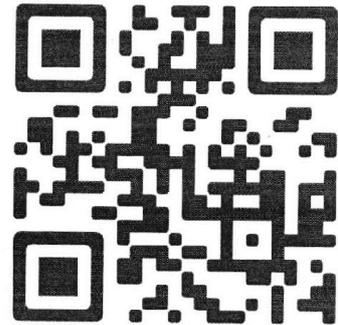




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 14



√1. [5 баллов] На дуге полукруга с диаметром  $MN$  и центром  $O$  взята точка  $K$ . Построен треугольник  $ABC$  такой, что его вершина  $A$  лежит на отрезке  $OK$ , вершина  $B$  — на отрезке  $ON$ , вершина  $C$  — на дуге  $KN$ . Найдите отношение площади сектора  $МОК$  к площади полукруга, если известно, что  $AC = BC = OM$  и  $\angle ACB = 108^\circ$ .

√2. [4 балла] Найдите все натуральные  $a$  и  $b$  такие, что

$$\begin{cases} 2 \cdot \max(a; b) = 13|a - b|, \\ 8 \cdot \min(a; b) = 11(\text{НОД}(a; b))^2 - 99. \end{cases}$$

√3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} > x^2 + 10x.$$

√4. [3 балла] Петя загадал такие вещественные числа  $x, y, z$ , что выражения

$$\frac{4x(z-y)}{y(z-x)} \quad \text{и} \quad \frac{3y(z-x)}{4z(y-x)}$$

принимают одно и то же значение  $A$ . Найдите все возможные значения  $A$ , если известно, что их не менее двух.

√5. [5 баллов] Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с диаметром  $AB$ , а  $H$  — ортогональная проекция точки  $D$  на  $AB$ . Диагональ  $AC$  пересекает отрезок  $DH$  в точке  $X$ . Найдите  $CD$ , если  $DH = 2$ ,  $AX = 3$ ,  $CX = 4$ .

√6. [5 баллов] Решите уравнение  $\sqrt[3]{x+1} = 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{81x-1}$ .

√7. [5 баллов] Сколькими способами из натуральных чисел от 2025 до 2045 можно выбрать 6 чисел так, чтобы среди выбранных чисел нашлось 3 числа, дающих одинаковые остатки от деления на 7?



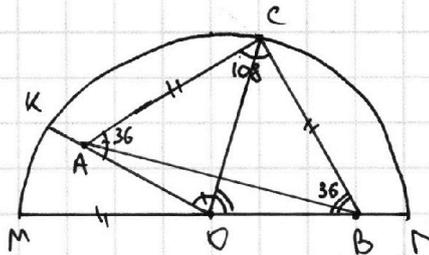
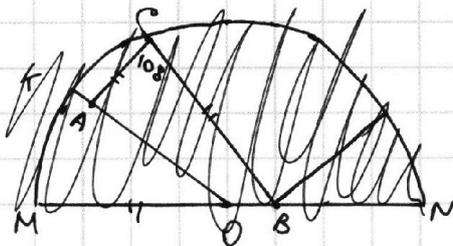
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
↓ ИЗ ↓

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3



Пусть радиус полуокружности -  $R$

$\left. \begin{array}{l} MN - \text{диаметр} \\ TO - \text{центр} \end{array} \right\} \Rightarrow OM = ON = OB = OA = R$

Площадь полукруга:  $S_{\pi} = \frac{1}{2} \pi R^2$

Соединим  $TO$  и  $TC$ :  $OC = R$

$\Rightarrow OC = OA \Rightarrow \triangle OAC$  - равнобедр.  $\Rightarrow \angle CAO = \angle COA$

$OB = OC \Rightarrow \triangle OCB$  - равнобедр.  $\Rightarrow \angle COB = \angle CBO$

$\angle ACB + \angle CAO + \angle COA + \angle COB + \angle CBO = 2\angle AOB + \angle ACB = 360^\circ \Rightarrow \angle AOB = \frac{360^\circ - \angle ACB}{2} =$

$= 180^\circ - \frac{\angle ACB}{2} = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$

$\angle KOM = 180^\circ - \angle KON = 54^\circ$

$S_{\text{сектор}} = \frac{\angle KOM}{360^\circ} \cdot \pi R^2 = \frac{54^\circ}{360^\circ} \cdot \pi R^2 = \frac{3}{20} \pi R^2$

$\frac{S_{\text{сектор}}}{S_{\pi}} = \frac{\frac{3}{20} \pi R^2}{\frac{1}{2} \pi R^2} = \frac{3}{10}$

