2 - 4 = 0 \quad x_{3,4} = \pm 1 \quad b_3 \text{ и } b_8 = \pm 1$$

Если np. возрастает, то получаем: $-1, -\sqrt{5}, \sqrt{5}, 1$ - это, очевидно, не является ^{нужной} np.

Если np. убывает, то получаем: $1; \sqrt{5}; -\sqrt{5}; -1$ - аналогично

нечего

2) $a=1$

$$x^2 - 4 = 0 \quad x_{1,2} = \pm 2 \quad b_5 \text{ и } b_6 = \pm 2$$

$$4x^2 - 1 = 0 \quad x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \quad b_3 \text{ и } b_8 = \pm \frac{1}{2}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 \\ 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2$$

~~Неверное решение~~

Все решения верны, но задача не подходит.
т.к. $d = 1 (\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1)$, а -2 и 2 не подходит

3) $a = 4$

$$x^2 - 12x + 1 = 0$$

$$x_{12} = 6 \pm \sqrt{37}$$

~~Уравнение~~

$$x^2 - 12x - 892 = 0$$

$$x_{34} = 6 \pm \sqrt{925} = 6 \pm 5\sqrt{37}$$

$$6 - 5\sqrt{37} \quad 6 - \sqrt{37} \quad 6 + \sqrt{37} \quad 6 + 5\sqrt{37}$$

подходит, если $d = 2\sqrt{37}$ $b = 6 - 9\sqrt{37}$

Ответ: 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

Разобьём на четыре случая:

$$1) \quad x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 \quad x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y \geq -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3} \quad y \leq 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

(1-я прямая: $x = 7,5 \quad y = 0$
 $x = 0 \quad y = 45\sqrt{3}$)

(2-я прямая: $x = 7,5 \quad y = 0$
 $x = 0 \quad y = -45\sqrt{3}$)

$$2x - 15 \leq 3$$

$$2x \leq 18$$

$$x \leq 9$$

Область (I)

$$2) \quad x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 \quad x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 0$$

$$y \geq -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3} \quad y \leq 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

$$y \leq -\frac{15}{2} + \frac{y}{3\sqrt{3}} \leq 3 \quad y \leq 9\sqrt{3} \quad (\text{II})$$

$$y \leq -3\sqrt{3}x + 9\sqrt{3} + \frac{45\sqrt{3}}{2}$$

$$y \leq -3\sqrt{3}x + \frac{63\sqrt{3}}{2}$$

$$3) \quad x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} < 0 \quad x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y < -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3} \quad y \leq 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

$$-\frac{y}{3\sqrt{3}} \leq 3$$

$$y \geq -9\sqrt{3}$$

(III)

$$4) \quad x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} < 0 \quad x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} < 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

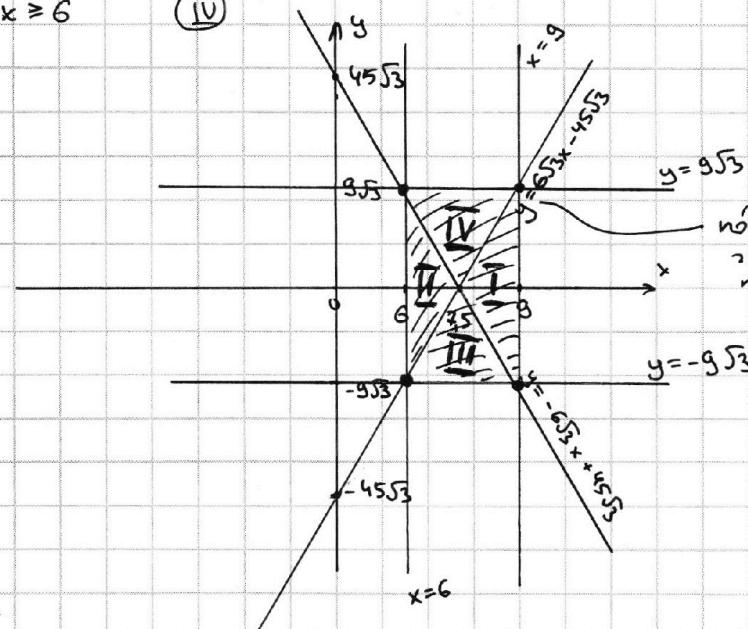
~~$y < -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$~~

