

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13



1. [5 баллов] На дуге полукруга с диаметром MN и центром O взята точка K . Построен треугольник ABC такой, что его вершина A лежит на отрезке OK , вершина B — на отрезке ON , вершина C — на дуге KN . Найдите отношение площади сектора $МОК$ к площади полукруга, если известно, что $AC = BC = OM$ и $\angle ACB = 72^\circ$.

2. [4 балла] Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} \min(a; b) = 7|a - b|, \\ 7 \cdot \max(a, b) = 8(\text{НОД}(a; b))^2 - 64. \end{cases}$$

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{y + 3 - 10x} + \frac{1}{\sqrt{10x - 1 - y}} > y^2 + 12y.$$

4. [3 балла] Петя загадал такие вещественные числа x, y, z , что выражения

$$\frac{x(y - z)}{y(z - x)} \quad \text{и} \quad \frac{2y(z - x)}{z(y - x)}$$

принимают одно и то же значение A . Найдите все возможные значения A , если известно, что их не менее двух.

5. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AB , а H — ортогональная проекция точки D на AB . Диагональ AC пересекает отрезок DH в точке X . Найдите CD , если $DH = 20$, $AH = 15$, $CX = 36$.
6. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt[3]{8x + 1} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9x - 1}$.
7. [5 баллов] Сколькими способами из натуральных чисел от 2002 до 2025 можно выбрать 6 чисел так, чтобы среди выбранных чисел нашлось 3 числа, дающих одинаковые остатки от деления на 8?

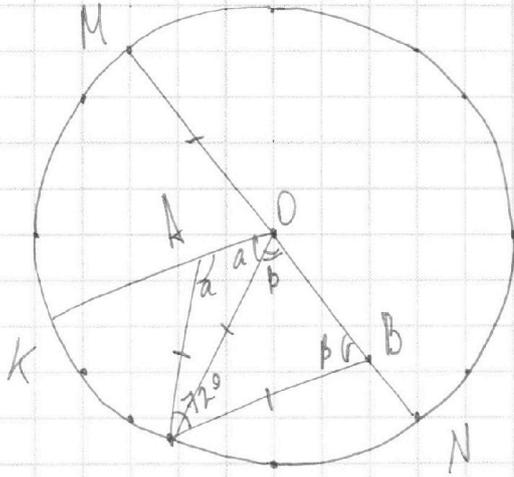


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. O - центр полуокружности, то O лежит на середине отрезка $MN \Rightarrow OM = ON = \text{радиус}$.

Аналогично OC - радиус;

Обозначим радиус полуокружности как R
 $\Rightarrow AC = BC = OM = ON = R$

(C лежит на дуге $MN \Rightarrow OC$ - радиус)
 Значит $\triangle CAO$ - равнобедренный, как и $\triangle OCB$ (т.к.

$AC = OC, OC = BC$)

$\Rightarrow \angle CAO = \angle AOC \stackrel{\alpha}{=} a$, а $\angle COB = \angle OBC \stackrel{\beta}{=} b$.

$\Rightarrow \angle ACO = 180^\circ - 2a$, $\angle OCB = 180^\circ - 2b$

$\Rightarrow 180^\circ - 2a + 180^\circ - 2b = 72^\circ$

$\Rightarrow 2a + 2b = 360 - 72 \Rightarrow a + b = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$

\Rightarrow Попробуем $\angle KON \equiv \angle AOB = a + b = 144^\circ$

\Rightarrow Т.к. $\angle MON = 180^\circ$ (диаметр MN) $\Rightarrow \angle MOK = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$.

$$\Rightarrow S_{\text{МОК}} = \frac{S_{\text{окруж}} \cdot 36^\circ}{360^\circ} = \frac{S_{\text{окруж}}}{10}$$

$$S_{\text{полуокруж}} = \frac{S_{\text{окруж}} \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{S_{\text{окруж}}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{МОК}}}{S_{\text{полуокруж}}} = \frac{\frac{S_{\text{окруж}}}{10}}{\frac{S_{\text{окруж}}}{2}} = \frac{2}{10} = 0,2$$

Значит искомое отношение равно $0,2$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a \leq b$. (В силу симметрии выражений для a и b это неважно, это больше a или b , но предположим, что b)

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a &= a_1 \cdot \text{НОД}(a, b) \\ b &= b_1 \cdot \text{НОД}(a, b) \end{aligned} \right\} \text{НОД}(a, b) \stackrel{=} {=} c \quad c \in \mathbb{N}, \text{ а также } a_1, b_1 \text{ взаимнопросты.}$$

Имея квадратное уравнение, подставим туда переменные уравнения:

$$\begin{cases} \min(a, b) = 7|a-b| \\ 7 \cdot \max(a, b) = 8(\text{НОД}(a, b))^2 - 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7|a-b| \\ 7b = 8c^2 - 64 \end{cases}$$

