



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 10$ ,  $BE = 9$ .
4. [4 балла] В телесигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$  являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$  являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle CBA = 46^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \quad | \cdot z & -6z^2 + z^3 = -6z^2 + z^3 = -6y^2 + y^3 \\ yz = -6x + x^2 \quad | \cdot x & -6x^2 + z^3 = -6x^2 + x^3 \\ zx = -6y + y^2 \quad | \cdot y & 6(x-z)(x+z) = (x-z)(x^2 + y^2 + z^2) \end{cases}$$

$x, y, z \neq 0$

$$(x-z)(x^2 + xz + z^2 - 6x - 6y) = 0$$

$$(x-z)(yz + xy + xz) = 0$$

$$\begin{cases} x = z \\ xy + yz + zx = 0 \end{cases}$$

~~1) Если  $x = z$ , то ан-но  $y = z$ , то ан-но  $y = z$ , то ан-но  $y = z$~~

~~2) Если  $x = z$ , то ан-но  $y = z$ , то ан-но  $y = z$~~

$$zy = -6z + z^2$$

$$y = -6 + z$$

$$(z-6)z = -6z + z^2$$

$$(z-6)^2 - 6(z-6) = z^2$$

$$-12z + 36 - 6z + 36 = 0$$

$$-18z = -72$$

$$\begin{cases} z = 4 \\ y = -2 \\ x = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$$

3) Если  $x = y$ , то ан-но:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

3) Если  $y = z$ , то ан-но:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

Во всех трех случаях получаем, что  $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 =$

$$= 64 + 4 + 4 = 72$$

Если  $xy + yz + zx = 0$ , то:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$yz + xy + xz = 0$$

$$z^2 + x^2 + y^2 = 6(x + y + z)$$

$$(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz) = 6(x + y + z)$$

$$= 0$$

$$(x + z)(x + y + z)(x + y + z - 6) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{array} \right.$$

$$x + y + z = 6$$

Если  $x + y + z = 0$ , то:

$$xy + xz + yz = \underbrace{-6(x + y + z)}_{=0} + \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{=0}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad x, y, z \neq 0 \Rightarrow x, y, z \in \emptyset \text{ или } x + y + z = 0 \Rightarrow x + y + z \neq 0$$

Если  $x + y + z = 6$ , то:

$$x + y + z + yz = -6(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$36 = x^2 + y^2 + z^2$$

Если найдем такие  $(x, y, z)$ , для которых все эти условия выполняются, то:

$$\begin{aligned} \text{Тогда } (x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 12(x + y + z) + 3 \cdot 36 = \\ &= 36 - 12 \cdot 6 + 3 \cdot 36 = 72 \Rightarrow \text{найдем такие } 72 \end{aligned}$$

Ответ: 72



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☒

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{100 \dots 0}_{20001} - 1$$

$$n^2 = (\underbrace{100 \dots 0}_{20001} - 1)^2 = \underbrace{100 \dots 0}_{60003} - 3 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{40002} + 3 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{20001} - 1^2$$

$$= \underbrace{99 \dots 9}_{20000} \underbrace{700 \dots 0}_{40002} + 2 \underbrace{99 \dots 9}_{20001} = \underbrace{99 \dots 9}_{20000} \underbrace{700 \dots 0}_{20000} \underbrace{299 \dots 9}_{20001} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  всего  $40001$  девяток <sup>OK</sup>

Ответок: 40001







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

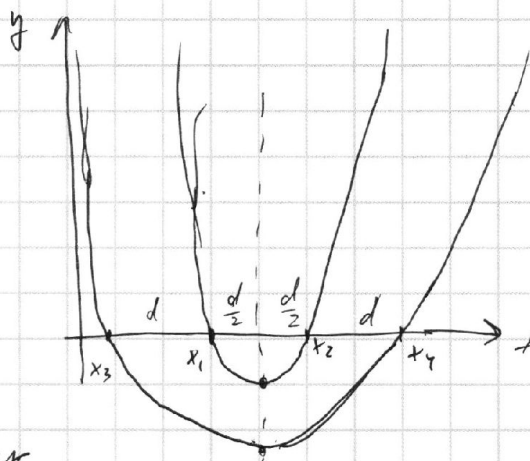
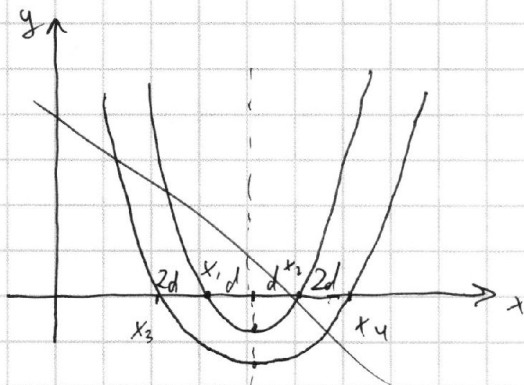
|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$   $x_1, x_2$  - корни  $(a_1)$  - арифмет. прогр.