$$-2x + 15 \leq 3$$

$$2x \geq 12$$

$$x \geq 6$$

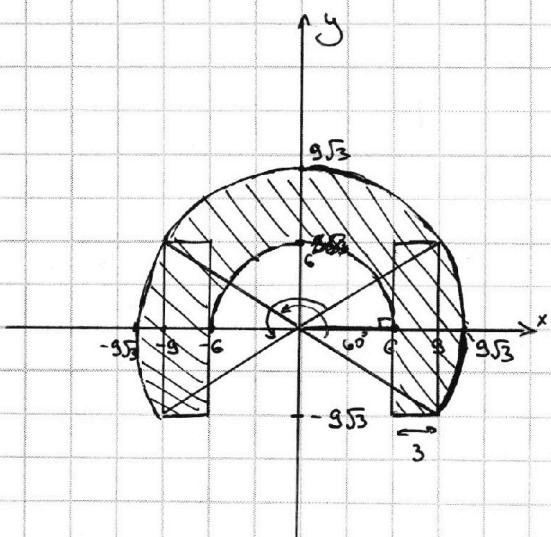
(IV)



изобразим схематично, отгетив некоторые характеристики т.к.ли

подставляемый членом, ≥ 0 ($9; 9\sqrt{3}$) эта-та точка прямой $y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$ (и аналогично для остальных точек)

$$y = -9\sqrt{3}$$



Фигура, которую замечает построенный ~~из~~ прямоугольник при повороте состоит из полукольца с внеш. радиусом $2\sqrt{3}$ и внутр. $r=6$, двух половинок исходного прямоугольника и двух полуосегментов

i) Площадь полукольца: $S_1 = \frac{1}{2} (\pi \cdot R^2 - \pi r^2) = \frac{1}{2} \pi (243 - 36) =$
 $= \frac{1}{2} \pi \cdot 207 = 103,5 \pi$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \text{ Площадь одного полусегмента: } S_2 = \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{\arctg\left(\frac{9\sqrt{3}}{9}\right)}{2} - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9\sqrt{3} = R^2 \cdot \frac{\arctg(9\sqrt{3})}{2} - \frac{81\sqrt{3}}{2} = R^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{81\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{81\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi R^2}{12} - \frac{81\sqrt{3}}{2} =$$

$$3) \text{ Площадь одного полуправильного сектора: } S_3 = \left(9 - \frac{6}{\pi}\right) \cdot 9\sqrt{3} = 3 \cdot 9\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$$

$$4) S_{\phi} = S_1 + 2S_2 + 2S_3 = \frac{207}{2}\pi + 81\pi - 81\sqrt{3} + 54\sqrt{3} = 184,5\pi - 27\sqrt{3}$$

Отв: $184,5\pi - 27\sqrt{3}$.

I-

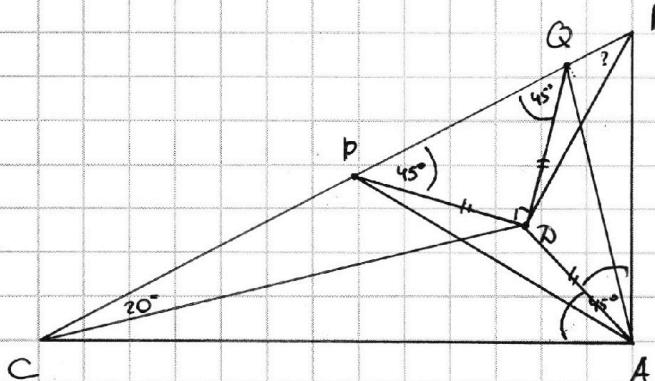
I-

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $DP = DQ$, $CQ = AC$,
 $BP = BA$, $\angle P D Q = 90^\circ$,
 $\angle D C B = 20^\circ$
Найти: $\angle D B C$.