Т.к. $b > a \Rightarrow |a-b| = b-a$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 7(b-a) \\ 7b = 8c^2 - 64 \end{cases} \quad \text{Теперь подставим вместо } a \text{ и } b \text{ значения } a_1 c \text{ и } b_1 c:$$

$$\begin{cases} a_1 c = 7(b_1 - a_1)c \\ 7b_1 c = 8c^2 - 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7b_1 - 7a_1 \\ 8c^2 - 7b_1 c - 64 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7b_1 = 8a_1 \\ 8c^2 - 7b_1 c - 64 = 0 \end{cases}$$

Т.к. ранее мы написали, что a_1 и b_1 взаимнопросты \Rightarrow

$$b_1 = \frac{8a_1}{7} \Rightarrow b_1 = 8, a_1 = 7 \text{ - это единственный вариант для } a_1 \text{ и } b_1$$

$$\Rightarrow 8c^2 - 56c - 64 = 0 \quad /: 8 \Rightarrow c^2 - 7c - 8 = 0$$

$$D = 49 + 32 \Rightarrow \text{Т.к. } c \text{ не может быть } \geq 0, \text{ то}$$

$$c = \frac{7 + \sqrt{49 + 32}}{2} = 8 \Rightarrow a = 7 \cdot 8 = 56 \quad b = b_1 c = 8 \cdot 8 = 64$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

В кратце рассмотрим, почему, если $a \geq b$, ответ получится для симметричности:

$$\begin{cases} b = 7|a-b| & (\text{Так } a \geq b, \text{ то } |a-b| = a-b) \\ 7a = 6c^2 - 64 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} b_1, c = 7(a-b_1) \neq \Rightarrow 6b_1 = 7a_1 \Rightarrow a_1 = b_1, b_1 = 7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a_1 - c = 6c^2 - 64 \Rightarrow 9c^2 - 56c - 64 = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$c^2 - 7c - 8 = 0$$

$$D = 7^2 + 52 \Rightarrow \text{Так } c \geq 0, \text{ то } c = \frac{7 + \sqrt{7^2 + 52}}{2} = 8$$

$$\Rightarrow a = 64, b = 56$$

Получили симметричные ответ: \Rightarrow

Все возможные пары $(a; b)$: ~~$(56; 64)$~~ $(64; 56); (56; 64)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запишем уравнение и несколько условий для его выполнения:

$$\sqrt{y+3-10x} + \frac{1}{\sqrt{10x-1-y}} > y^2+12y$$

$$\begin{cases} y+3-10x \geq 0 & (1) \\ 10x-1-y > 0 & (2) \end{cases} \quad \text{Из (1) и (2) выразим } y:$$

$$\begin{cases} y \geq 10x-3 \\ y < 10x-1 \end{cases} \quad \text{Т.к. } x, y \in \mathbb{Z}, \text{ то } y \text{ может равняться либо } 10x-3, \text{ либо } 10x-2.$$

$$10x-3 \leq y < 10x-1$$

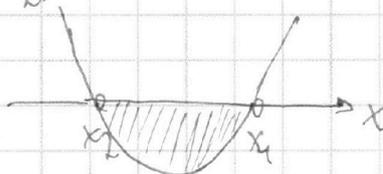
1) Рассмотрим вариант, когда $y = 10x-3$, подставим y в первоначальное выражение:

$$\sqrt{10x-3+3-10x} + \frac{1}{\sqrt{10x-1-10x+3}} \neq 100x^2-60x+9+120x-36$$

$$100x^2+60x-\left(25+\frac{12}{2}\right) \neq 0 \quad (\text{Решим базовое квадратное уравнение})$$

$$D = 60^2 + 4 \cdot 100 \cdot \left(25 + \frac{12}{2}\right) = 3600 + 10000 + 200\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-60 + \sqrt{D}}{200} \\ x_2 = \frac{-60 - \sqrt{D}}{200} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x \in \left(\frac{-60 + \sqrt{3600 + 200\sqrt{2}}}{200}; \right.$$

$$\left. \frac{-60 + \sqrt{3600 + 200\sqrt{2}}}{200} \right), x \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Очевидно, что так $y = 10x - 3$, то при $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$, соответственно каждому x соответствует какой-то единственной y . (у столько же, сколько и x).
(x, y) пар будет столько, сколько решений x .