ОТВЕТ: 3:10



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~?

$$\begin{cases} 2 \max(a, b) = 13|a-b| \\ f \min(a, b) = 11(\text{НОД}(a, b))^2 - 99 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) a > b &\Rightarrow \max(a, b) = a \\ &\min(a, b) = b \\ |a-b| &= a-b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2a = 13(a-b) & (1) \\ f b = 11(a, b)^2 - 99 & (2) \end{cases}$$

$$(1) : 2a = 13a - 13b$$

$$13b = 11a$$

$$\Rightarrow b : 11 \\ a : 13$$

$$\text{Пусть } b = 11n \Rightarrow 13b = 13 \cdot 11n = 11a \Rightarrow a = 13n \\ (n \in \mathbb{N})$$

$$f n = 11(11n, 13n)^2 - 99$$

$$f n = (11n, 13n)^2 - 9 = ((13, 11)n)^2 - 9$$

$$(11, 13) = 1 \Rightarrow (11n, 13n) = (11, 13)n = 1 \Rightarrow f n = n^2 - 9$$

$$f n = n^2 - 9 \Rightarrow n^2 - f n - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{не подходит} \\ n = 9 \Rightarrow a = 117 \\ b = 99 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2) a < b &\Rightarrow \max(a, b) = b \\ &\min(a, b) = a \\ |a-b| &= b-a \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2b = 13(b-a) & (1) \\ 8a = 11(a+b)^2 - 99 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Из (1): } 2b = 13b - 13a$$

$$13a = 11b \Rightarrow a:13 \Rightarrow b = 13n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{~~13a = 11 \cdot 13n~~ } \Rightarrow a = 11n$$

$$8 \cdot 11n = 11(11n, 13n)^2 - 99$$

$$8n = (11n, 13n) - 9$$

$$\text{~~(11n, 13n) = 11n~~ } \Rightarrow 8n = (11, 13) \cdot n^2 - 9$$

$$(11, 13) = 1 \Rightarrow \text{~~(11n, 13n) = (n, n) = 1~~ } \Rightarrow 8n = n^2 - 9$$

$$8n = n^2 - 9$$

$$n^2 - 8n - 9 = 0$$

$$n = -1 \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$n = 9 \Rightarrow a = 99$$

$$b = 117$$

Ответ:  $(a, b) = (99, 117)$  или  $(a, b) = (117, 99)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

ОТВЕТ:  $(-9, -3), (-3, 0)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} < 0 \Rightarrow x^2 + 10x \leq 0 \text{ (т.к. левая часть не может быть меньше отрицательного)} \Rightarrow x \in (-10, 0), x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

$$1) x = -3: \sqrt{3-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-1}} > -3 - 10 = -9 \quad | \cdot \sqrt{6y-1} > 0$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{1}{2} \\ 6y-1 > 0 \Rightarrow y > \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow y \in (\frac{1}{6}; \frac{1}{2}) \Rightarrow \text{нет таких } y \in \mathbb{Z}$$

$$2) x = -2: \sqrt{2-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y}} < 4 - 20 = -16$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 6y > 0 \\ 2-6y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y \in (0; \frac{1}{3}] \Rightarrow \text{нет таких } y \in \mathbb{Z}$$

$$3) x = -3: \sqrt{1-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+1}} > -3 - 30 = -33 - 21$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 1-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{1}{6} \\ 6y+1 > 0 \Rightarrow y > -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow y \in (-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} = 0 \text{ - не подходит}$$

$$4) x = -4: \sqrt{-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+2}} < 16 - 40 = -24$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -6y \geq 0 \Rightarrow y \leq 0 \\ 6y+2 > 0 \Rightarrow y > -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y \in (-\frac{1}{3}; 0] \Rightarrow y = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} = \sqrt{0} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < -24 \text{ - не подходит}$$

$\Rightarrow$  не подходит



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) x = -5: \sqrt{-1-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+3}} > 25-50 = -25$$

$$\text{ODЗ: } \begin{cases} -1-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{6} \\ 6y+3 > 0 \Rightarrow y > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y \in (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}] \Rightarrow \text{нет таких } y \in \mathbb{Z}$$