Решение:

1) $\angle BAP = \angle BPA$, $\angle CAQ = \angle CQA$ (из равноделр. \triangle -коф ABP и ACQ)

$$\begin{aligned} \text{Сложим: } & \angle BAP + \angle CAQ = \angle BPA + \angle CQA \\ & \angle BAC + \angle PAQ = 180^\circ - \angle PAQ \\ & 90^\circ + 2\angle PAQ = 180^\circ \\ & \angle PAQ = 45^\circ \end{aligned}$$

2) Тогда если провести окр-ку с центром B т. D и радиусом DB , то точка A будет лежать на этой окр-ке ($\angle BAC = \angle PDQ/2$) $\Rightarrow DA = DP = DQ$.

3) $\angle DPQ = \angle DQP = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$ (т.к. $\triangle PDQ$ - равноделр. прямой.)

4) $\triangle ADQ$ (равноделр.) $\Rightarrow \angle DAQ = \angle DQA \quad | \Rightarrow \angle DAC = \angle DQC = 45^\circ$.
 $\triangle ACC$ (равноделр.) $\Rightarrow \angle CAQ = \angle CQA$

Аналогично $\angle DAB = \angle DPB = 45^\circ$.

5) из-за $\triangle CPDA$ и $\triangle ADQB$ - внuc. (т.к. $\angle DAC = \angle DPQ = 45^\circ$ и $\angle DAB = \angle PQD = 45^\circ$) \Rightarrow из-за $\triangle CPDA$: $\angle DAP = \angle DCQ = 20^\circ$

$$\angle DAC = \angle PAQ - \angle DAP = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$$

из-за $\triangle ADQB$: $\angle DBQ = \angle DAQ = 25^\circ$.

$$\angle DBC = \angle DBQ = 25^\circ$$

Отв: 25° .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1 2 10 10 10 10 10 10 10 n

$$C_n^5 = \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10$$

$$P(A) = \frac{10}{C_n^5}$$

$$C_n^6 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

$$P(B) = \frac{20}{C_n^6}$$

7 квр.

⊗ 0 ⊗ 0 0 ⊗ 0

$$C_7^5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21$$

$$\text{дн. } \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

$$C_7^6 = 7$$

$$\frac{(n-4)(n-5)}{2}$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 b_{10} d$$

$$D = (a^2 - a)^2 - 4(a - 5) = a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20$$

~~$$x^2 - a^2 + a + 5$$~~

$$b_5 + b_6 = 2b_1 + 3d$$

$$2b_1 + 3d = a^2 - a$$

$$2b_1 + 3d = a(a^2 - a)$$

$$a^2 - a = a(a^2 - a)$$

$$(a^2 - a)(1 - a) = 0$$

$$a(a-1)^2 = 0$$

$$a=0 \quad a=1$$

$$(a+b)^3 = \begin{aligned} & (a^2 \cdot b^2 \cdot b^2) (a^2 \cdot b) \\ & a^2 \cdot 2a^2 b + a^2 \cdot b^2 \cdot b \\ & + 2ab^2 \cdot ab^2 + ab^2 \cdot b^2 \\ & = a^2 \cdot 3b^2 \cdot b^2 \\ & + 3ab^2 \cdot b^2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$b_1, b_2, b_3, \underbrace{b_4}_{\sim}, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9$$

$$x_1 + x_2 = a^2 - a = b_5 + b_6 = 2b_1 + 9d$$

$$\cancel{2b_1} = -3d \quad d = \frac{2}{9} \cancel{b_1}$$

$$x_3 + x_4 = a^3 - a^2 = \frac{b_3 + b_8}{4} = \frac{2b_1 + 9d}{4} = \frac{b_1}{2} + \frac{9}{4}d$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 2$$

