



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  – точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 10$ ,  $BE = 9$ .
4. [4 балла] В телегame ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроκу разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$  являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$  являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle CBA = 46^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Из системы мы можем сделать вывод, что  $x = y = 2$ , и действительно, тогда мы получаем, что  $x^2 = -6x + y^2 \Leftrightarrow 6x = 0$ . Тогда  $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (2-6)^2 = 3(x-6)^2 = 3x^2 - 36x + 108 = 3x^2 + 108$ , а раз  $x \neq 0$ , то это выражение больше 108.

Итак, выражение принимает значения, большие, чем 108.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим  $9^3$ ,  $99^3$  и  $999^3$ ,  $9999^3$

$$9^3 = 729$$

$$99^3 = 970299$$

$$999^3 = 997002999$$

$$9999^3 = 9997\ 0002\ 9999.$$

Всё явно закономерно:

$\underbrace{9 \dots 9}_{n}^3 = \underbrace{9 \dots 9}_{n-1} \underbrace{7 \dots 7}_{n} \underbrace{0 \dots 0}_{n} \underbrace{9 \dots 9}_{n}$ , значит всего

$$\text{девяток } n - 1 + n = 2n - 1.$$

Значит, в числе  $\underbrace{9 \dots 9}_{20001}^3$  будет  $20001 \cdot 2 - 1 =$

$= 40001$  девятка.

Ответ: в десятичной записи будет  
 $40001$  девятка.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть было  $n$  коробок. Тогда способов выиграть наугад 5 коробок будет  $C_n^5$ . Всегдашия тройка коробок одна, значит, количество всевозможных вариантов будет считать если уберём из  $n$  коробок 3 всегдашия и выбирать по 2. Значит, способов выиграть  $C_{n-3}^2$ , а значит вероятность выигрыша:

$$C_{n-3}^2 : C_n^5 = \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} : \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{5!(n-3)!}{2!(n-5)!} = 60 \cdot \frac{(n-3)!}{n!}.$$

Аналогично способов выиграть 9 коробок это  $C_n^9$ , а способов выиграть с шариками, то есть получить 3 коробки, это  $C_{n-3}^6$ , значит, вероятность выигрыша при новых условиях:

$$C_{n-3}^6 : C_n^9 = \frac{(n-3)!}{6!(n-9)!} : \frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{9!(n-3)!}{6!(n-9)!} = 504 \cdot \frac{(n-3)!}{n!}.$$

Значит вероятность выигрыша увеличилась в:

$$\left(504 \cdot \frac{(n-3)!}{n!}\right) : \left(60 \cdot \frac{(n-3)!}{n!}\right) = \frac{504}{60} = 8,4 \text{ раз.}$$

Ответ: вероятность увеличилась в 8,4 раз



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим корни из уравнений:

$$1) x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$D_1 = 4(4a - a^2)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = a^2 \cdot (4 - a)^2 - 4a^2 + 24a - 16$$

$$2) 5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 19 = 0$$

$$D_2 = (4a^2 - a^3)^2 - 20 \cdot (-2a^3 - 6a - 19) = a^4 \cdot (4 - a)^2 + 40a^3 + 120a + 300$$

Не учитывая общности, пусть  $\delta$  - разность  
прогрессии и  $\delta > 0$  ( $\text{если } \delta < 0, \text{ то } a_5 \text{ станет } a_6$ ,  
и наоборот)

$a_6$  станет  $a_7$ , а значит не ничего не изменится).

Из 1 уравнения получили:

$$a_6 = \frac{4a - a^2 - \sqrt{D_1}}{2}; a_7 = \frac{4a - a^2 + \sqrt{D_1}}{2}, \text{ значит,}$$

$$\delta = a_7 - a_6 = \frac{4a - a^2 + \sqrt{D_1} - 4a + a^2 + \sqrt{D_1}}{2} = \sqrt{D_1}$$