~~$$\sqrt{-1-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+3}} > 25-50 = -25$$~~

$$6) x = -6: \sqrt{-2-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+4}} > 36-60 = -24$$

$$\text{ODЗ: } \begin{cases} -2-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{3} \\ 6y+4 > 0 \Rightarrow y > -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow y \in (-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}] \Rightarrow \text{нет таких } y \in \mathbb{Z}$$

$$7) x = -7: \sqrt{-3-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+5}} > 49-70 = -21$$

$$\text{ODЗ: } \begin{cases} -3-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{2} \\ 6y+5 > 0 \Rightarrow y > -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow y \in (-\frac{5}{6}; -\frac{1}{2}] \Rightarrow \text{нет таких } y \in \mathbb{Z}$$

$$8) x = -8: \sqrt{-4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+6}} > 64-80 = -16$$

$$\text{ODЗ: } \begin{cases} -4-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{2}{3} \\ 6y+6 > 0 \Rightarrow y > -1 \end{cases} \Rightarrow y \in (-1; -\frac{2}{3}] \Rightarrow \text{нет таких } y \in \mathbb{Z}$$

$$9) x = -9: \sqrt{-5-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+7}} > 81-90 = -9$$

$$\text{ODЗ: } \begin{cases} -5-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{5}{6} \\ 6y+7 > 0 \Rightarrow y > -\frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow y \in (-\frac{7}{6}; -\frac{5}{6}] \Rightarrow y = -1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} = 0 \Rightarrow \text{не существует}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

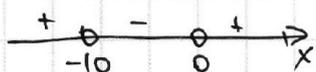
$$\sqrt{\underbrace{(t+4)}_b \underbrace{(-t-2)}_b} \geq 1$$
$$-(t+4)/(-t-2) = 1$$

$$-t^2 - 6t - 8 = 1$$

$$t^2 + 6t + 9 = 0$$

$$(t+3)^2 = 0 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow y = 6y - 3$$

$$x^2 + 10x < 0 \Rightarrow x(x+10) < 0$$



$$x \in (-10; 0), x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

$$x = -9: -9 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = -6 \Rightarrow y = -1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{подходит}$$

$$x = -8: -8 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x = -7: -7 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = -4 \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x = -6: -6 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = -3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x = -5: -5 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x = -4: -4 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x = -3: -3 = 6y - 3 \Rightarrow y = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{подходит}$$

$$x = -2: -2 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x = -1: -1 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 63

$$\sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} > x^2+10x$$

$$\text{OДЗ: } \begin{cases} x+4-6y \geq 0 \Rightarrow 6y \leq x+4 \\ 6y-2-x > 0 \Rightarrow 6y > x+2 \end{cases}$$

$$1) \sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} \geq 0$$

Пусть  $x-6y=t$

$$\sqrt{t+4} - \frac{1}{\sqrt{-t-2}} > 0 \quad \text{OДЗ: } \begin{cases} t \geq -4 \\ t < -2 \end{cases} \Rightarrow t \in [-4; -2)$$

$$\sqrt{t+4} > \frac{1}{\sqrt{-t-2}} \quad | \cdot \sqrt{-t-2} > 0$$

$$\sqrt{(-t-2)(t+4)} > 1$$

$$\sqrt{-t^2-2t-4t-8} > 1$$

$$-t^2-6t-8 > 1$$

$$t^2+6t+9 < 0$$

$$(t+3)^2 < 0 \Rightarrow \text{нет таких } t \Rightarrow \text{такого быть не может}$$

$$2) \sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} = 0$$

Пусть  $x-6y=t \Rightarrow \sqrt{t+4} - \frac{1}{\sqrt{-t-2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{t+4} = \frac{1}{\sqrt{-t-2}} \quad | \cdot \sqrt{-t-2} \neq 0$

$$\text{OДЗ: } \begin{cases} x \geq -4 \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow x \in [-4; -2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4

$$A = \frac{4x(z-y)}{y(z-x)} = \frac{3y(z-x)}{4z(y-x)}$$

ОДЗ:  $z \neq y \neq x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

$$16xz(z-y)(y-x) = 3y^2(z-x)^2$$

$$16xz(yz - xz - y^2 + xy) = 3y^2(z^2 - 2zx + x^2)$$

$$16xyz^2 - 16x^2z^2 - 16xy^2z + 16x^2yz = 3y^2z^2 - 6xy^2z + 3x^2y^2$$

$$16xyz^2 - 16x^2z^2 - 10xy^2z + 16x^2yz - 3y^2z^2 - 3x^2y^2 = 0$$

Пусть  $\left. \begin{array}{l} xy = a \\ yz = b \\ xz = c \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{4(c-a)}{b-a} = \frac{3(b-a)}{4(b-c)} \Rightarrow \frac{b-a}{b-c} = \frac{4}{3}A$

