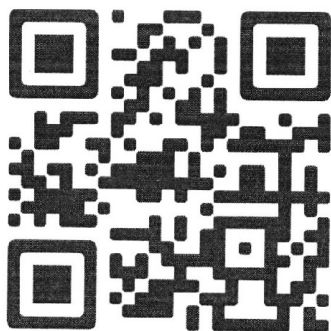




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13



- † 1. [5 баллов] На дуге полукруга с диаметром MN и центром O взята точка K . Построен треугольник ABC такой, что его вершина A лежит на отрезке OK , вершина B — на отрезке ON , вершина C — на дуге KN . Найдите отношение площади сектора $МОК$ к площади полукруга, если известно, что $AC = BC = OM$ и $\angle ACB = 72^\circ$.

- ‡ 2. [4 балла] Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} \min(a; b) = 7|a - b|, \\ 7 \cdot \max(a, b) = 8(\text{НОД}(a; b))^2 - 64. \end{cases}$$

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{y + 3 - 10x} + \frac{1}{\sqrt{10x - 1 - y}} > y^2 + 12y.$$

4. [3 балла] Петя загадал такие вещественные числа x, y, z , что выражения

$$\frac{x(y - z)}{y(z - x)} \quad \text{и} \quad \frac{2y(z - x)}{z(y - x)}$$

принимают одно и то же значение A . Найдите все возможные значения A , если известно, что их не менее двух.

- † 5. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AB , а H — ортогональная проекция точки D на AB . Диагональ AC пересекает отрезок DH в точке X . Найдите CD , если $DX = 20$, $AX = 15$, $CX = 36$.

6. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt[4]{8x + 1} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9x - 1}$.

- † 7. [5 баллов] Сколькими способами из натуральных чисел от 2 002 до 2 025 можно выбрать 6 чисел так, чтобы среди выбранных чисел нашлось 3 числа, дающих одинаковые остатки от деления на 8?

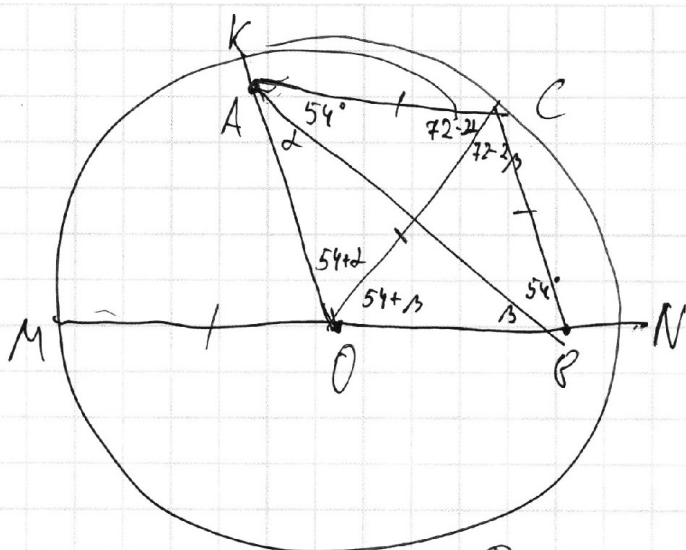


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

Проведем $OC = OM = KC = PC$. Пусть, $\angle OKA = \alpha$, $\angle KAO = \beta$.

Тогда $\angle KOC = 54 + \alpha$ ($\triangle KOC$ - $\mu\phi$), $\angle COB = 54 + \beta$ ($\triangle OCB$ - $\mu\phi$).

Тогда $\angle KCO = 180 - 2(54 + \alpha) = 72 - 2\alpha$, аналогично,

$\angle OCB = 72 - 2\beta$. $\angle KCO + \angle OCB = 72^\circ \Rightarrow 72 - 2\alpha + 72 - 2\beta = 72 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 36$. $\angle KOM = 180 - 54 - \alpha - 54 - \beta = 72 - (\alpha + \beta) =$

$= 36$. $\frac{S_{MOK}}{S_{MKN}} = \frac{36}{180} = \frac{1}{5} = 0,2$

Ответ: 0,2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что a и b симметричны $\Rightarrow 600: b \leq a$