Аналогично построим ее график, когда $y = 10x - 2$:

$$\sqrt{40x - 2 + 5 - 10x} + \frac{1}{\sqrt{10x - 1 - 10x + 2}} > 100x^2 - 40x + 4 + 120x - 24$$

$$1 + 1 > 100x^2 + 80x - 20$$

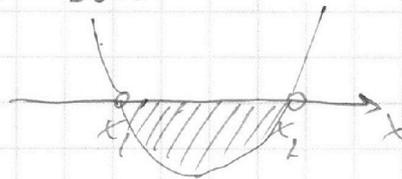
$$100x^2 + 80x - 22 < 0 \quad | :2$$

$$50x^2 + 40x - 11 < 0 \quad (\text{решим квадратное уравнение})$$

$$D = 1600 + 220 \cdot 11 = 1600 + 2420 = 4020$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-40 - \sqrt{4020}}{100}$$

$$x_2 = \frac{-40 + \sqrt{4020}}{100}$$



$$\Rightarrow x \in \left(\frac{-40 - \sqrt{4020}}{100}; \frac{-40 + \sqrt{4020}}{100} \right); x \in \mathbb{Z}$$

Тут точно также так $y = 10x - 2$, где каждому x есть только $1 y$, значит пар (x, y) будет столько, сколько удовлетворяет x условиям.

значит в итоге пар получится в сумме две и всего систем столько, сколько в сумме удовлетворяют x (1-й и 2-й случаи).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$13600 + 200\sqrt{2} \approx 13600 + 1,41 \cdot 200 = 13600 + 282 = 13882.$$

Найти границу значений x для 1-го случая:

$$\sqrt{2100} < \sqrt{13882} < \sqrt{14400} \Rightarrow 110 < \sqrt{13882} < 120$$

$$\Rightarrow x_{\min} = \frac{-60 + 60}{200} = 0.$$

$$x_{\max} = \frac{-60 + 60}{200} = 0.$$

} В 1-м случае удовлетворяет только $x=0$ (1 случай где $x \Rightarrow$ 1 пара (x,y))

Найти границу значений x для 2-го случая:

$$\sqrt{3600} < \sqrt{3600} < \sqrt{4900} \Rightarrow 60 < \sqrt{3600} < 70$$

(# В обоих случаях или ^{округлим} ~~расчет~~ ^{рассчитываем} ~~рассчитываем~~ до десятков, т.к. -40 или -60).
↓ ^{оно конче}

$$\Rightarrow x_{\min} = \frac{-40 - 60}{100} = -1.$$

$$x_{\max} = \frac{-40 + 40}{100} = 0.$$

} Во 2-м случае удовлетворяет 2
 x ($x=0$ и $x=-1$) \Rightarrow
где 2-го случае 2 пары (x,y)

\Rightarrow Всего парочек $1 + 2 = 3$ пары (x,y) :

$$(0, -3); (0, -2); (-1, -12).$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[4]{8x+1} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{8x-1}$$

$$\sqrt[4]{8x+1} - \sqrt[4]{8x-1} = \sqrt[4]{x} \quad \text{возведем в квадрат}$$

$$\sqrt{8x+1} + \sqrt{8x-1} - 2\sqrt{(8x-1)(8x+1)} = \sqrt{x}$$

$$\sqrt{8x-1} - 2\sqrt{(8x-1)(8x+1)} = \sqrt{x} - \sqrt{8x+1} \quad \text{возведем в квадрат}$$

$$9x-1 + 4\sqrt{(8x-1)(8x+1)} - 2$$

$$\sqrt[4]{8x+1} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{8x-1}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

У отрезка $[2002; 2025]$ всего можно взять 24 различных числа

$24 \cdot 8 = 192 \Rightarrow$ Их всего в остаток при делении на 8 может быть, 70

Можно взять максимум 3 числа, дающих одинаковые остатки на 8.

2002, 2010, 2018 - 2

2005, 2011, 2019 - 3

2004, 2012, 2020 - 4

2005, 2013, 2021 - 5

2006, 2014, 2022 - 6

2007, 2015, 2023 - 7

2008, 2016, 2024 - 0

2009, 2017, 2025 - 1

Или 170 чисел с остатком 2, или

это ~~тоже~~ (способов выбрать эти 3 числа,

далее из 24 числа или 2 далее из

21 числа или выбираем 4-е число, из

20 чисел выбираем 5-е число, из 19 чисел

⊖ Пусть мы рассуждаем в том случае

остатком 2 $\rightarrow N = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 24 \cdot 20 \cdot 19}{\text{каждо перестановка}} = 6!$

~~$\Rightarrow N = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{7 \cdot 19}{10} = 13,3$~~

$$= \frac{70 + 63}{10} = \frac{133}{10} = 13,3$$

Приведем более пример, когда можно взять 3 числа, дающих одинаковые остатки при делении на 8

Представим ситуацию, то нам нужен еще, дающие при делении на 8 остаток 2, тогда мы должны взять эти три числа и еще можем выбрать 3

числа из оставшихся, причем в каком порядке не важно \Rightarrow



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Всего 1 вариант взятия мешка с остатком 2 и $\frac{71 \cdot 20 \cdot 19}{3!}$ способов взятия

оставшихся мешков (C_n^3) Но также видно учитывалось, что среди этих ~~вариантов~~ способов может быть способ, когда мы взяли еще 3 мешка с одинаковым остатком на 8, к примеру 5. Тогда мы должны будем учитывать эту комбинацию.