$$16xz \cdot yz - 16(xz)^2 - 10xy \cdot yz + 16xy \cdot xz - 3(yz)^2 - 3(xy)^2 = 0$$

$$16bc - 16c^2 - 10ab + 16ac - 3b^2 - 3a^2 = 0$$

$$-8c^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2c \cdot 2b - 8b^2 - 8c^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2c \cdot 2a - 8a^2 - 10ab + 5b^2 + 5a^2 = 0$$

$$-2(zc - 2b)^2 - 2(zc - 2a)^2 + 5(a-b)^2 = 0$$

$$8(c-b)^2 + 8(c-a)^2 = 5(a-b)^2 \quad | \cdot \frac{2}{(b-a)^2}$$

~~$$8(xz - yz)^2 + 8(xz - xy)^2 = 5(xy - yz)^2$$~~

~~$$8z^2(x-y)^2 + 8x^2(z-y)^2 = 8y^2(x-z)^2$$~~

~~$$8 \frac{(b-c)^2}{(b-a)^2} + \frac{16(c-a)^2}{(b-a)^2} = 10$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16 \left( \frac{3}{4A} \right)^2 + A^2 = 10$$

$$\frac{9}{A^2} - 10 + A^2 = 0 \quad | \cdot A^2 \neq 0$$

$$A^4 - 10A^2 + 9 = 0$$

$$A^2 = 1 \Rightarrow A = \pm 1$$

$$A^2 = 9 \Rightarrow A = \pm 3$$

Проверка:

$A = 1$ :  $x = 6$   
 $y = 8$   
 $z = 3$   
 $A = \frac{4 \cdot 6 \cdot 3}{8 \cdot 3} = 1 = \frac{3 \cdot 8 \cdot 3}{4 \cdot 8 \cdot 2}$

$A = -1$ :  $x = 6$   
 $y = 8$   
 $z = 3$   
 $A = \frac{-4 \cdot 6 \cdot 3}{8 \cdot 3} = -1 = \frac{3 \cdot 8 \cdot 3}{4 \cdot 8 \cdot 2}$

~~2) A=0~~

ОТВЕТ:  $A = \pm 1$  и  $A = \pm 3$

Пример для  $A = 1$

$$x = 6$$

$$\frac{y}{z} = \frac{8}{3} : A = \frac{4 \cdot 6 \cdot 3}{8 \cdot 3} = 1 = \frac{3 \cdot 8 \cdot 3}{4 \cdot 8 \cdot 2}$$

Пример для  $A = 3$

$$x = 11$$

$$\frac{y}{z} = \frac{176}{-4} : A = \frac{44 \cdot (-180)}{176 \cdot 15} = 3 = \frac{3 \cdot 176 \cdot (-15)}{4 \cdot (-4) \cdot 165} = 3$$

Покажем, что:

$$A \neq 1$$

$$A \neq 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что  $A \neq -3$ . Допустим, что это не так

$$A = \frac{4x(z-y)}{y(z-x)} = -3$$

$$4xz - 4xy = 3yx - 3yz$$

$$4xz + 3yz = 7yx \quad (1)$$

$$A = \frac{3y(z-x)}{4z(y-x)} = -3$$

$$3yz - 3xy = 12xz - 12yz$$

$$15yz = 12xz + 3xy$$

$$5yz = 4xz + xy \Rightarrow xy = 5yz - 4xz \quad (2)$$

Подставим (2) в (1): ~~4xz + 3yz~~  $4xz + 3yz = 35yz - 28xz$

$$32xz = 32yz$$

$$x = \frac{19}{16}y \quad (3)$$

Подставим (3) в (1):  $\frac{19}{24}yz + 3yz = \frac{133}{16}y^2$

$$76z + 48z = 133y$$

$$z = \frac{133}{124}y$$

$$A = \frac{4 \cdot \frac{19}{16}y \left( \frac{133}{124}y - y \right)}{y \left( \frac{133}{24}y - \frac{19}{16}y \right)} = \frac{\frac{19}{4} \cdot \frac{9}{124}}{\frac{266-57}{48}} = \frac{\frac{19 \cdot 9}{496}}{\frac{209}{48}} = \frac{19 \cdot 9 \cdot 48}{496 \cdot 209} = \frac{19 \cdot 9 \cdot 6}{62 \cdot 209} \neq -3$$

