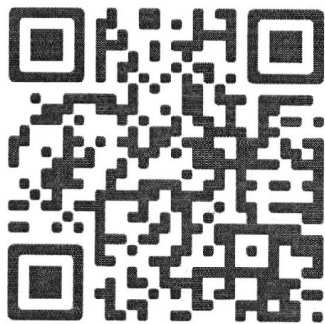




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $2\frac{2}{3}; 8$.

Вычтем из 1^{ого} уравнения системы 2^{ое}: $xy - yz = -2z + z^2 + 2x - x^2$

$$y(x-z) = -(x+z)(x-z) + 2(x-z)$$

1) Пусть $(x-z) = 0 \Rightarrow x = z \Rightarrow$ из 1^{ого} ур-ия (1): $xy = x^2 - 2x$

$$\text{По условию } x, y, z \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} y = x-2 \\ x = z \end{matrix} \Rightarrow y = z-2$$

Из 3^{ого} ур-ия: $x^2 = y(y-2) = (x-2)(x-4)$

$$x^2 = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow 8 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$$

$$z = 1\frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}. \text{ Проверка: } \begin{cases} xy = 2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases}; \begin{cases} -\frac{8}{9} = -\frac{8}{3} + \frac{16}{9} \checkmark \\ -\frac{8}{9} = -\frac{8}{3} + \frac{16}{9} \checkmark \\ \frac{16}{9} = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} \checkmark \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} = 24:9 = 8:3 = 2\frac{2}{3}$$

2) Если $(x-z) \neq 0$, то: $y = 2 - x - z \Rightarrow x + y + z = 2$

$$1. (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (2-x)^2 + (2-y)^2 + (2-z)^2 = (y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx)$$

$$2. (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4(x+y+z) + 12 = (x^2 + y^2 + z^2) + 4$$

-8, т.к. $x+y+z=2$

$$3. (x-2)^2 = (2-x)^2 = (y+z)^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (y+z)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = y^2 + 2yz + z^2 + y^2 + 4 - 4y + z^2 - 4z + 4$$

$$yz = -2x + x^2 \Rightarrow 2yz = 2x^2 - 4x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 - 4(x+y+z)$$

$$x+y+z=2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 &= \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 - 8 = \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

Из 1., 2. и 3. мы получим, что данное выражение равно:

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 + y^2 + z^2) + 4 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx)$$

$$\text{Следовательно, } 2(x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 + y^2 + z^2) + 4$$

$$\Downarrow \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) = 8$$

$$\text{Мы из 3. докажем, что } (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 8.$$

При $x=z$ сумма из условия будет равна $2\frac{2}{3}$, при $x \neq z = 8$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: 60001.

Представим $n^3 = \underbrace{(99 \dots 999)}_{30001}^3$, как $(10^{30001} - 1)^3$, тогда $n^3 =$
 $= 10^{30003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1.$

1) $10^{30003} - 3 \cdot 10^{60002} =$

$$\begin{array}{r} 100 \dots 000 \dots 000 \\ - 30 \dots 000 \\ \hline 99 \dots 970 \dots 000 \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{30000} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{60002}$

2) $(10^{30003} - 3 \cdot 10^{60002}) + 3 \cdot 10^{30001} =$

$$\begin{array}{r} 99 \dots 970 \dots 000 \dots 00 \\ + 30 \dots 00 \\ \hline 99 \dots 970 \dots 030 \dots 00 \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{30000} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{30000} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{30001}$

3) $((10^{30003} - 3 \cdot 10^{60002}) + 3 \cdot 10^{30001}) - 1 =$

$$\begin{array}{r} 99 \dots 99700 \dots 00299 \dots 99 \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{30000} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{30000} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{30001}$

Следовательно, выразив $n^3 = (10^{30001} - 1)^3$, мы получили, что в десятичной записи числа n^3 содержится $30000 + 30001 =$
 $= 60001$ девяток



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\frac{35}{8} = 4,375$.