Тогда:

$$\begin{cases} b = 7a - 7b & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a = 8(\sqrt{a; b})^2 - 64 & (2) \end{cases}$$

$$(1): 8b = 7a. \text{ Т.к. } a \text{ и } b \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 8x, \quad b = 7x$$

$$(2): 7 \cdot 8x = 8(\sqrt{a; b})^2 - 8 \Rightarrow 7x = x^2 - 8$$

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

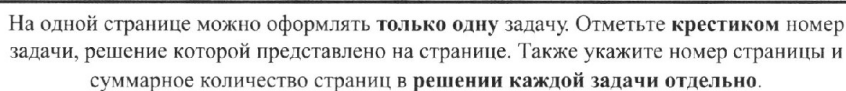
$$D = 49 + 4 \cdot 8 = 81$$

$$x_1 = \frac{7+9}{2} = 8$$

$$x_2 = \frac{7-9}{2} = -1 - \text{не подх., т.к. } x > 0$$

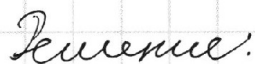
Значит, $a = 64$, $b = 56$ и $b = 64$, $a = 56$ (из симметрии)

Ответ: $(64; 56)$, $(56; 64)$.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча OR-кода недопустима!



Решение.
 Дано: AB - диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$. $\triangle ACB \sim \triangle AHD$
 ($\angle AHD = \angle BCA = 90^\circ$; $\angle BAC$ - общий) $\Rightarrow \angle ABC = \angle = \angle HDA \Rightarrow \angle AHD =$
 $= 180^\circ - \angle$. Т.к. $ABCD$ - вписанный $\Rightarrow \angle ADC = 180^\circ - \angle$.

$\triangle ADC \cong \triangle AXD$ ($\angle CAD$ - общий, $\angle AXD = \angle ADC$). Рисун.

$$AD = x, CD = y, \text{ тогда: } \frac{AD}{AC} = \frac{AX}{AO} = \frac{XO}{CO} \Rightarrow \frac{x}{51} = \frac{15}{x} = \frac{20}{y}$$

$$x^2 = 51 \cdot 15 \Rightarrow x = 3\sqrt{85}$$

$$\frac{1581}{3585} = \frac{204}{y} \Rightarrow y = 4\sqrt{85}$$

Omber: $4\sqrt{85}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Среди чисел от 2002 до 2025 $\bar{E}$ по 3 числа каждого остатка от 0 до 7. Выберем 3 числа с одинаковыми остатками и добавим к этой группе 3 числа так, чтобы ~~они~~ не имели одинакового остатка. Это можно сделать $\binom{3}{24} = 17$ способами. Итого кол-во групп, где всего лишь 3 числа имеют одинаковые остатки: $8(\binom{3}{24} - 17)$. Рассмотрим случай, когда в группе из 6 чисел 3 числа одного ост-ка, 3 числа другого. кол-во способов выбрать такую группу: $\binom{2}{8}$
$$\Sigma = 8(\binom{3}{24} - 17) + \binom{2}{8} = 8\left(\frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{2 \cdot 3} - 17\right) + \frac{7 \cdot 6}{2} = 8 \cdot (1330 - 17) + 21 = 10584 + 21 = 10605$$