$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$   $x_3 = a_2, x_4 = a_3, x_3, x_4$  - корни



$d$  - разн. прогрессии; по графику видно, что у этих парабол одна ось симметрии.  $\Rightarrow$  абсциссы вершин парабол  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(a^2 - 4a)}{2} = \frac{a(a^2 - 4a)}{10} \cdot 10$$

$$a(a - 4)(a - 5) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \\ a = 5 \end{cases}$$

1) Если  $a = 0$ :  $x^2 + 4 = 0$  - корней нет  $\Rightarrow a = 0$  - не подк.

2) Если  $a = 4$ :  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = \frac{167}{5} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{167}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 4 - \text{разн.} \\ d = -2 + \frac{\sqrt{167}}{\sqrt{5}} - \text{арифм.} \end{cases} \Rightarrow d \in \emptyset \Rightarrow a = 4 - \text{не подк.}$$

3) Если  $a = 5$ :  $x^2 - 5x - 1 = 0$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}, x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_3 = \frac{5 - \sqrt{25 + 4 \cdot 59}}{2}, x_4 = \frac{5 + \sqrt{25 + 4 \cdot 59}}{2}$$

$$x_3 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}, x_4 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

$$5x^2 - 25x - 295 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$\Rightarrow d = x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = \sqrt{29} \Rightarrow$$

$a = 5$  - подходит

Ответ: 5



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                                     |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 =$$

$$= xy + 6z + yz + 6x + zx + 6y - 12x - 12y - 12z + 3 \cdot 36 =$$

$$= xy + yz + zx - 6z - 6x - 6y + 3 \cdot 36$$

$$- 6z^2 + z^3 = -6x^2 + x^3 = -6y^2 + y^3$$

$$z^2(z-6) = x^2(x-6) = y^2(y-6)$$

$$z^4(z-6)^2 = x^4(x-6)^2 = y^4(y-6)^2$$

$$(x-6)^2 + \frac{x^4}{z^4}(x-6)^2 + \frac{x^4}{y^4}(y-6)^2 = (x-6)^2 \left( 1 + \frac{x^4}{z^4} + \frac{x^4}{y^4} \right) =$$

$$= (x-6)^2 \frac{y^4 z^4 + x^4 y^4 + x^4 z^4}{z^4 y^4}$$

$$\begin{array}{r} 19999 \dots 9 \\ 9999 \dots 9 \\ \hline 991 \end{array} \quad (100 \dots 0 - 1)^2 = \underbrace{100 \dots 0}_{40002} - 2 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{20001} + 1 =$$

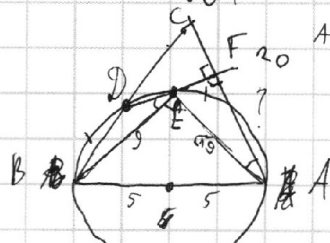
$$= \underbrace{100 \dots 0}_{20001} \cdot (\underbrace{100 \dots 0}_{20001} - 2) + 1 = 100 \dots 0$$

$$(a-b)^3 = a^3 + b^3 + (a-b)(a-b)(a-b) = a^3 - a^2b + ab^2 + (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) =$$

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\underbrace{100 \dots 0}_{60003} - 3 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{40002} + 3 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{20001} - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{20000} \underbrace{700 \dots 0}_{1} + \underbrace{40002}$$

$$\begin{array}{r} 299 \dots 9 \\ 20001 \end{array} = \underbrace{99 \dots 9}_{20000} \underbrace{700 \dots 0}_{20000} \underbrace{2}_{20001} \underbrace{99 \dots 9}_{20001} = 740001$$