Но тогда всего способов две вариации а с остатком 2 будет

$$\frac{7 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{3 \cdot 2} = 70 \cdot 19 = (70 + 63)10 = 1330.$$

Но там будет 1 вариант $\sqrt{}$ с остатком 3, $\sqrt{}$ с остатком 4 и с еще 3 мешками

так далее, но если будет 7 повторяющихся вариантов.

Но так мы еще должны перебрать способы для остатка 3, 4 ..., где также будет по 7 повторяющихся вариантов, но способа почитаем неповторяющиеся общее кол-во вариантов: $(1330 - 7) \cdot 8$ и останется для каждого варианта

по 7 повторяющихся способов: $7 \cdot 8$, но тут каждый способ повторится 2 раза

(к примеру остатки 111 и 533 или 333 и 111 в любой последовательности)

\Rightarrow нужно взятие и добавит к общему числу неповторяющихся способов половину

$$\text{от повторяющихся} \Rightarrow (1330 - 7) \cdot 8 + \frac{7 \cdot 8}{2} = (1330 - 7) \cdot 8 + 28 = 1323 \cdot 8 + 28 =$$

$$= 10584 + 28 = 10612 \text{ - столько всего способов взятия 6 мешков,}$$

чтобы 3 среди них имели одинаковый остаток от деления на 8.