$\Rightarrow A \neq -3$

ОТВЕТ:  $A = 1$  или  $A = 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что  $A \neq -1$ . Пусть это не так

$$A = \frac{4x(z-y)}{y(z-x)} = -1$$

$$4xz - 4xy = xy - yz$$

$$4xz + yz = 3xy$$

$$A = \frac{3y(z-x)}{4z(y-x)} = -1$$

$$3yz - 3xy = 4xz - 4yz$$

$$7yz = 3xy + 4xz = 4xz + yz + 4xz$$

$$6yz = 8xz$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x$$

$$4xz + \frac{4}{3}xz = 4x^2$$

$$3z + 4z = 3x$$

$$4z = 3x \Rightarrow z = \frac{3}{4}x$$

$$\cancel{x=2z} \quad \cancel{y=16z} \quad \cancel{z=9}$$

$$A = \frac{\cancel{4x} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{16} \cdot \cancel{(-3)}} \frac{4x \left( \frac{3}{4}x - \frac{4}{3}x \right)}{\frac{4}{3}xy \left( \frac{3}{4}x - x \right)} = \frac{-\frac{7}{12} \cdot 4x^2}{-\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}x^2} = \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}} = 7x - 1$$

$\Rightarrow$  не подходит



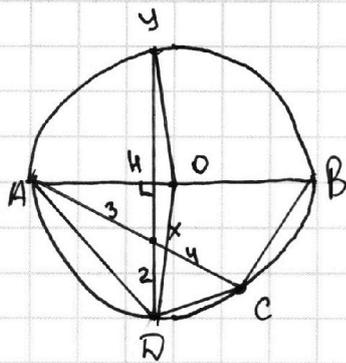
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~5



Продлим  $HD$  до пересечения с окружностью.  
Получим  $Y$

$O$  - центр окружности

Рассмотрим  $\triangle OYH$  и  $\triangle OAH$  - прямоугольные:

1)  $OY = OA$  (как радиусы)  
2)  $OH$  - общая  
 $\left. \begin{array}{l} 1) \\ 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OYH = \triangle OAH$  (по гипотенузе и катету)

$\Rightarrow YH = HD$

Пусть  $HX = a \Rightarrow HD = 2+a \Rightarrow YH = 2+a \Rightarrow YX = 2+a+a = 2+2a$

$\left. \begin{array}{l} \angle DAC = \angle HX \\ \angle D, AD - \text{хорды} \end{array} \right\} \Rightarrow YX \cdot XD = AX \cdot XC$   
 $(2+2a) \cdot 2 = 4 \cdot 3$

$$4(1+a) = 4 \cdot 3$$

$$a+1=3$$

$$a=2 \Rightarrow HX=?$$

$\triangle AHX$  - прямоугольный  $\rightarrow \cos \angle HXA = \frac{HX}{AX} = \frac{2}{3}$

$\angle DXC = \angle HXA$  (как вертикальные)  $\Rightarrow \cos \angle DXC = \cos \angle HXA = \frac{2}{3}$

по т. косинусов для  $\triangle DXC$ :  $DC^2 = DX^2 + XC^2 - 2DX \cdot XC \cdot \cos \angle DXC =$

$$= 4 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = 20 - \frac{32}{3} = \frac{28}{3} = \frac{4}{9} \cdot 21 \Rightarrow DC = \frac{2}{3} \sqrt{21}$$

ОТВЕТ:  $CD = \frac{2}{3} \sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 42

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{33}{8} = \frac{22a^3 + 6a^2c + 4ac^2}{5a^3 + 3a^2c - ac^2 + c^3}$$

$$165a^3 + 99a^2c - 33ac^2 + 33c^3 = 176a^3 + 48a^2c + 32ac^2$$

$$| a \neq 0 \text{ и } c \neq 0$$

$$| \cdot 11a^3 - 51a^2c + 65ac^2 - 33c^3 = 0 \quad | : a^2c$$

$$\frac{11a}{c^2} - \frac{51}{c} + 65 \frac{c}{a} - 33 \frac{c^2}{a^2} = 0$$

$$\text{Пусть } \frac{c}{a} = t$$

$$\frac{11}{t} - 51 + 65t - 33t^2 = 0 \quad | \cdot -t \neq 0$$

$$33t^3 - 65t^2 - 11t + 51 = 0$$

По формуле Кардана получаем, что

$$f(t) = 33t^3 - 65t^2 - 11t + 51 \Rightarrow f'(t) = 99t^2 - 130t - 11 \Rightarrow \frac{65 \pm \sqrt{5314}}{99}$$

$$\text{Найдем экстремумы } \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow 99t^2 - 130t - 11 = 0 \Rightarrow t = \frac{65 \pm \sqrt{5314}}{99}$$

$$\text{При } t < \frac{65 - \sqrt{5314}}{99} \text{ и } t > \frac{65 + \sqrt{5314}}{99} : f'(t) > 0 \Rightarrow f(t) \text{ возрастает}$$

$$2) a = 0 \Rightarrow x = -1 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$3) c = 0 \Rightarrow x = 0 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\text{При } t \in \left( \frac{65 - \sqrt{5314}}{99}, \frac{65 + \sqrt{5314}}{99} \right)$$