рассмотрим прямоугольники,
из которых мы можем найти

AF:

$\triangle AFE, \triangle AFD, \triangle EFC$

(найдем FC $\Rightarrow$ зная длину

AC, найдем AF), $\triangle DFC$

(аналогично с $\triangle EFC$)

AB - диаметр $\Rightarrow \angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$

(опираются на AB) $\Rightarrow \triangle AEB$ - к/у,

$AB=8, BE=6 \Rightarrow AE = \sqrt{64-36} = 2\sqrt{7}$

$\angle ADE$ опирается на $\overset{\frown}{AE}$

$\angle ABE$ опирается на $\overset{\frown}{AE} \Rightarrow \angle ADE = \angle ABE$
 $\angle AFD = 90^\circ = \angle AEB \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle AEB$
 (по 2 углам)

$\angle ADB = 90^\circ$ (опир. на diam.) $\Rightarrow \angle FDC = 180^\circ - 90^\circ - \angle ADE = 90^\circ - \angle ABE =$

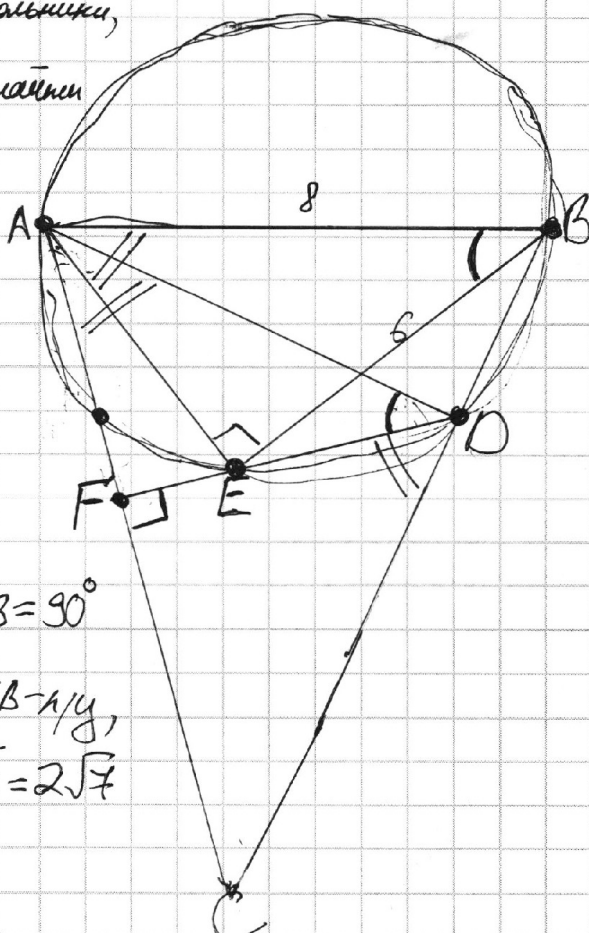
$\angle EAB$; $\angle DFC = 90^\circ = \angle AEB \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle DFC$ (по 2 углам)

$\angle FAD = 90^\circ - \angle ADF = 90^\circ - \angle ADE = 90^\circ - \angle ABE = \angle EAB = \angle FDC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAD = \angle FAD$

$\angle ADC$ - смежный с $90^\circ \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ = \angle AFD \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle ADC$
 (по 2 углам)

$\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{FD}{DC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD^2 = AF \cdot AC$ (1)





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\triangle AFD \sim \triangle ADC$$

$$\triangle AFD \sim \triangle AEB \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle ADC$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AD \cdot AB = AE \cdot AC$$

$$AD = \frac{AE \cdot AC}{AB} = \frac{2\sqrt{7} \cdot 10}{8} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$$

Из утверждения ①

$$AD^2 = AF \cdot AC$$

$$AD = \frac{5\sqrt{7}}{2} \Rightarrow AF \cdot AC = \frac{25 \cdot 7}{4}$$

$$AC = 10$$

$$2 \cdot 5 \cdot AF = 5 \cdot 5 \cdot \frac{7}{4}$$

$$2AF = \frac{35}{4} \Rightarrow AF = \frac{35}{8} = 4,375$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: в 3,5 раза.