$$4x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

$$a^2 - a = a^3 - a^2$$

$$a(a-1) = a^2(a-1)$$

$$a(a-1)^2 = 0$$

$$a=0 \quad a=1$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$4x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$C_4 - C_1 = 5C_4 - C = 4C$$

$$b_1$$

$$b_1 + d$$

$$b_1 + 2d = b_1 - \frac{4}{9}b_1 = \frac{5}{9}b_1, \text{ т.к. } = -\sqrt{5}$$

$$2 \cdot 64 + 2 \cdot$$

$$2a^3 + 2a - a^5 - 4$$

$$2 \cdot 64 + 2 \cdot 4 - 16 \cdot 64 - 4 = -1$$

$$a^2 - a = 4a(a^2 - a)$$

$$\sqrt{5}$$

$$1$$

$$(a^2 - a)(4a - 1) = 0$$

$$2a^3 + 2a - a^5 - 4 =$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 14 \\ \hline 256 \\ + 64 \\ \hline 320 \end{array}$$

$$a(a-1)(4a-1) = 0$$

$$a=0 \quad a=1 \quad a = \frac{1}{4}$$

$$= 2 \cdot 64 + 2 \cdot 4 - 16 \cdot 64 - 4 =$$

$$= 8 \cancel{4} 4 \cancel{7} + -14 \cdot 64 =$$

$$4 - 14 \cdot 64$$

$$4 - 656 = -892$$

$$6 \pm \sqrt{36 + 652}$$

$$328$$

$$\begin{array}{r} 928 | 32 \\ \hline 24 \\ -188 \\ \hline 148 \\ -144 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\frac{4}{3}$$

$$= \overline{889} \overline{37}$$

$$\begin{array}{r} 74 \\ \hline 149 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ y^2 = 3x + x^2 \\ 2x = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 - ?$$

$$\left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2 = \frac{y^4 z^4 + z^4 x^4 + x^4 y^4}{x^2 y^2 z^2}$$

$$\begin{cases} xy = z(z+3) \\ yz = x(x+3) \\ zx = y(y+3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z+3 &= \frac{xy}{z} \\ x+3 &= \frac{yz}{x} \\ y+3 &= \frac{zx}{y} \end{aligned}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{z}{x} \cdot \frac{z+3}{x+3}$$

$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{z+3}{x+3}$$

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 &= z^3 + 3z^2 \\ x^2(z+3) &= z^2(z+3) = y^2(y+3) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} xy^2 = 3zy + z^2y \\ yz^2 = 3x + x^2 \\ zx^2 = 3yz + y^2z \end{cases}$$

$$x(z^2 - y^2) = yz(y-z)$$

$$x(z-y)(z+y) = -yz(y-z)$$

$$x(y+z) = -yz \quad yz = -(y+z)$$

$$x(y+z) = -x(3+x)$$

$$\begin{cases} x+3 = -(y+z) \\ y+3 = -(x+z) \end{cases}$$

$$z+3 = -(x+y)$$

$$xy = -z(x+y)$$

~~$$xy = -z(x+y)$$~~

$$-2S = S+3$$

$$3S = -3$$

$$S = -1$$

$$y(x+z) = (3+z)z + x(3+x)$$

$$y(x+z) =$$

$$-y(y+3) = z(z+3) + x(x+3)$$

$$z(z+3) + x(x+3) + y(y+3) = 0$$

$$xy + yz + zx = 0$$

$$y(x+z) + zx = 0$$

$$y = 3+z$$

$$z(z+3) + \frac{z^2}{x}(z+3) + \frac{z^2}{y}(z+3) = 0$$

$$y = 3+z$$

$$(z+3)\left(z + \frac{z^2}{x} + \frac{z^2}{y}\right) = 0$$

$$z^2 = 3(z+3) +$$

$$+ (3+z)^2$$

$$z(z+3)\left(1 + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}\right) = 0$$

$$z(z+3) \frac{xy + yz + zx}{xy} = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{99\ldots9}_{40000}$$