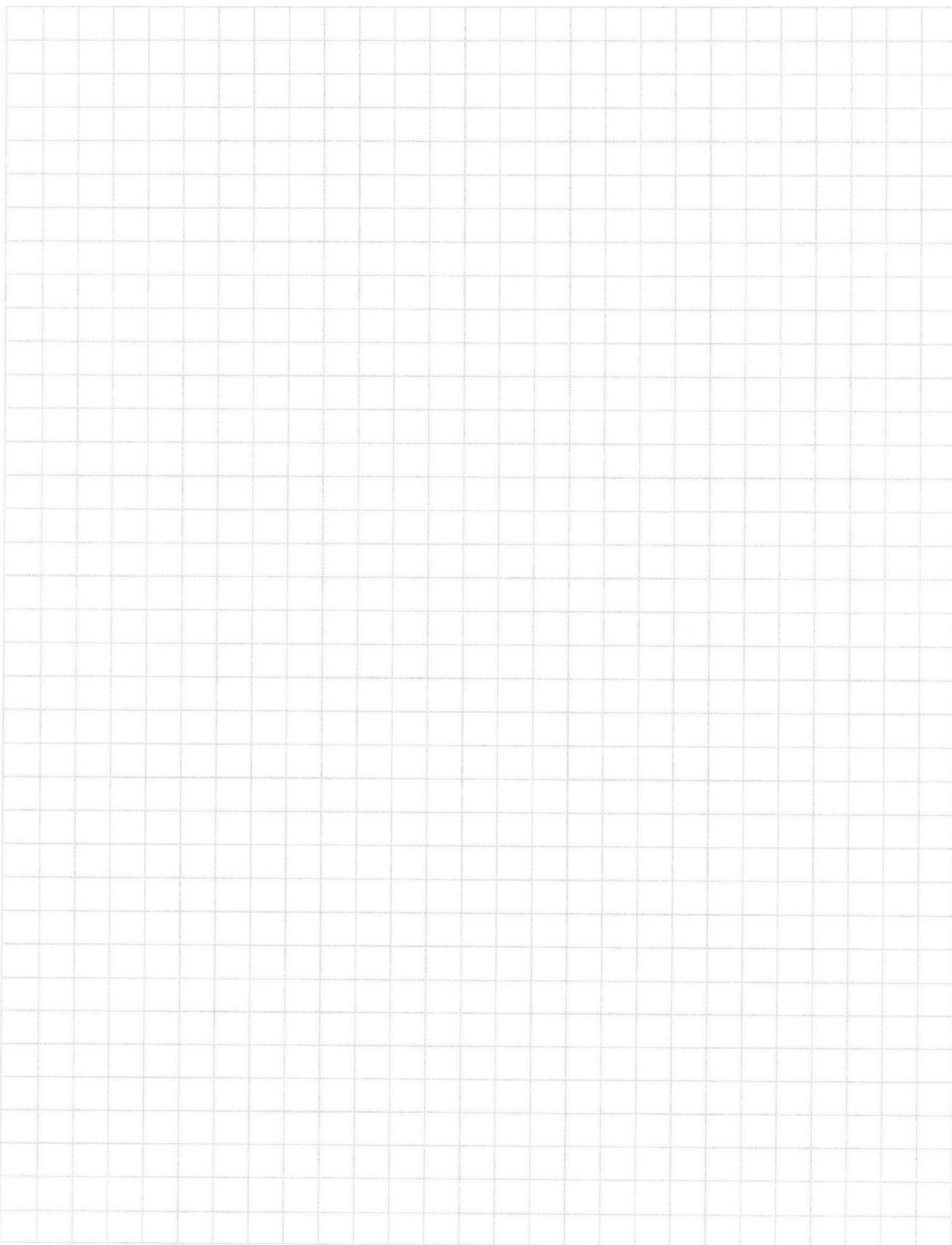


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

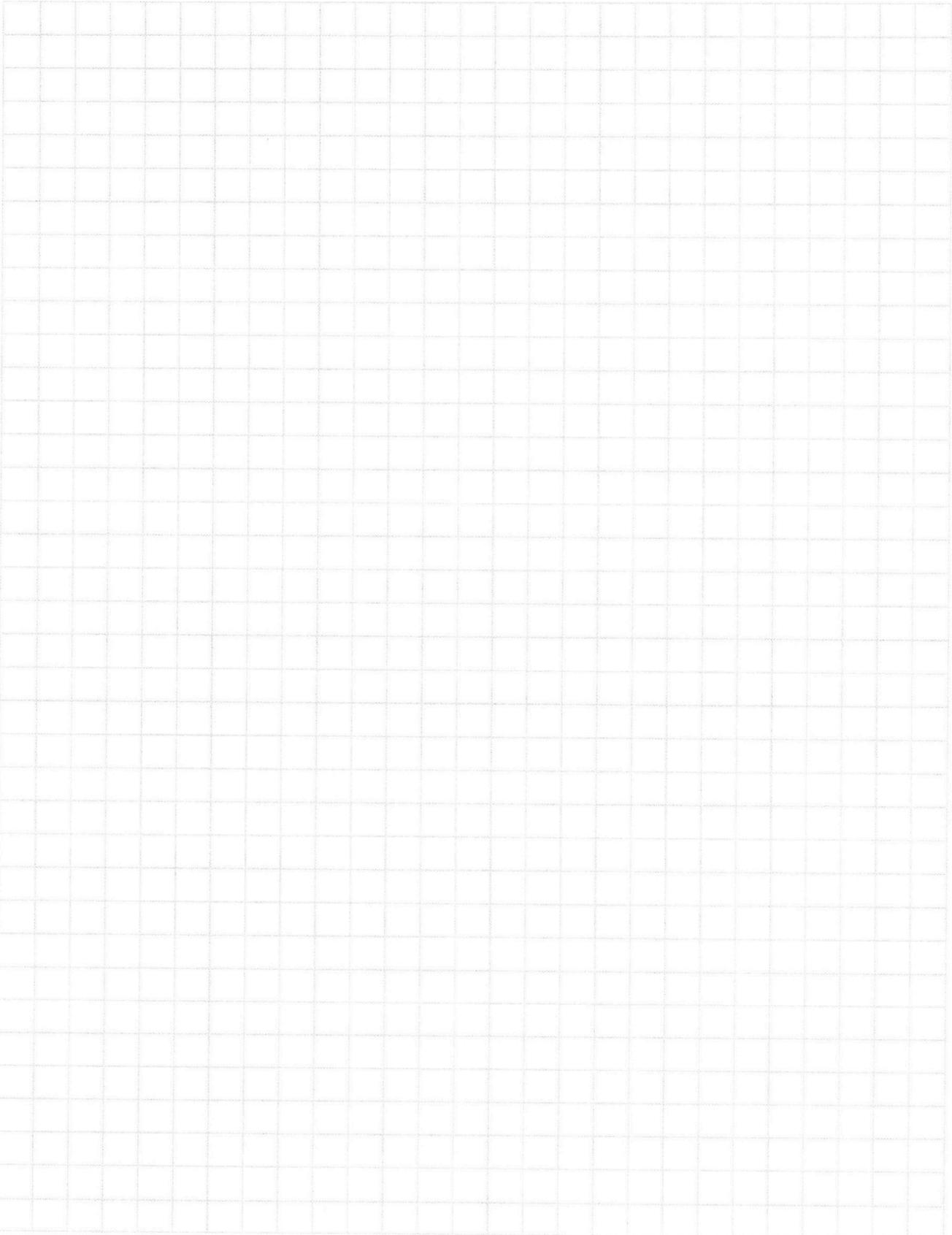
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