Ответ: ~~10594~~ 10612



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. a \leq b$$

$$a = 7|a-b|$$

$$7b = 8(\text{НОЗ}(a; b))^2 - 64$$

$$a = -7a + 7b$$

$$8a = 7b$$

$$b = 8 \dots$$

$$a = 7 \dots$$

$$\frac{7b}{8} = \text{НОЗ}(a; b)^2 - 8$$

$$b = 8x$$

$$a = 7y$$

$$8a = 7b$$

$$b = 8x$$

$$a = 7y$$

$$7x = \text{НОЗ}(a; 8x)$$

$$7x = 7x$$

$$7 \cdot 8x = 8(\text{НОЗ}(7x; 8x))^2 - 64$$

$$7x = \text{НОЗ}(7x; 8x)^2 - 8$$

$$7x = x^2 - 8$$

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$D = 49 + 4 \cdot 8 = 81$$

$$x_1 = \frac{7+9}{2} = 8$$

$$x_2 = -1$$

$$\text{Отв. } a = 64, b = 56$$

$$a = 56, b = 64$$

$$3. \sqrt{y+3-10x} + \frac{1}{\sqrt{10x-1-y}} > y^2+12y$$

$$\sqrt{10x-1-y} = t$$

$$\sqrt{y+3-10x} = \sqrt{-t^2+2}$$

$$7 \cdot 64 = 8 \cdot 64$$

$$(x; y) = ?$$

$$10x \geq 1+y$$

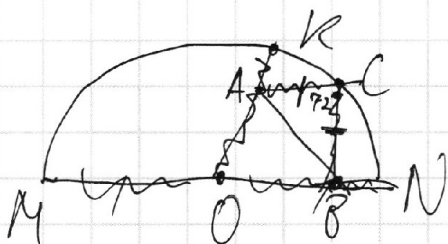
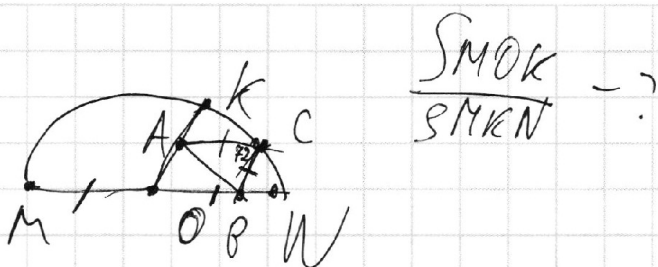


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt[4]{8x+1} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9x-1}$$

$$\sqrt[4]{8x+1} = \cancel{x} \cancel{y}$$

$$y = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9x-1}$$

$$x = \frac{y^4 - 1}{8}$$

$$y = \sqrt[4]{\frac{y^4 - 1}{8}} + \sqrt[4]{\frac{9(y^4 - 1) - 1}{8}} - 1$$

$$\sqrt[4]{9x-1} = t \quad \frac{t^4 + 1}{9} = x$$

$$\frac{x(y-z)}{y(z-x)} = A = \frac{2y(z-x)}{z(y-x)}$$

$$x \neq y \neq z$$

$$xz(y-z)(y-x) = 2y^2(z-x)^2$$

$$xz(y^2 - xy - zy + xz) = 2y^2(z^2 - 2zx + x^2)$$

$$xz y^2 - x^2 y z - x y z^2 + x^2 z^2 = 2y^2 z^2 - 4xy^2 z + 2y^2 x^2$$

$$5xz y^2 - x^2 y z$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2xy - 2xz = A^2 yz - A^2 xz$$

$$xy - xz = Ayz - Axy \quad | \cdot 2$$

$$A^2 yz - A^2 xz = 2Ayz + 2Axy = 0$$

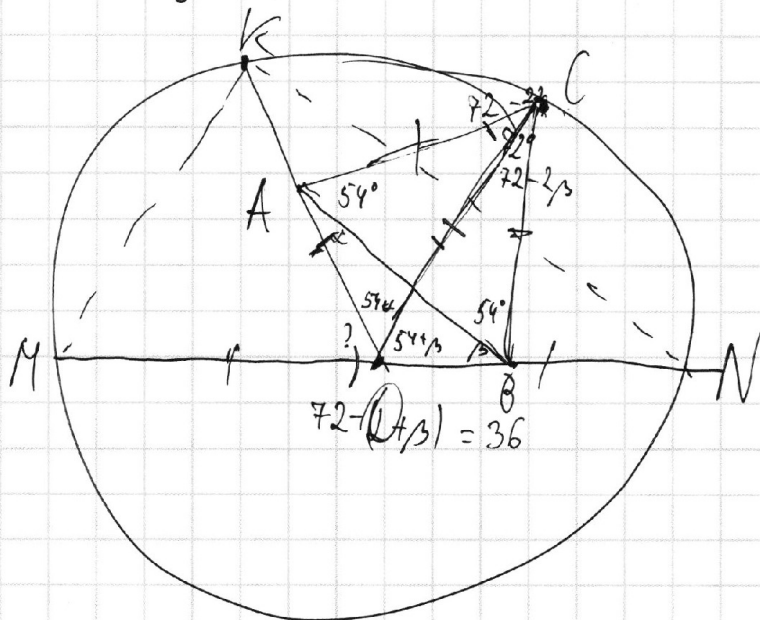
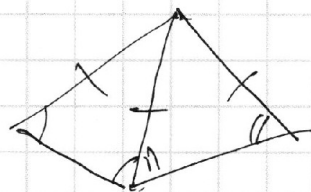
$$\underline{A=0} \quad \cancel{Ayz} \quad \cancel{A^2} (y-x) - 2y(2-x) = 0$$