h^3

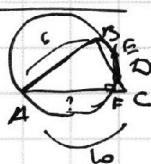
$$n = \underbrace{10\ldots0}_{40000} - 1$$

$$h^3 = (\underbrace{10\ldots0}_{40000} - 1)^3 = \underbrace{10\ldots0}_{120000} - 3 \cdot \underbrace{10\ldots0}_{80000} \cdot 1 +$$

$$+ 3 \cdot \underbrace{10\ldots0}_{40000} \cdot 1 - 1 =$$

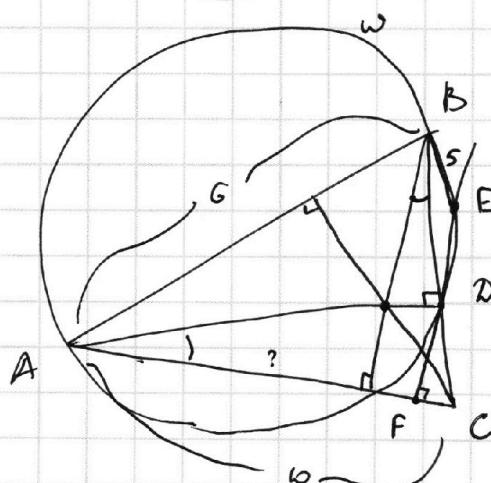
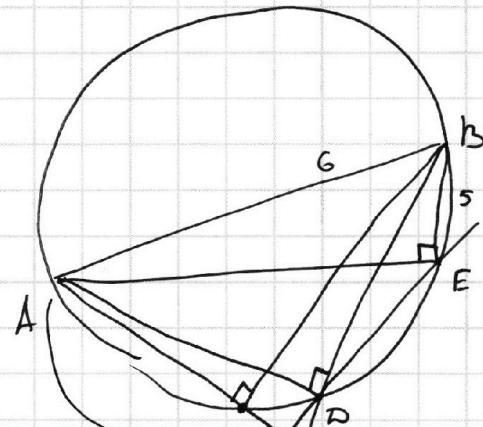
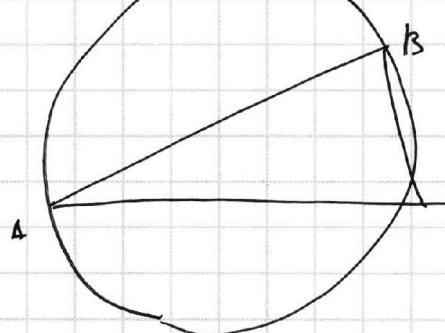
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$= \underbrace{10\ldots030\ldots030..0}_{40000} - 1$$



$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 12 \\ \hline 125 \\ 120 \\ \hline 162 \\ 80 \\ \hline \end{array}$$

$$10\ldots030\ldots0289\ldots9$$



$$\begin{aligned} x^2(x+y) &= z(x+\frac{y}{z}) \cdot 6 \cdot 10 \\ x^2 = 10z &= 10 \cdot \frac{50}{6} \end{aligned}$$