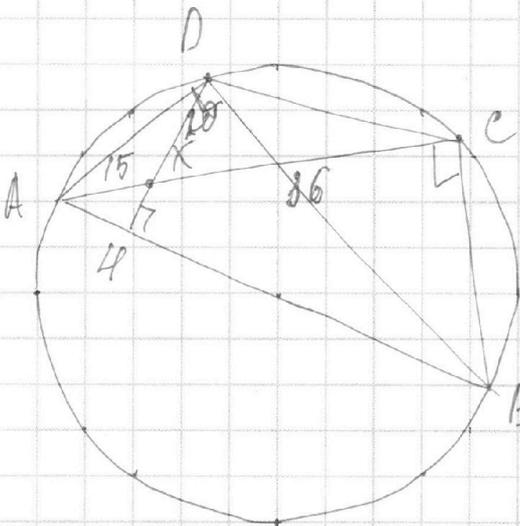
$$y = \{10x-3; 10x-2\}$$

1) $y = 10x-3$

$$\sqrt{10x-3} + 3 - 10x + \frac{1}{\sqrt{10x-1} - 10x + 3} \geq (10x-3)^2 + 12y \cdot \frac{10x-3}{10x-3}$$

$$\frac{1}{10} \geq 100x^2 - 60x + 9 + 120x - 36$$

~~$10x \in \mathbb{Z} \rightarrow 100x^2 \in \mathbb{Z}, 60x \in \mathbb{Z}, 120x \in \mathbb{Z}$~~
 ~~\rightarrow Все ~~числа~~ ~~целые~~~~



$$\sqrt[4]{9x+1} = \sqrt[4]{9x} + \sqrt[4]{9x-1}$$

$$9x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{9}$$

$$x \geq 0 \quad 9x-1 \geq 0$$

$$x \geq 0 \quad x \geq \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{1}{9}$$

$$\sqrt[4]{9x+1} = \sqrt[4]{9x} + \sqrt[4]{9x-1} \quad (**2)$$

$$\sqrt[4]{9x+1} = \sqrt{x} + \sqrt[4]{9x-1} + 2\sqrt[4]{x(9x-1)}$$

$$7/1 = \frac{(1+2x)\sqrt[4]{9x-1} - (1-2x)\sqrt[4]{9x+1}}{4}$$

$$\Leftrightarrow (6 \dots)$$

$$x_1 = \frac{1-2x}{3} - \frac{17x}{3}$$

$$1-2x \sqrt[4]{9x-1} \quad x_1 = \frac{1+2x}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 74 = 8a \\ c = \frac{7b + \sqrt{49b^2 + 64 \cdot 32}}{16} \end{cases}$$

~~Решение~~

Т.к. мы знаем углы, то a , b и c будем считать катетами, а гипотенузой, т.к. a и b — катеты, c — гипот.

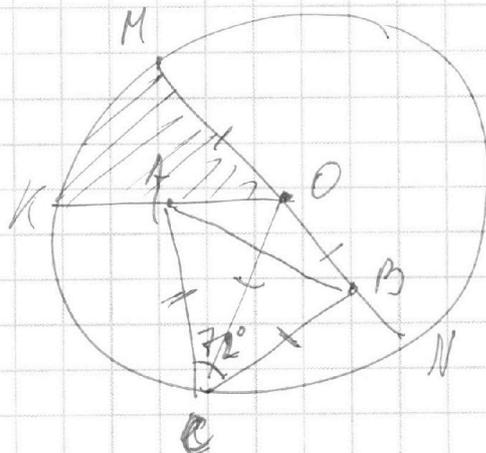
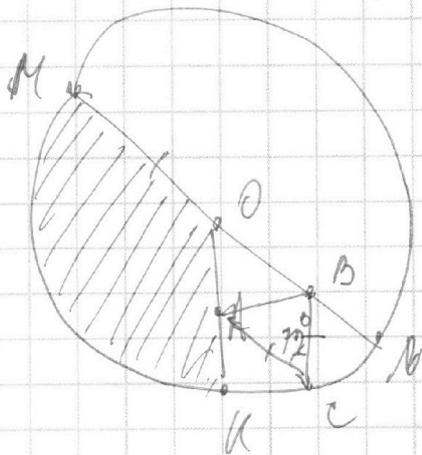
$$\rightarrow b = \frac{8a}{7}$$