$$A = \frac{2y(2-x)}{z(y-x)}$$

$$\underline{x=0} \text{ или } \underline{y=0}$$

$$y-z=0 \text{ и } y \neq 0$$

$$\frac{2x(y-z)}{z(y-x)} = A^2$$



$$2(2+\beta) = 72$$

$$2+\beta = 36$$

$$72 - (2+\beta) = 36$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$y+3-10x \geq 0 \Rightarrow y \geq 10x-3$$

$$10x-1-y > 0 \Rightarrow y < 10x-1$$

$$10x-3 \leq y < 10x-1$$

$$\sqrt{-t^2+2} + \frac{1}{t} > y^2 + 12y$$

$$y^2 + 12y - \left(\sqrt{-t^2+2} + \frac{1}{t} \right) < 0$$

$$(y^2 + 12y + 36) - \left(36 + \sqrt{-t^2+2} + \frac{1}{t} \right) < 0$$

$$y > -6 - \sqrt{36 + \sqrt{-t^2+2}} < y < -6 + \sqrt{36 + \sqrt{-t^2+2}}$$

$$t = \sqrt{10x-1-y}$$

$$y > -6 - \sqrt{36 + \sqrt{-10x+3+y}}$$

$$\sqrt[4]{8x+1} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9x-1} ?$$

$$\sqrt[4]{8x+1} = y \quad \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9x-1} = y$$

$$y = \sqrt[4]{\frac{y^4-1}{8}} + \sqrt[4]{\frac{y^4-1}{9}}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 7 \\ \hline 133 \end{array}$$

$$1330 - 8 = 1322$$

$$\begin{array}{r} 1322 \\ \times 7 \\ \hline 9254 \end{array}$$

$$y \geq 0$$

$$y = \sqrt[4]{2}$$

$$0 \leq y \leq \sqrt{2}$$

$$y \geq \sqrt{2} \quad \times$$

$$\sqrt[4]{8y^4+1} = y + \sqrt[4]{9y^4-1}$$

$$\sqrt[4]{8y^4+1} \vee \sqrt[4]{9y^4-1}$$

$$2 \vee y^4$$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{y+3-10x} + \frac{1}{\sqrt{10x-1-y}} > y^2 + 12y$$

$$\sqrt{10x-1-y} = t, t > 0$$

$$\sqrt{y+3-10x} = \sqrt{-t^2+2}$$

$$D = 144 + 4(\sqrt{-t^2+2} - \frac{1}{\sqrt{t}}) \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$y_1 = -12 + \sqrt{144 +}$$