Из 2 уравнения получили:

$$a_5 = \frac{4a^2 - a^3 - \sqrt{D_2}}{10}; a_8 = \frac{4a^2 - a^3 + \sqrt{D_2}}{10}, \text{ значит,}$$

$$a_8 - a_5 = 3\delta = \frac{4a^2 - a^3 + \sqrt{D_2} - 4a^2 + a^3 + \sqrt{D_2}}{10} = \frac{\sqrt{D_2}}{5}, \text{ значит,}$$

$$\sqrt{D_2} = 3\delta \cdot 5 = 15\delta.$$

$$\text{Пусть } a_{6,5} = a_7 + 5,5\delta$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Понятно  $a_6 = a_{6,5} - 0,5d = \frac{4a - a^2}{2} - \frac{\sqrt{D_1}}{2}$ , а т.к.  $\sqrt{D_1} = d$ , то

$$a_{6,5} = \frac{4a - a^2}{2}$$

Аналогично  $a_5 = a_{6,5} - 1,5d = \frac{4a^2 - a^3}{10} - \frac{\sqrt{D_2}}{10}$ , а  $\sqrt{D_2} = 75d$ , то

$$a_{6,5} = \frac{4a^2 - a^3}{10}, \text{ следовательно.}$$

$$\frac{4a - a^2}{2} = \frac{4a^2 - a^3}{10}; \quad \frac{a(4-a)}{2} = \frac{a^2(4-a)}{10} \quad | \cdot \frac{10}{4-a} \quad \left\{ \begin{array}{l} a \neq 4 \\ a \neq 0 \end{array} \right.$$

$$5a = a^2; \quad a(a-5) = 0, \text{ значит } a_1 = 0 \text{ или } a_2 = 5.$$

Проверим  $a_1 = 0$  в  $D_1$  и  $D_2$ :

$$D_1 = 0 \cdot 4^2 - 0 + 0 - 16 = -16, \text{ тогда } d = \sqrt{-16}, \text{ а значит это не существует т.к. } -16 \text{- отрицат.}$$

Проверим  $a_2 = 5$  в  $D_1$  и  $D_2$ :

$$D_1 = 5^2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 - 16 = 29, \text{ значит } d = \sqrt{29}$$

$$D_2 = 5^4 \cdot (-1)^2 + 40 \cdot 5^3 + 120 \cdot 5 + 300 = 6525, \text{ значит}$$

$15d = \sqrt{6525} = 15\sqrt{29}$ , а значит  $d = \sqrt{29}$  - подходит в обеих случаях.

Ответ:  $a = 5$

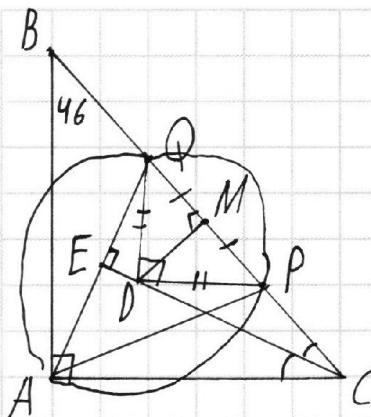
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AB = BP$ ,  
 $AC = CQ$ ,  $D \in PQ$ ,  $\angle PDQ = 90^\circ$ ,  $\angle CBA = 46^\circ$ .

Найти:  $\angle DCB$

Решение: найдём как лежат  $P$  и  $Q$ .

Если  $P$  ближе к  $B$ , а  $Q$  ближе

к  $C$ , то  $BP + PQ + CQ = BC \Rightarrow AB + AC = BC - PQ < BC$ ,

а такого не может быть по свойству треугольника.

Значит,  $Q$  ближе к  $B$ , а  $P$  ближе к  $C$ . Тогда

$D \in PQ$  по условию  $\Rightarrow D$  лежит на середине дуги  $PQ$  как радиоудалён от точек  $P$  и  $Q$ .

$PQ \vee$  Возьмём току  $M$  на  $PQ$ , так что  $PM = QM$ , тогда

$DM \perp PQ$  как середин.  $\&$  Так  $AB = BP$  и  $AC = CQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABP \sim \triangle ACQ$  - равнобедр. по двум сторонам,

значит,  $\angle BAP = \frac{1}{2}(180 - 46) = 67^\circ$ , а  $\angle CAQ =$

$= \frac{1}{2}(180 - 190 + 46) = 68^\circ$  по сумме углов треугольника.

$\Rightarrow \angle PAQ = \angle BAP + \angle CAQ = (\angle BAP + \angle PAQ) +$

$+ (\angle PAQ + \angle CAP) = \angle BAC + \angle PAQ = 67^\circ + 68^\circ = 135^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PAQ = 135^\circ - \angle BAC = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$ . Рассмотрим

треугольник  $\triangle PAQ$ : опишем окружность

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Окружность с центром в точке  $D$ .