$\rightarrow a = 7, b = 8$, это единств. варианты

$$\rightarrow c = \frac{7 \cdot 8 + \sqrt{49 \cdot 64 + 64 \cdot 32}}{16}$$

$$= \frac{7 \cdot 8 + 8\sqrt{49 + 32}}{16} = \frac{7 \cdot 8 + 8 \cdot 9}{16} = \frac{8(7+9)}{16} = 8$$

$$\Rightarrow a = 56, b = 64.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Также мы можем использовать ^{систему} ~~формулы~~ ~~уравнения~~:

$$a_1 = 7(b_1 - a_1) \quad (1)$$

$$7 \cdot b_1 \cdot c = b_1^2 - 64 \quad (2)$$

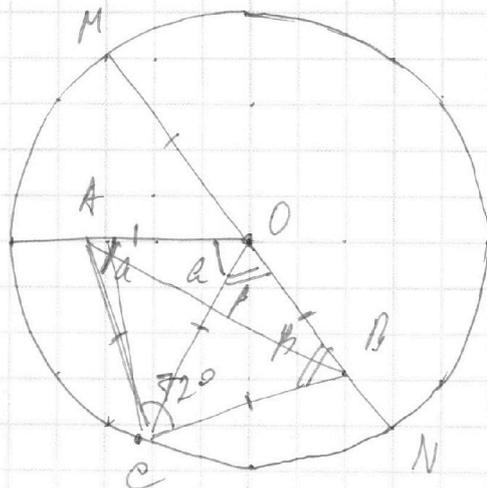
$$\Rightarrow a_1 = 7b_1 \Rightarrow 7b_1 = 8a_1 \quad (3)$$

$$b_1^2 - 7b_1 \cdot c - 64 = 0$$

$$D = 49b_1^2 + 64 \cdot 64 > 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{7b_1 + \sqrt{49b_1^2 + 64 \cdot 64}}{16}$$

~~$$b_1 \geq 1 \Rightarrow c \geq$$~~



Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 7b_1 = 8a_1 & \Rightarrow a_1 = \frac{7}{8}b_1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \frac{7b_1 + \sqrt{49b_1^2 + 64 \cdot 64}}{16} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \frac{7(b_1 - a_1) + \sqrt{49(b_1 - a_1)^2 + 64}}{2} & (3) \end{cases}$$

Выразим из (1) a_1 и подставим в (2) и (3), получим:

$$\frac{7b_1 + \sqrt{49b_1^2 + 64 \cdot 64}}{16} = \frac{7(b_1 - \frac{7}{8}b_1) + \sqrt{49(b_1 - \frac{7}{8}b_1)^2 + 64}}{2}$$

$$\frac{7b_1 + \sqrt{49b_1^2 + 64 \cdot 64}}{8} = \frac{7b_1}{8} + \frac{\sqrt{49 \frac{b_1^2}{64} + 64}}{64}$$

~~$$\frac{7b_1 + \sqrt{49b_1^2 + 64 \cdot 64}}{8} = \frac{7b_1}{8} + \frac{\sqrt{49b_1^2 + 52 \cdot 64}}{64}$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Но номер из решения задачи будет > 0~~

~~$$7(a-b) = 8c^2 - 64 - 49(a-b)$$~~

~~$$\Rightarrow 8c^2 - 64 - 56(a-b) = 0$$~~

~~Вспомогательное $a = a_1 \cdot e$, $b = b_1 \cdot c \Rightarrow a-b = (a_1 - b_1) \cdot e^0$~~

~~$$\Rightarrow 8c^2 - 56(a_1 - b_1)c - 64 = 0$$~~

~~$$D = 56^2(a_1 - b_1)^2 + 4 \cdot 8 \cdot 64 > 0$$~~

~~Значит c имеет 2 варианта ответа, но для конкретных~~

~~a и b — единственные \Rightarrow ↓~~

Будет пусть $b \geq a$:

$\min(a, b) = a$, $\max(a, b) = b$ Выполнено $a = a_1 \cdot \text{НОД}(a, b)$
 $\left. \begin{matrix} b = b_1 \cdot \text{НОД}(a, b) \end{matrix} \right\} \text{НОД}(a, b) = e \cdot \frac{b_1}{a_1} = 0$

→ Перепишем полученные величины в каждую систему:

$$\begin{cases} a = 7(a-b) \\ 7 \cdot b = 8c^2 - 64 \end{cases} \quad (a-b) = [\text{т.к. } b > a] = b - a \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 7(b-a) & (1) \\ 7b = 8c^2 - 64 & (2) \end{cases} \quad \text{Должны быть } (1) \text{ и } 7 \text{ и } \text{вытаскиваем } \underline{\underline{2.0}}$$

$$\begin{cases} 7a = 49(b-a) \\ 7b = 8c^2 - 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(b-a) = 8c^2 - 64 - 49(b-a) \\ 8c^2 - 56(b-a) - 64 = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Также заменим b -ая $(b_1 - a_1) \cdot c$:

$$bc^2 - 56(b_1 - a_1)c - 64 \geq 0 \quad | : b$$

$$c^2 - 7(b_1 - a_1)c - 8 \geq 0$$

$$D = 49(b_1 - a_1)^2 + 32 > 0$$

Т.к. мы берем конкретные числа a и b , то для них должен быть единственный $c > 0$, т.е. мы берем только 1 корень, который является положительным (хотя предположительно 2 корня).

$$c = \frac{7(b_1 - a_1) - \sqrt{49(b_1 - a_1)^2 + 32}}{2}$$

~~$$\sqrt{49(b_1 - a_1)^2 + 32} \geq 32$$~~

Величина, что $b_1 - a_1 > 0$.