$$x^2(y-2)(y-x) = 2y^2(2-x)^2$$

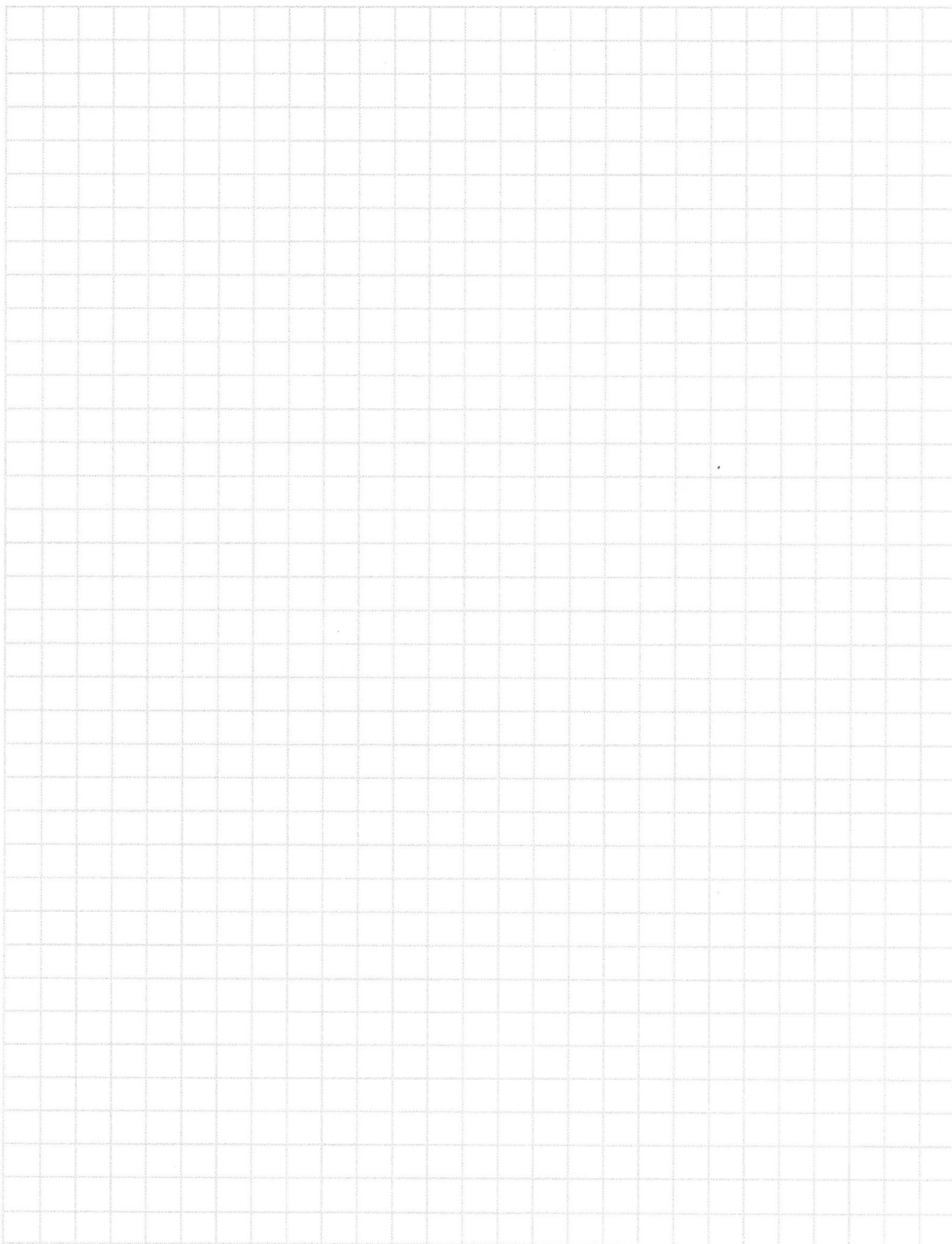


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$x^2(y-z)(y-x) = 2y^2(z-x)^2$$~~

~~$$x^2y^2 - x^2zy - x^2yz + x^2z^2 = 2y^2z^2 - 4xyz^2 + 2y^2x^2$$~~

~~$$\sqrt{-t+2} + \frac{1}{\sqrt{t}} > y^2 + 12y$$~~

~~$$\sqrt{-t^2+2t+1}$$~~

~~$$y^2 + 12y - \left(\sqrt{-t^2+2t+1} \right) < 0$$~~

~~$$D = 144 + 4 \left(\sqrt{-t^2+2t+1} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$~~

~~$$\sqrt{10x-1-y} = t$$~~

~~$$\sqrt{y+3-10x} = \sqrt{t^2+2}$$~~

~~$$y^2 + 12y - \left(\sqrt{-t^2+2} + \frac{1}{t} \right) < 0$$~~

~~$$D = 144 + 4 \left(\sqrt{-t^2+2} + \frac{1}{t} \right) = 144 + 4(1+1) = 152$$~~

~~$$y_1 =$$~~

~~$$10x-1-y=t, t \in \mathbb{Z}$$~~

~~$$\sqrt{y+3-10x} = \sqrt{-t+2}$$~~

~~$$t \geq 2$$~~

~~$$\sqrt{-t+2} + \frac{1}{\sqrt{t}} > y^2 + 12y$$~~

~~$$y^2 + 12y - \left(\sqrt{-t+2} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$~~

~~$$t = 0$$~~
~~$$t = 1$$~~
~~$$t = 2$$~~

~~$$t = -1$$~~
~~$$t = -2$$~~

$$\begin{array}{r} 212 \\ \times 523 \\ \hline 10584 \end{array}$$