$\angle P A Q$  - вписанный и опирается на дугу  $PQ$ ,  
значит, дуга  $PQ$  равна  $45 \cdot 2 = 90^\circ$ . Точка

$D$  лежит на середине  $DM$ ,  $\angle P D Q = 90^\circ$ .  
~~Луч  $PD$  является радиусом~~  $\angle P D Q = 90^\circ$   
~~окружности~~  $\angle P D Q = 90^\circ \Rightarrow O = D \Rightarrow D$  - центр описанной

окружности  $\triangle P A Q$ . Проведем  $CE$ , ~~внешнюю~~  
внешнюю  $CE$  к  $\triangle CAQ$ . И.к.  $\triangle CAQ$  равнобед., то  
 $CE$  серпантин  $\triangle CAQ$ . Но точка  $D$  тоже лежит  
на середине  $CE$  как центр описанной окруж-  
ности  $\Rightarrow D \in CE$ , а так как  $CE$  есть и  
биссектриса, то  $\angle DCB = \frac{1}{2} \cdot \angle C = \frac{1}{2} \cdot (90 - 45) =$   
 $= 22^\circ$  ( $\angle C = 44^\circ$  по условию улов в прямоугл.  
 $\triangle ABC$ ).

Ответ:  $\angle DCB = 22^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
ИЗ

1.  $\binom{n}{k}$

2.  $\binom{n}{n-3}$

3.  $\frac{(n-3)! \cdot n!}{2!(n-5)! \cdot 5!(n-5)!} = \frac{5! \cdot (n-3)!}{2! \cdot 4!} = 60$

4.  $\frac{(n-3)! \cdot 9! \cdot (n-9)!}{3! 6! (n-9)! \cdot n!} = 504$

5.  $\frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 3}{5} = 8,4$

6.  $\frac{60 \cdot \frac{(n-3)!}{n!}}{6! \cdot \frac{(n-3)!}{n!}} = 504$

7.  $\frac{-2a^3 + 8a^2 - 8a - 15}{2a^3 + 8a^2} \quad | \frac{a-4}{2a^2 + 8a + 26 + \frac{8a-104}{a-4}}$

$a=4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

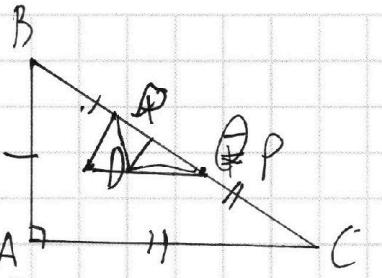
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 16 = 0$$

$$D = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 16) \leq 0$$

$$= \sqrt{a^4 - 2a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16} = \cancel{a^2}$$

$$= a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16$$

$$= 16 + 64 + 48 + 48 - 16$$

$$= 296 + 512 + 192 + 96 - 16$$

$$= 4096 - 4096 + 2a^3 - 6a - 16$$

$$= 9 + 4 + 9 = 14 + 4 + 6 + 12$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 16 = 0$$

$$\alpha - 67 - \beta + \gamma = 90^\circ$$

$$a^2 \cdot (a-4)^2 - 4(a-4)(a-1) - a$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$= \frac{a^4 - (a-4)^2 - 20(2a^3 - 6a - 16)}{2} = 750$$

$$= 625 \cdot 9 - 20 \cdot (250 - 30 - 16)$$

$$= 625 - 20 \cdot 205 = 4100 - 4100 = 0$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$D_1 = a^2 \cdot (a-4)^2 - 4a^2 + 24a - 16 = j^2$$

$$= 625 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$D_2 = a^2 \cdot (a-4)^2 + 40a^2 + 120a + 300 = 225j^2$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

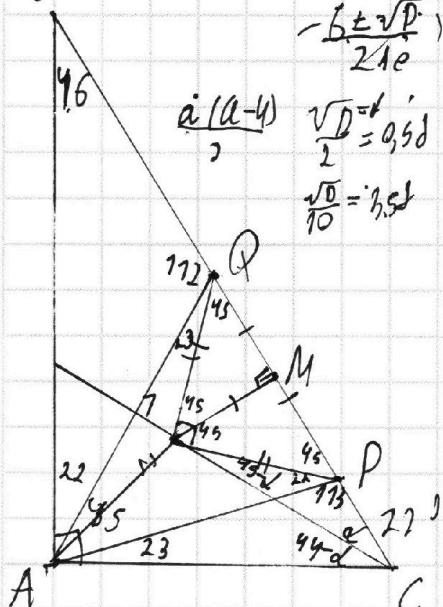
$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$



$$\frac{a(a-4)}{2} = \frac{a^2(a-4)}{20}$$

$$a = \frac{a^2}{20}$$

$$a^2 - 5a = 0$$

$$a(a-5) = 0$$

$$a = 0; 5$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$

$$= 2500 + 5000 + 6000 + 300 = 1525$$