



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x, y, z — натуральные числа

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases} \quad \text{Перемножим все 3 уравнения:}$$

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(x-2)(y-2)(z-2) \quad | : xyz \neq 0, \text{но} \\ \text{ум.}$$

$$(x-2)(y-2)(z-2) = xyz$$

$$(xy - 2y - 2x + 4)(z-2) = xyz$$

$$xyz - 2(xz + yz + xy) + 4(x + y + z) = xyz$$

$$xy + yz + xz = 2(x + y + z)$$

Теперь подставим значения из системы ур-й:

$$z^2 - 2z + x^2 - 2x + y^2 - 2y = 2x + 2y + 2z - 4$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 4y + z^2 - 4z = -4 \quad | + (4 + 4 + 4)$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = 8$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 8$$

Тогда выражение $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$ имеет одно решение, и это 8

Ответ: $\{8\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что числа вида: $999 \dots 999$ в квадрате дают числа вида: $999 \dots 980 \dots 001$

В нашем случае, если исходное число n состояло из 30001 девяток, то n^2 будет состоять из 60002 цифр, 2 из которых 1 и 8 , а 30000 - нули, тогда 30000 - девятки. При умножении n^2 числа на число n мы получим число вида: $\underbrace{999 \dots 9}_{m} \underbrace{980 \dots 0}_{1 \text{ а } 1} \underbrace{29 \dots 999}_{k}$, где k - количество

нулей в $n^2 + 1$, то есть $k = 30001$, а m и a равны и имеют значение для $n^3 = \frac{60002 \cdot 2}{\text{все цифры } n^2}$

$$= \left(\frac{30001 \cdot 3}{\text{все цифры } n^3} - \frac{k}{\text{нули}} - \frac{2}{\text{кол-во } 1 \text{ и } 2} \right) : 2 = \frac{90003 - 30001 - 2}{2} =$$

$$= 30000. \text{ Тогда кол-во } 9 \text{ в } n^3 = m + k =$$

$$= 60001$$

Ответ: 60001 девятка



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черпунком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть некоторое число n — это количество всех коробок. Тогда когда игроку дают выбрать 5 коробок из n , шанс его выигрыша составляет:

$$K_1 = \frac{C_5^3}{C_n^3} = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!}}{\frac{n!}{3! \cdot (n-3)!}} = \frac{60 \cdot (n-3)!}{n!}$$

А когда игроку дают выбрать 7 коробок:

$$K_2 = \frac{C_7^3}{C_n^3} = \frac{\frac{7!}{3! \cdot 4!}}{\frac{n!}{3! \cdot (n-3)!}} = \frac{210 \cdot (n-3)!}{n!}$$

Тогда, чтобы найти во сколько раз увеличился шанс выигрыша игрока, надо

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{210 \cdot (n-3)! \cdot n!}{60 \cdot (n-3)! \cdot n!} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: в 3,5 раз



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0 \\ 3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0 \end{cases}$$

Применим т. Виетта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - 2a \\ x_1 x_2 = a^2 - a - 7 \\ x_3 + x_4 = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \\ x_3 x_4 = \frac{6 - a^5}{3} \end{cases}$$

Заметим корни на из значения в данной нам арифметической прогрессии, где b - увеличение послед. члена:

$$\begin{cases} 2x + 13b = a^2 - 2a & (1) \\ (x + 6b)(x + 7b) = a^2 - a - 7 & (2) \\ 2x + 13b = \frac{a^3 - 2a^2}{3} & (3) \\ (x + 4b)(x + 9b) = \frac{6 - a^5}{3} & (4) \end{cases}$$

Заметим, что (1) и (3) равны, тогда:

$$3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2$$

$$a(a^2 - 5a + 6) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \\ a = 3 \end{cases} \text{ - значения параметра } a, \text{ подходящие (1) и (3)}$$

Теперь вычтем из (2) - (4):

$$x^2 + 13xb + 12b^2 - x^2 - 13xb - 36b^2 = a^2 - a - 7 - \frac{6 - a^5}{3}$$

$$6b^2 = \frac{3a^2 - 3a - 21 - 6 + a^5}{3}$$

$$b = \frac{a^5 - 3a^2 + 3a + 27}{3}$$

Но если мы можем узнать значения b при a , подходящих для (1) и (3):

$$b_0 = -9; b_2 = -\frac{53}{3}; b_3 = -2625, (3)$$

Осталось только подставить эти значения в дискриминант (2) и (4), чтобы узнать $\geq$ ли он 0:

при $a = 0$ - да; $a = 2$ - да; $a = 3$ - нет Ответ: ~~{0; 2}~~ {0; 2}

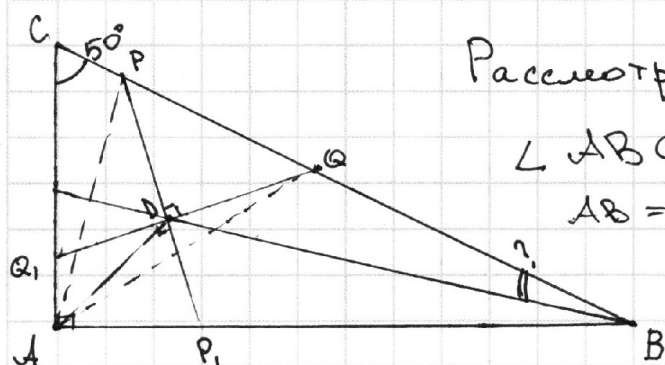


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим $\triangle APB$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle ABC = 90^\circ - \angle ACB = 40^\circ \\ AB = AP \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle APB = \angle PAB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

Тогда $\angle CAP = \angle CAB - \angle PAB = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$

Но есть $\angle PAQ = \angle CAQ - \angle CAP$, а $\angle CAQ = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} =$

$\angle CAQ = 65^\circ$, А-но $\angle PAB \Rightarrow \angle PAQ = 65^\circ - 20^\circ = 45^\circ$

Теперь рассмотрим на $\triangle PDQ$:

$$\left. \begin{array}{l} DP = DQ \\ \angle PDQ = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle DPQ = \angle DQP = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle APP_1 = \angle APB - \angle DPQ = 70^\circ - 45^\circ = 25^\circ$$

А-но $\angle AQQ_1 = 65^\circ - 45^\circ = 20^\circ$

Проведём AD и заметим, что:

$$\left. \begin{array}{l} \angle PAQ = 45^\circ \\ \angle APD = 25^\circ \\ \angle AQD = 20^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow AD = PD = DQ, \text{ т.к. } \left\{ \begin{array}{l} \angle PAD = 25^\circ = \angle AQP \\ \angle QAD = 20^\circ = \angle AQD \end{array} \right.$$

AD делит $\angle PAQ$ на 2 части
Тогда рассмотрим $\triangle ADB$ и $\triangle PDB$:
 $\left. \begin{array}{l} AB = PB, \text{ по укл.} \\ AD = PD \\ DB - \text{общая} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle\text{-ки равны} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle DBA = \angle DBC = \angle ABC : 2 = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ \quad \text{Ответ: } 20^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

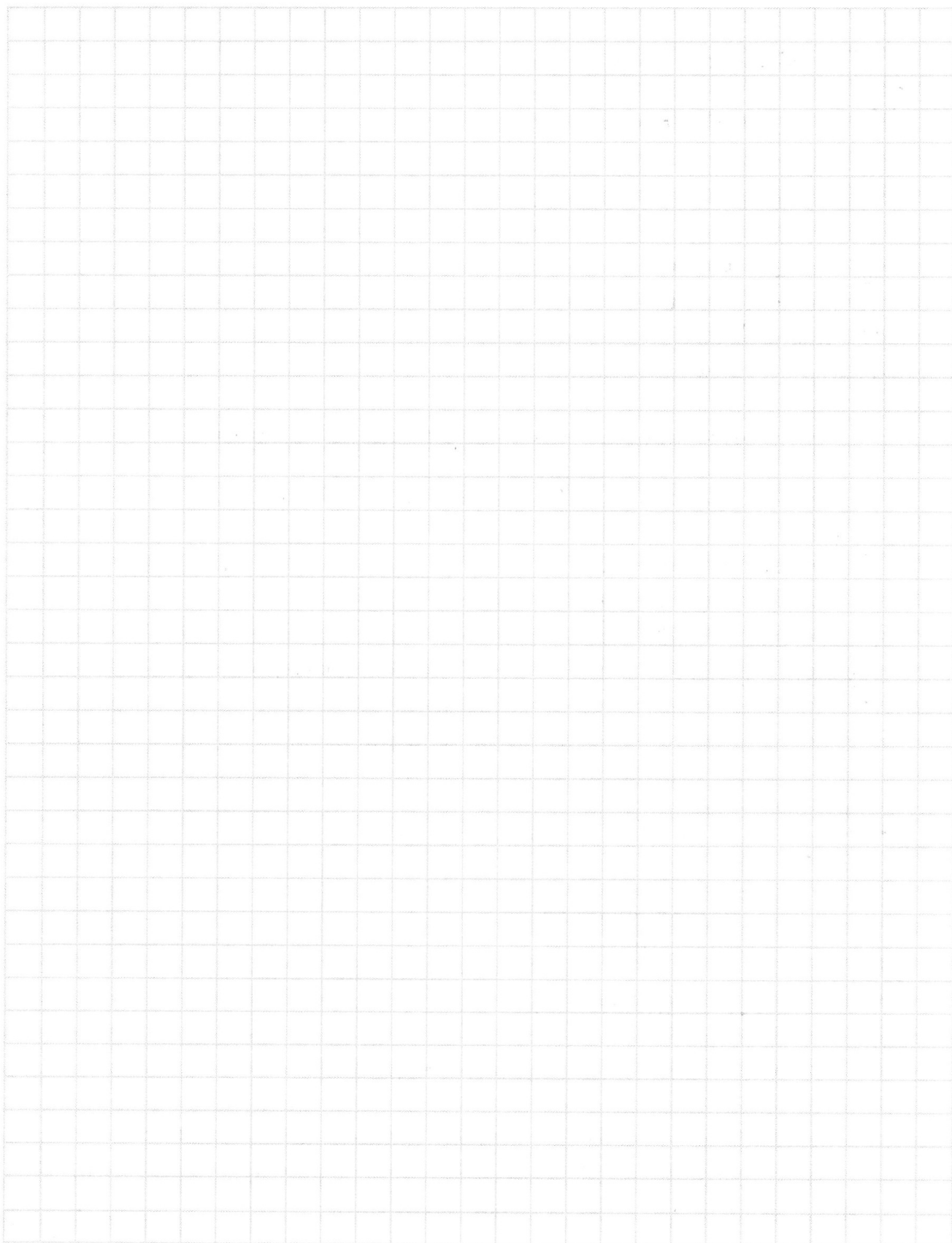
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 13xb + 42b = a^2 - a - 7$$