$f(t)$  убывает

Т.к.  $a > 0$  и  $c > 0$ , то  $t > 0$

Подставим значения  $t$ , при которых произв.  $= 0 \Rightarrow$  обе точки  $\Rightarrow$  график выглядит:

$\Rightarrow$  корни меньше 0

$\Rightarrow$  нет таких  $t \Rightarrow$  нет таких  $a$  и  $c \Rightarrow$  нет таких  $x$

Ответ: нет корней



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6

$$\sqrt[4]{x+1} = 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{8|x-1|}$$

~~$$\sqrt[4]{x+1} = \sqrt[4]{16x} + \sqrt[4]{8|x-1|}$$~~

Пусть  $a = \sqrt[4]{x+1}$   $\left\{ \begin{array}{l} a^4 - 1 = x+1-1 = x = \frac{b^4}{c^4} \\ b^4 + a^4 = 8x^4 + x+1 = 8|x+1| = c^4 + 2 \end{array} \right.$

$$a = b+c \Rightarrow b = a-c \Rightarrow b^4 = (a-c)^4 \quad (3)$$

$$16(a^4 - 1) = b^4 \quad (1)$$

$$5b^4 + a^4 = c^4 + 2 \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow (2): 80a^4 - 80 + a^4 = c^4 + 2$$

$$81a^4 - 82 = c^4 \Rightarrow 81a^4 - c^4 = 82 = (9a^2 + c^2)(9a^2 - c^2) = (9a^2 + c^2) \cdot (3a+c)(3a-c) \quad (4)$$

$$(3) \rightarrow (1): 16(a^4 - 1) = (a-c)^4$$

$$16((2a)^4 - (a-c)^4) = 2^4$$

$$3a((2a)^2 + (a-c)^2)((2a)^2 - (a-c)^2) = 2^4 = 16$$

$$((2a)^2 + (a-c)^2)(3a-c)(a+c) = 16$$

$$(5a^2 - 2ac + c^2)(3a+c)(3a-c) = 16 \quad (5)$$

$$\frac{(4)}{(5)}: \frac{82}{16} = \frac{41}{8} = \frac{(9a^2 + c^2)(3a+c)}{(5a^2 - 2ac + c^2)(a+c)} = \frac{27a^3 + 9a^2c + 3ac^2 + c^3}{5a^3 + 5a^2c - 7a^2c - 7ac^2 + ac^2 + c^3} =$$

$$= \frac{27a^3 + 9a^2c + 3ac^2 + c^3}{5a^3 + 3a^2c - ac^2 + c^3} = 1 + \frac{22a^3 + 6a^2c + 4ac^2}{5a^3 + 3a^2c - ac^2 + c^3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sim 7$   
Разобьем числа от 2025 до 2045 на группы:

1) числа  $\equiv 0 \pmod 7$ : 2030, 2037, 2044

2) числа  $\equiv 1 \pmod 7$ : 2031, 2038, 2045

3) числа  $\equiv 2 \pmod 7$ : 2025, 2032, 2039

4) числа  $\equiv 3 \pmod 7$ : 2026, 2033, 2040

5) числа  $\equiv 4 \pmod 7$ : 2027, 2034, 2041

6) числа  $\equiv 5 \pmod 7$ : 2028, 2035, 2042

7) числа  $\equiv 6 \pmod 7$ : 2029, 2036, 2043

$\Rightarrow$  В каждой группе ровно 3 числа  $\Rightarrow$  Среди 6 чисел должна быть хотя бы 1 группа

~~Решение каждой группы~~

8) Среди 6 чисел 1 полная группа и 3 числа из разных 3 групп:

~~1 число~~ выбрать одну полную группу - 7 вариантов  
1 число -  $21 - 3 = 18$  вариантов (подходят все числа, кроме тех, что уже выбрали)

2 число -  $21 - 3 - 3 = 15$  вариантов (подходят все, кроме тех, что в 1 группе и той группе, где 1 число)

3 число -  $21 - 3 - 3 = 12$  вариантов (подходят все, кроме тех, что в 1 группе и тех групп, где 1 и 2 числа)