$$x = \frac{50}{6}$$

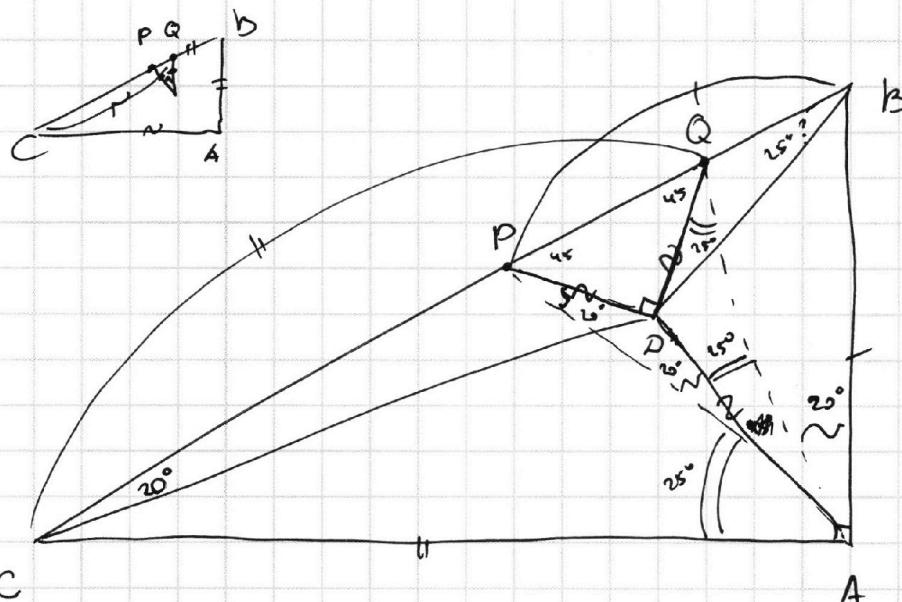


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$16 \cdot 64$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 16 \\ \hline 384 \\ + 64 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + 2a^3 + 2a - a^5 - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x + 128 + 8 - 1024 - 1 = 0$$

$$136 - 1025$$

$$\begin{array}{r} 136 \\ - 1025 \\ \hline 889 \end{array}$$

$$x^2 - 12x - 889 = 0$$

$$6 \pm \sqrt{36 + 889} = 6 \pm \sqrt{925}$$

$$\begin{array}{r} 889 \\ + 36 \\ \hline 925 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 925 \\ - 74 \\ \hline 185 \\ - 135 \\ \hline 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

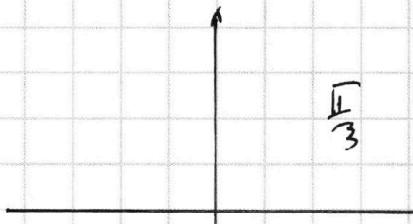
$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

1) ① > 0 ② > 0

$$2x - 15 \leq 3$$

$$2x \leq 18$$

$$x \leq 9$$



$$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y \geq -x \cdot 6\sqrt{3} + \frac{15 \cdot 6\sqrt{3}}{2}$$

$$y \geq -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$$

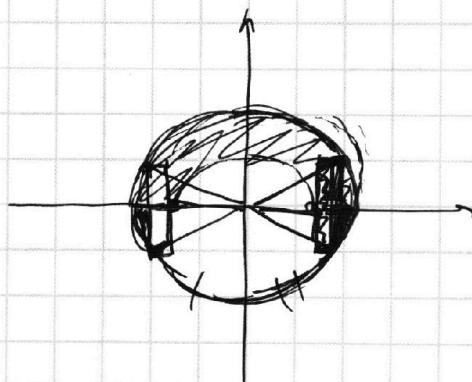
$$x = \frac{45}{6} = 7,5 \quad y = 0$$

$$\begin{aligned} & 19 \cdot \frac{18}{6\sqrt{3}} - 45\sqrt{3} \\ & 18 + 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 103,5 \\ + 61 \\ \hline 184,5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & y = -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3} \quad 7,5; 0 \\ & y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3} \quad 0; 45\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$5\sqrt{45} = 5 \cdot 3\sqrt{5}$$



$$\begin{aligned} & 243 - 36 = 207 \\ & 61 \cdot 3 - 36 = 207 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{6\sqrt{3}} = \frac{2}{6\sqrt{3}} \\ & 243 \cdot \frac{1}{6} = 40.5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 01 \\ 02 \\ 03 \\ 04 \\ 05 \\ 06 \\ 07 \\ 08 \\ 09 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \frac{202}{36} = 5.611111111111111 \\ & = 5.61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 243 - 36 = 207 \\ & 61 \cdot 3 - 36 = 207 \end{aligned}$$

$$= 243 + 36 = 279$$

$$18$$

$$S = \pi r^2 - \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 3^2 = \pi \cdot 3^2 = 27\pi$$