Пусть изначально воздушный взят n коробок. Тогда вариантов расположения 3 шариков в n коробках $= C_n^3$.

Вариантов, когда 3 шарика оказались в 5 выбранных шарах коробках $= C_5^3 \Rightarrow$ вероятность выпадения $= \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}} = \frac{C_5^3}{C_n^3}$.

Когда шутку разрешили выбрать 7 коробок, количество благоприятных исходов стало равно C_7^3 . Количество всех исходов не изменилось $\Rightarrow$ вероятность во 2^{ой} случае будет равна $\frac{C_7^3}{C_n^3}$.

Посчитаем, во сколько раз она увеличилась:

$$\frac{C_7^3}{C_n^3} : \frac{C_5^3}{C_n^3} = \frac{C_n^3 \cdot C_7^3}{C_n^3 \cdot C_5^3} = \frac{C_7^3}{C_5^3} = \frac{7!}{3!4!} : \frac{5!}{3!2!} = \frac{7!3!2!}{3!4!5!} = \frac{7!2!}{4!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 7}{4} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ раза} \Rightarrow \text{вероятность}$$

выпадения увеличивается в 3,5 раза.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: 3.

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + (a^2 - a - 7) = 0 \Rightarrow \text{сумма корней равна по т. Виета:}$$

$$a^2 - 2a \Rightarrow n_6 + n_7 = a^2 - 2a = n_1 + 11d \quad (n_i - i\text{-ый член прогрессии, } d - \text{разность}).$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0 \Rightarrow \text{сумма корней равна } \frac{a^3 - 2a^2}{3} = n_4 + n_9 =$$

$$= n_1 + 11d \Rightarrow \begin{cases} n_1 + 11d = a^2 - 2a \\ n_1 + 11d = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \end{cases} \Rightarrow a^2 - 2a = (a^2 - 2a) \cdot \frac{a}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \\ a = 3. \end{cases}$$

$$1) a = 0 \Rightarrow 1^{\text{ое}} \text{ уравнение} - x^2 - 7 = 0, n_{7,6} = \pm \sqrt{7} \Rightarrow a \neq 0$$

$$2^{\text{ое}} \text{ уравнение} - 3x^2 + 6 = 0, x^2 \geq 0, 6 > 0 \Rightarrow \emptyset \Rightarrow a \neq 0$$

$$2) a = 2 \Rightarrow 1^{\text{ое}} \text{ уравнение} - x^2 + 4 - 7 = x^2 - 3 = 0, n_{6,7} = \pm \sqrt{3}.$$

$$2^{\text{ое}} \text{ уравнение} - 3x^2 + 6 - 2^5 = 3x^2 - 26 = 0 \Rightarrow n_{4,9} = \pm \sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$n_9 - n_7 = n_6 - n_4 = 2d \Rightarrow \text{заменим, что } -\sqrt{\frac{26}{3}} < -\sqrt{3} < \sqrt{3} < \sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$\begin{cases} n_7 - n_6 = d \\ n_{6,7} = \pm \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow d = \pm 2\sqrt{3}$$

$$n_9 - n_4 = \pm 2\sqrt{\frac{26}{3}} = 5d = \pm 10\sqrt{3}, \text{ но } \pm 10\sqrt{3} \neq \pm 2\sqrt{\frac{26}{3}} - \text{нельзя}$$

$$\pm \sqrt{500} \neq \pm \sqrt{\frac{52}{3}} \text{ не подходит}$$

$$a \neq 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) a=3 \Rightarrow 1^{\text{ое}} \text{ уравнение} - x^2 - 3x + 9 - 3 - 7 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$D = 9 + 4 = 13 \Rightarrow n_{6,7} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow n_7 - n_6 = d = \pm \frac{2\sqrt{13}}{2} = \pm \sqrt{13}$$