$AC = 20, AB = 10$

$$\frac{(n-3)}{n}$$

$$P_1 = \frac{C_3^n}{C_5^n} = \frac{\frac{3!}{(n-3)!} \cdot \frac{2!}{(n-1)!} \cdot \frac{1!}{(n-2)!}}{\frac{5!}{2!3!n!}} = \frac{10 \cdot 5!}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$P_2 = \frac{C_3^n}{C_5^n} = \frac{3! \cdot 2! \cdot 1!}{6! \cdot 3! \cdot n!}$$

$$\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdot C_3^3$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{9! \cdot 9! \cdot (n-5)! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!}{6! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot (n-5)! \cdot 5!}$$

$$\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdot C_3^3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-4)}{n-1} \cdot \frac{(n-5)}{n-2} \cdot \frac{3}{n-3} \cdot \frac{2}{(n-4)} = 20 -$$

$$P_1 = \frac{3}{n} \cdot \frac{(n-3)}{n-1} \cdot \frac{(n-4)}{n-2} \cdot \frac{(n-5)}{(n-3)(n-4)(n-5)}$$

$$\begin{array}{c} \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \dots \quad \square \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \\ \frac{3}{n} \mid \frac{3}{n-1} \mid \frac{2}{n-2} \mid \frac{2}{n-3} \mid \frac{1}{n-4} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \frac{3}{n} \\ + \\ \frac{3}{n-1} \\ + \\ \frac{2}{n-2} \\ + \\ \frac{2}{n-3} \\ + \\ \frac{1}{n-4} \end{array}$$

$$x = \frac{a^2 - 4a \pm \sqrt{(a^2 - 4a)^2 - 4a^2 + 24a - 16}}{2}$$

$$x = \frac{a(a^2 - 4a)}{10} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 4a}{10}}$$

$$\frac{a^2 - 4a}{2} = \frac{a(a^2 - 4a)}{10} \quad | :10$$

$$a(a-4)(a-5) = 0$$

$$a = 0$$

$$a = 4$$

$$a = 5$$

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8$$

$$y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \quad y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$y \geq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$y \geq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$0 \leq y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^2 - 6a - 15 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - 4a \\ x_1 x_2 = a^2 - 6a + 4 \\ x_1 = a_1 + 5d \\ x_2 = a_1 + 6d \\ x_3 = a_1 + 4d \\ x_4 = a_1 + 7d \\ x_3 + x_4 = \frac{a(a^2 - 4a)}{5} \\ x_3 x_4 = -2a^3 - 6a - 15 \end{cases}$$

$$x_1 x_2 = a^2 - 6a + 4$$

$$x_1 = a_1 + 5d$$

$$x_2 = a_1 + 6d$$

$$x_3 = a_1 + 4d$$

$$x_4 = a_1 + 7d$$

$$x_3 + x_4 = \frac{a(a^2 - 4a)}{5}$$

$$x_3 x_4 = -2a^3 - 6a - 15$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$5x^2 - 15 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$5x^2 - 2a \cdot 6d - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 = \frac{167}{5}$$

$$x^2 - 5x - 7 = 0$$

$$5x^2 - 25x - 295 = 0$$

$$x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{35 + 4 \cdot 59}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{259}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

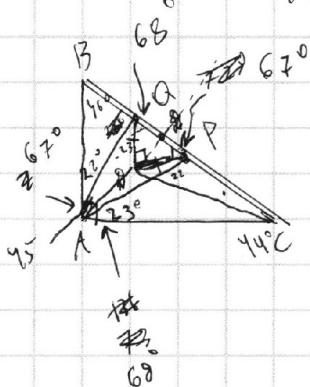
$$x + y + z = 6$$

$$2 + \sqrt{3}, 2, 2 - \sqrt{3}$$

$$4 + 2\sqrt{3} + 3 + 4 + 4 - 2\sqrt{3} + 3 = 10$$

$$4 + \sqrt{3}, -2, 4 - \sqrt{3}$$

$$16 + 16$$



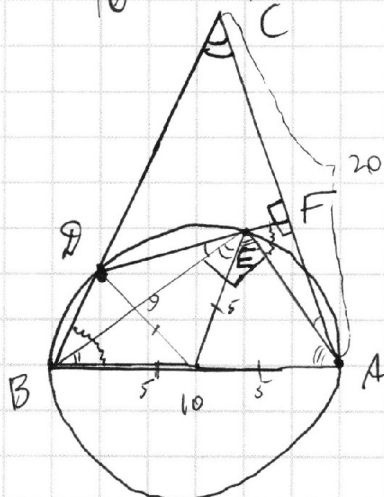
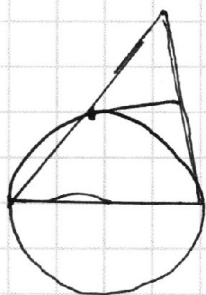
$$\frac{270}{2} = 135^\circ$$