$$x^2 + 13xb + 36b = \frac{6-a}{3}$$

$$6b = a^2 - a - 7 - \frac{6-a}{3}$$

$$\frac{C_3^5}{C_3^5} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot (n-3)!} = \frac{4 \cdot 3!}{2} = \frac{60(n-3)!}{n!}$$

$$n = 5$$

$$\frac{60 \cdot 2}{5!} = \frac{60 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (n-3)!}{n!}$$

$$\frac{210 \cdot 4!}{5!} = 1$$

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a + 7 = 0$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6a^2 - a^5 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$2x_1 + 13 = a^2 - xa$$

$$(x_1 + 6)(x_1 + 1) = a^2 - a - 7$$

$$2x_1 + 13 = a^2 - 2a^2$$

$$2x_1 + 13 = a^3 - 2a^2$$

$$3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2$$

$$a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 6) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=2 \\ a=3 \end{cases}$$

$$\frac{3}{2-a^2} = \frac{6-a^2}{(x_1+1)(x_1+6)}$$

$$\frac{3}{2-a^2} = \frac{6-a^2}{(x_1+1)(x_1+6)}$$

$$3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2$$

$$a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 6) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=2 \\ a=3 \end{cases}$$

$$\frac{6 \cdot 1.8}{3} + \frac{2 \cdot 8}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} xy &= -2z + z^2 = z(z-2) \\ yz &= -2x + x^2 \\ zx &= -2y + y^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x+y+z &= \dots \\ x+y+z &= \dots \\ x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz) &= \dots \end{aligned}$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + xy + xz + xy + y^2 + yz + xz + yz + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = 0$$

$$xy = z(z-2)$$

$$yz = x(x-2)$$

$$zx = y(y-2)$$

$$\begin{aligned} &= x^2 y^2 z^2 (x-2)(y-2)(z-2) \\ &= (x-2)(y-2)(z-2) = xyz \end{aligned}$$

$$(xy - 2x - 2y + 4)(z-2)$$

$$xyz - 2xz - 2yz + 4z - 2xy + 4x + 4y - 8 = xyz$$

$$2(xz + yz + xy) = 4(x + y + z - 2)$$

$$xz + yz + xy = 2x + 2y + 2z - 4$$

$$y^2 - 2y + x^2 - 2x + z^2 - 2z = 2x + 2y + 2z - 4$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = 8$$

$$\frac{5!}{2 \cdot 3!} + \frac{5!}{2 \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 5!}{8!} = \frac{2}{8!} = \frac{1}{168}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5!}{2 \cdot 3!} + \frac{5!}{2 \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 5!}{8!} = \frac{2}{8!} = \frac{1}{168} \\ &= \frac{5!}{2 \cdot 3!} + \frac{5!}{2 \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 5!}{8!} = \frac{2}{8!} = \frac{1}{168} \end{aligned}$$