\Rightarrow сравним $7(b_1 - a_1)$ и $\sqrt{49(b_1 - a_1)^2 + 32}$:

$$\sqrt{49(b_1 - a_1)^2} < \sqrt{49(b_1 - a_1)^2 + 32}$$

Очевидно, что 1 больше 1 \Rightarrow всегда будет больше отрицательный

\Rightarrow необходимо будет взять положительный -

$$c = \frac{7(b_1 - a_1) + \sqrt{49(b_1 - a_1)^2 + 32}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a > b$
 $\Rightarrow \min(a; b) = b$; $\max(a; b) = a$

Предположим, что $a = a_1 \cdot \text{НОД}(a; b)$
 $b = b_1 \cdot \text{НОД}(a; b)$ } $\text{НОД}(a; b) = c$.

Таким образом a_1 и b_1 не имеют общих делителей кроме 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 7|a - b| \quad (1) \\ 7 \cdot a = b(c^2 - 64) \quad (2) \end{array} \right\} \text{Поделим (1) на (2):}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7b = 49|a - b| \quad (1) \\ 7a = bc^2 - 64b \quad (2) \end{array} \right\} \text{(1) вычтем из (2):}$$

$$\Rightarrow 7(a - b) = 49|a - b| + bc^2 - 64b \quad a > b \Rightarrow |a - b| = a - b$$

$$\Rightarrow 7(a - b) + bc^2 - 64b = 0$$

$$a - b \geq 0, c^2 > 0 \Rightarrow$$

$$21(a - b) + 4c^2 - 32 = 0 \quad (\text{мы получили некоторое уравнение на } a \text{ и } b.)$$

$$\text{Представим } a = a_1 \cdot c, b = b_1 \cdot c,$$

$$4c^2 + 21(a_1 - b_1)c - 32 = 0$$

$$D = 21^2(a_1 - b_1)^2 + 32 \cdot 4 \cdot 4 \geq 0$$

$$c = \frac{(b_1 - a_1)21 \pm \sqrt{D}}{4}$$

Т.к. для конкретных a и b мы ищем единственную $a_1, b_1, c \Rightarrow c$ может иметь только одно значение $\Rightarrow D$ должен быть равен 0.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x(y-z)}{y(z-x)} = A = \frac{2y(z-x)}{z(y-x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \neq x, z \neq x$$

$$zx(y-z)/(y-x) = 2y^2(z-x)^2$$

$$zx(y^2 - yx - zy + xz) = 2y^2(z^2 - 2xz + x^2)$$

$$zxy^2 - yxz^2 - z^2xy + x^2z^2 = 2y^2z^2 - 4xzy^2 + 2x^2y^2$$

$$(1) \min(a, b) = \frac{ab}{a+b}$$

$$(2) \frac{1}{\min(a, b)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{\min(a, b)} = \frac{a+b}{ab}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) a = a_1 \cdot \text{НОД}(a, b) \\ (2) b = b_1 \cdot \text{НОД}(a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{a-b} = \frac{1}{a_1 - b_1} \cdot \frac{1}{\text{НОД}(a, b)}$$

$$\text{НОД}(a, b) = c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\min(a, b)} \cdot \frac{1}{\max(a, b)} = \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{|a_1 - b_1| \cdot \text{НОД}(a, b)^3}$$

$$(1) \cdot (2) \Rightarrow \frac{1}{ab} = \frac{1}{|a_1 - b_1| \cdot \text{НОД}(a, b)} \cdot \frac{1}{\text{НОД}(a, b)^2} = \frac{1}{|a_1 - b_1| \cdot \text{НОД}(a, b)^3}$$

$$56 \cdot \text{НОД}(a, b)^3 = |a_1 - b_1| \cdot \text{НОД}(a, b)^3 \Rightarrow |a_1 - b_1| = 56$$

Пусть a всегда больше $b \Rightarrow$

$$a_1, b_1, c^2 = 56(a_1 - b_1)c^2 - (a_1 - b_1)c \cdot 56$$

$$a_1, b_1, c^2 = 56(a_1 - b_1)(c^2 - c) \quad c \neq 0$$

$$a_1, b_1, c = 56(a_1 - b_1)(c - 1) \quad \text{Делится, что ТМ}$$

$c = \text{НОД}(a, b) \Rightarrow a_1$ и b_1 не имеют общие делителей.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