$$2^{\text{ое}} \text{ уравнение} - 3x^2 - 9x + 6 - 3^5 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 - 81 = 0$$

$$x^2 - 3x - 79 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 79 = 325$$

$$n_{4,9} = \frac{3 \pm 5\sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{3 - 5\sqrt{13}}{2} < \frac{3 - \sqrt{13}}{2} < \frac{3 + \sqrt{13}}{2} < \frac{3 + 5\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{покажем или } n_4, n_6, n_7, n_9 \Rightarrow \frac{3 - 5\sqrt{13}}{2} + 2\sqrt{13} = n_6 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{или } n_9, n_7, n_6, n_4 \quad n_6 + d = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} + \sqrt{13} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = n_7$$

$$n_7 + 2d = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} + 2\sqrt{13} = \frac{3 + 5\sqrt{13}}{2} = n_9$$

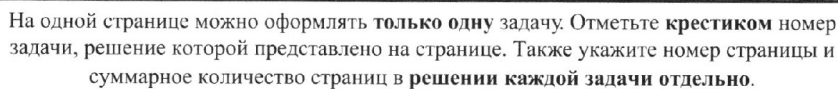
аналогично:

$$n_4 + 2d = \frac{3 + 5\sqrt{13}}{2} - 2\sqrt{13} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = n_6$$

$$n_6 + d = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} - \sqrt{13} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} = n_4$$

$$n_7 + 2d = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} - 2\sqrt{13} = \frac{3 - 5\sqrt{13}}{2} = n_9$$

Рассмотрев все случаи, мы получим, что условие задачи выполняется только при $a=3$.



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

100000
30000
103000

[illegible]



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy - yz = 1 - (x+2)(x-2) + 2(x-2)$$

$$y = 2 - x + z \Rightarrow x + y + z = 2$$

$$xyz + 2x = x^3 + y^3 + z^3 - 4$$

$$- \frac{8}{3} = - \frac{8}{3} + \frac{16}{3} xy = z(z-2)$$

$$x^2 = xy + 2x - \frac{8}{3}$$

$$x^2 = y^2 - 2y - \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{16}{9} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} (2-x-y)(-x-y) = xy$$

$$(2-x)^2 + (2-y)^2 + (2-z)^2 - 2(x-2)(y-2) - 2(x-2)(z-2) - 2(y-2)(z-2) = xy$$

$$(x-2)(x-4) x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y = xy \quad xy + yz + xz - 2(x+z)$$

$$x^2 (x+y)^2 = xy + 2(x+y) \quad - \frac{xy + 2y^2}{+ 2(x+z)} = (x+z)^2$$

$$xy + yz + xz + 8$$

$$x^2 + z^2 + y^2 - 4 + 8$$

$$y(2-y) \quad y^3 + y^2 + y^2 + 4 - 4y$$

$$-4y + 2y^2 + 2(2-y) \quad \frac{4}{3} + 4 -$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz) - 2y(2-y) = (2-y)(y-2y+2)$$

$$y^2 + z^2 + 2yz + y^2 + z^2 + 8 - 4(y+z) \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$$

$$-4x + 2x^2$$

$$(2-x)^2$$

$$(y+2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$$

$$y^2(2y+2) + z^2 + y^2 + 4 - 4y + z^2 - 4z + 4 \quad 2(xy + yz + xz) + 4(x+y+z)$$

$$(-4y) + 2y^2$$

$$2(y^2 + x^2 + z^2) - 4(x+y+z) + 8 = 2(y^2 + x^2 + z^2)$$

$$(2-x)^2 + (2-y)^2 + (2-z)^2 = (y+2)^2 + (x+2)^2 + (x+y)^2 = (y^2 + 2yz + 4z^2) + (x^2 + 2xz + z^2) + (x^2 + 2xy + y^2) = 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow xy + yz + xz = 0$$