$\Rightarrow$  всего  $7 \cdot 18 \cdot 15 \cdot 12$  вариантов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② Среди 6 чисел одна левая группа, 2 числа из одной другой группы и 3 числа из II группы

Выборить одну левую группу - 7 вариантов

Выборить 2 числа из одной группы - ~~3~~ 3 варианта

(это тоже самое, что и выбрать оставшееся число)

Выборить группу, из которой возьмем 2 этих числа: 6 вариантов

Выборить 3 числа -  $5 \cdot 3 = 15$  вариантов / 5 групп по 3 варианта в каждой)

⇒ Всего:  $7 \cdot (3 \cdot 6) \cdot 15$  вариантов

③ Выбрать 2 группы:

Выборить I - 7 вариантов

Выборить II - 6 вариантов

⇒ Всего 7·6 вариантов

⇒  $7 \cdot 18 \cdot 15 \cdot 12 + 7 \cdot 18 \cdot 15 + 7 \cdot 6 = 7 \cdot 18 \cdot 15 \cdot (12+1) + 7 \cdot 6 = 7 \cdot 18 \cdot 15 \cdot 13 + 7 \cdot 6 = 24612$

- общее число вариантов

Ответ: 24612 вариантов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \frac{4x(z-y)}{y(z-x)} = 3$$

$$4xz - 4xy = 3yz - 3yx$$

$$4xz = 3yz + yx$$

$$A = \frac{3y(z-x)}{4z(y-x)} = 3$$

$$3yz - 3xy = 12yz - 12xz$$

$$12xz = 9yz + 3xy$$

$$4xz = 3yz + xy$$

$$\frac{16}{15}$$

3.

$$* x=1, y=16$$

$$\frac{4(z-y)}{4(z-x)} = 3$$

$$z-y = 12z - 12x$$

$$z - 16 = 12z - 12$$

$$x=1 \quad 3y(z-1) = 4z(y-1)$$

$$yz - y = 4yz - 4z$$

$$11z = -4$$

$$z = -\frac{4}{11}$$

$$\frac{11}{176} - 4$$

$$\frac{44}{176 - 15}$$

$$\frac{44 \cdot (-180)}{176 - 15} = \frac{4 \cdot 180}{16 \cdot 15} = \frac{180}{90} = 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$\sqrt{x+3} = 2\sqrt{x} + \sqrt{81x-3}$$

Пусть  $\sqrt{x+3} = a \geq 0$

$\sqrt{x} = b \geq 0$

$\sqrt{81x-3} = c \geq 0$

ОДЗ:  $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 81x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{1}{81}$

$0 < 8 - 7z + 2z^2$   
 $0 < 8 - 7z + 2z^2$   
 $0 < 8 - 7z + 2z^2$   
 $0 < 8 - 7z + 2z^2$

$0 < 8 - 7z + 2z^2$

$0 < 8 - 7z + 2z^2$

$1 < \sqrt{8 - 7z + 2z^2}$

$0 < \frac{2-z^2}{1} < \sqrt{4+z^2}$

$0 < \frac{2-z^2}{1} < \sqrt{4+z^2}$

$z = 8z - x$

$$\begin{cases} a^4 = b^4 + 3 & (1) \\ a = 2b + c & (2) \\ 81b^4 - 1 = c^4 & (3) \end{cases}$$

$x - 2 - 8z > \frac{x - 2 - 8z}{8z - 1 + x^2} - \frac{x - 2 - 8z}{1} + 8z - 1 + x$