$$P_1 = \frac{C_5^3}{C_n^3}$$

$$P_2 = \frac{C_3^3}{C_n^3}$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{7}{10}$$



24

$P_1$  - за 5 к. востановить  
3 шарика из 11

$2P_1$  - за 10 к. востановить 3 шарика

$P_2 = (1 - P_1) \cdot P_2$  - не востановить за 5 к.

$(1 - P_1) \cdot P_2$  -  
за 10 к.

$$P_1 = \frac{C_5^3 \cdot C_n^5}{C_n^3 \cdot C_n^5}$$

$$P_2 = \frac{C_3^3 \cdot C_n^8}{C_n^3 \cdot C_n^8}$$

$$P_1 = \frac{5}{n} \cdot \frac{4}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2} = 6$$

$$P_2 = \frac{9}{n} \cdot \frac{8}{n-1} \cdot \frac{7}{n-2} = 6$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{42}{5} = 8,4$$

$$\frac{7 \cdot 12}{10} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 2xy &= -12z + 2z^2 & -6\frac{z}{x} + \frac{z^2}{x} &= -6\frac{x}{z} + \frac{x^2}{z} \quad | \cdot xz \\
 2yz &= -12x + 2x^2 & -6z^2 + z^3 &= -6x^2 + x^3 \\
 2zx &= -12y + 2y^2 & 6(x-2)(x+2) &= (x-2)(x^2+xz+z^2) \\
 x^2 - 12x + y^2 - 12y + z^2 - 12z &= & (x-2)(x^2+xz+z^2 - 6x - 6z) &= 0 \\
 (x-z)(yz + xy + xz) &= 0 & & \\
 \begin{cases} x=y=z \\ yz + xy + xz = 0 \end{cases} & & yz + xy + xz &= 0 \\
 x^2 = -6x + x^2 & & z^2 + x^2 + y^2 &= 6(x+y+z) \\
 x=0 \Rightarrow \emptyset & & (x+y+z)^2 - 2(yz + xy + xz) &= 6(x+y+z) \\
 z^2 + x^2 + y^2 = 0 & & (x+y+z)(x+y+z-6) &= 0 \\
 0 = -6(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 & & x+y+z = 0 & \\
 36 = x^2 + y^2 + z^2 & & x+y+z = 6 & \\
 -6z + 2z^2 = -6x + x^2 & & xy = -6z + z^2 & \\
 y^2 - 6y = z^2 & & (6-z-y)/y = -6z + z^2 & \\
 yz = -6z + z^2 & & 6y - zy - y^2 = -6z + z^2 & \\
 y = z - 6 & & 6y - 6(6-z-y) - (6-z-y)^2 = -6z + z^2 & \\
 (z-6)^2 - 6(z-6) = z^2 & & 6y - 36 + 6z + 6y - 36 & \\
 z^2 - 12z + 36 - 6z + 36 = z^2 & & y = 0 & \\
 -18z = -72 & & 0 = -6x + x^2 & \\
 z = 4 & & x = 6 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases} & \\
 y = 5 - z & & x = 36 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases} & \\
 y^2 + 6^2 - 10z + z^2 + z^2 = 35 & & x=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases} & \\
 2z^2 - 10z - 10 = 0 & & z = 6 \quad \begin{cases} z=0 \\ z=6 \end{cases} & \\
 z = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{2} & & y = -6z + z^2 & \\
 y = \frac{15 \pm \sqrt{105}}{4} & & z = -6y + y^2 & \\
 & & y + z = 5 & \\
 & & y^2 + z^2 = 35 & \\
 & & y^2 + z^2 = 7y + 7z & \\
 & & z^2 + y^2 = 6z + y + 6y + z &
 \end{aligned}$$