~~Продолжим (2) и (3):  $(2b+c)^4 = b^4 + 3$~~

~~$(4b^2 + 4bc + c)^2 = b^4 + 3$~~

~~$16b^4 + 16b^2c^2 + c^4 + 8bc^3 = b^4 + 3$~~

(1) + (3):  $81b^4 - 1 + b^4 + 1 = a^4 + c^4$

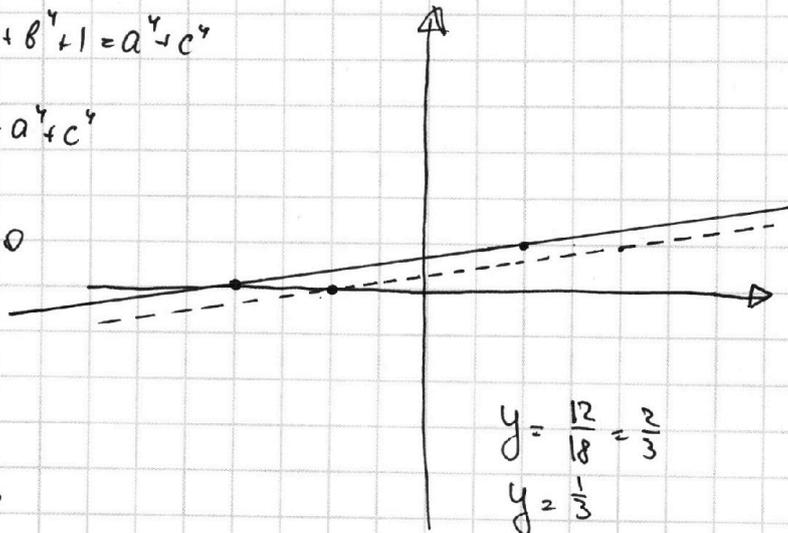
~~$82b^4 = a^4 + c^4$~~

$\sqrt{4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2}} \geq 0$

$4-6y \geq \frac{1}{6y-2}$

$-36y^2 + 24y + 12y - 8 \geq 0$

~~$36y^2 + 36y + 8 \leq 0 \Rightarrow 9y^2 - 9y + 2 \leq 0$~~   $81 - 9 \cdot 8 = 9$



$y = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$   
 $y = \frac{1}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

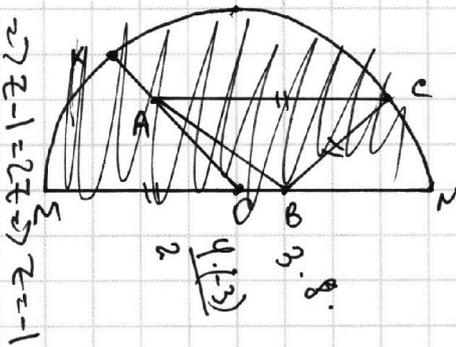
$$x=1$$

$$y=2$$

$$z=2$$

$$6(2-1) = 6$$

$$\frac{6 \cdot 1 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2$$



$$y=8$$

$$x=6$$

$$6yz = 8zx$$

$$7yz = yxz + yzx + yz^2$$

$$7yz = yxz + 3xy$$

$$yxz + yz = 3xy$$

$$yxz - yxy = xy - yz$$

$$\frac{4 \cdot 6(9-8)}{8(9-6)}$$

$$-x+6 = 3x-2y$$

$$18 = 2x$$

$$x=9$$

$$30 = 4x$$

$$x=7.5$$

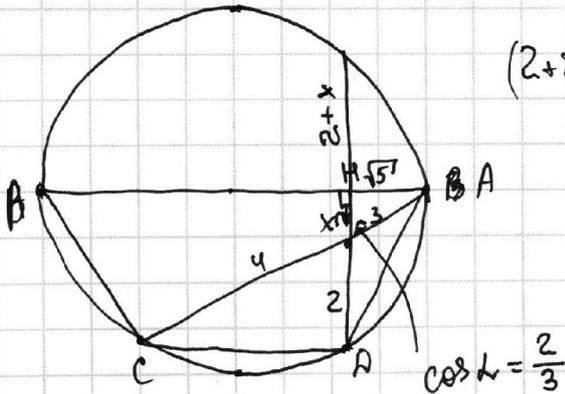
$$(2+2x)z = 4 \cdot 3$$

$$(1+x)z = 3$$

$$x=2$$

$$CA = \sqrt{16+4 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{20 - \frac{32}{3}} = \sqrt{\frac{60-32}{3}} = \sqrt{\frac{28}{3}}$$



$$\frac{4 \cdot 6(7.5-8)}{8 \cdot 7.5-6}$$

$$3yz - 3yx = yxz - yz^2$$

$$yxz + 3yz = yz^2$$

$$4xz = 3zy + yx$$

$$4xz - yx = 3yz - 3yx$$

$$4xz - 3yx = 4yz$$

$$yz - yx = 4zy - 4zx$$

$$7 \cdot 6(45 \cdot 13 + 1)$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 45 \\ \hline 65 \\ 52 \\ \hline 585 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4586 \\ \times 42 \\ \hline 1172 \\ 2344 \\ \hline 24612 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ - 5 \\ \hline 625 \\ - 65 \\ \hline 63 \\ - 63 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2030 \\ - 14 \\ \hline 63 \\ - 63 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{4 \cdot 6(x-8)}{8(x-6)}$$

$$3x - 24 = 6 - x$$

$$4x = 30$$

$$x = 7.5$$

$$4x = 30 \Rightarrow x = 7.5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~898~~ ~~3 4225 + 1089 = 5314~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

