



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В теленгра ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}| + |x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим случаи:

1) Если $x = y = z$, то $xy = -xz + z^2 \Rightarrow$ перенесем слагаемое $-xz$ в выражение $yz = -xz + z^2 \Rightarrow 0 = -xz \Rightarrow x = 0$, что противоречит условию, т.к. y и z отличны от нуля.

Значит такой случай невозможен.

2) Если $x = y$, то $y \neq z$, $x \neq z$ (иначе из первого равенства получалось бы $x = z$). Решим систему однородных уравнений $x = y$, так как все три уравнения симметричны относительно $x = y = z$. Получим из первого уравнения $x^2 = -xz + z^2$; из второго — $xz = -xz + z^2$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = -xz + z^2 \\ xz = -xz + z^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = -xz + z^2 \\ z = -x + z \quad (x \neq 0 \text{ по условию}) \end{cases}$$

$$x^2 = -x(x-z) + (x-z)^2.$$

$$x^2 = -x^2 + xz + x^2 - 2xz + z^2 \Rightarrow -2xz + z^2 = 0.$$

$$6xz = 8 \Rightarrow xz = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}. \quad \text{Получаем } z = x - z = \frac{4}{3} - x = -\frac{2}{3}x; \quad y = x = \frac{4}{3}x.$$

$$\begin{aligned} \text{Получаем } & (x - z)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = (\frac{4}{3}x - z)^2 + \\ & + (\frac{4}{3}x - z)^2 + (-\frac{2}{3}x - z)^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{64}{9}x^2 = \frac{72}{9}x^2 = 8. \end{aligned}$$

3) Если $x \neq y$, $y \neq z$, $z \neq x$:

Рассмотрим $-xz + z^2$, $-yz + z^2$, $-zy + y^2$ как $(x-y)^2 - 1$, $(x-y)^2 - 1$, $(y-z)^2 - 1$. Получаем:

$$\begin{cases} xy + y = (x-y)^2 \\ yz + y = (x-y)^2 \\ xz + y = (y-z)^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{тогда } \\ \text{второе вычитаем из первого} \\ \text{второе } \Rightarrow \text{получаем:} \end{matrix}$$

1

1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy - yz = (x-y)^2 - (x-z)^2 = (x-y)(x+y-z) \quad ;$$

$$y(x-z) = (x-z)(x-y-z) \quad ; \text{ т.к. } x \neq z, \text{ то}$$

$$x-y \neq 0 \Rightarrow y = z-x-y \quad ; \quad x+y+z = 2z.$$

Преобразование выражение из условия:

$$(x-z)^2 + (y-z)^2 + (x-y)^2 = x^2 + y^2 + z^2 -$$

$$-4xy - 4yz - 4zx + y + y + y = x^2 + y^2 + z^2 - 4x$$

$$\times (x+y+z) + 12 = x^2 + y^2 + z^2 - 8 + 12 = x^2 +$$

$$+ y^2 + z^2 + y,$$

Но мы знаем, что $z(xy + yz + zx) = -4xz - 4y - 4z + z^2 + x^2 + y^2 + z^2$ (удвоенная сумма исходного выражения).

$$\text{Потому } z(xy + yz + zx) = -4(x+y+z) + \\ + z(x^2 + y^2 + z^2) = -8 + z(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$\text{Поскольку } y = z^2 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + \\ + z^2 + 2xyz + 2yzx + 2zxy = x^2 + y^2 + z^2 + \\ + z(x^2 + y^2 + z^2) - 8 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 8;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4+8}{3} = 4.$$

Потому исходное выражение будет равно $(x^2 + y^2 + z^2) + y = 4 + 4 = 8$.

Из последних двух случаев получаем, что удвоенное выражение исходное равно также только 8. Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N₂

$$\text{Если число } n = \underbrace{99\dots99}_{30004}, \text{ то } n+1 = \underbrace{100\dots00}_{30004} =$$

$$\text{Полука } (n+1)^3 = 100\dots00 = 10^{30004}$$

$$\text{Полука } (n+1)^3 = (10^{30004})^3 = 10^{90003} = \underbrace{100\dots00}_{90003}$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + 3(n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 1$$

$$-3n^2 - 3n - 1 = n^3 + 3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1;$$

$$n^3 = \underbrace{100\dots00}_{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30004} - 1.$$

$$(3(n+1)^2 = 3 \cdot (10^{30004})^2 = 3 \cdot 10^{60002}).$$

$$\text{Если из } \underbrace{100\dots00}_{90003} \text{ вычесть } 3 \cdot 10^{60002}, \text{ то получим}$$

$$\text{получим } 10^{60002} (10^{30004} - 3) = \underbrace{99\dots994}_{30004} \cdot 10^{60002} =$$

$$= \underbrace{99\dots994}_{30004} \underbrace{00\dots00}_{60002}.$$

После умножения $3 \cdot 10^{30004}$ на 10^{60002} получим $99\dots994,00\dots00300\dots00$,
(число $3 \cdot 10^{30004}$ умножает 10^{60002} , поэтому остаток $30004+1=30005$ нулей)

После вычитания единицы получим:

$$\underbrace{99\dots994}_{30004} \underbrace{00\dots00}_{30000} \underbrace{299\dots99}_{30002}, \text{ где будет}$$

$$(30004-1) + (30002-1) = 60004 \text{ цифры } "9".$$

Ответ: 60004.

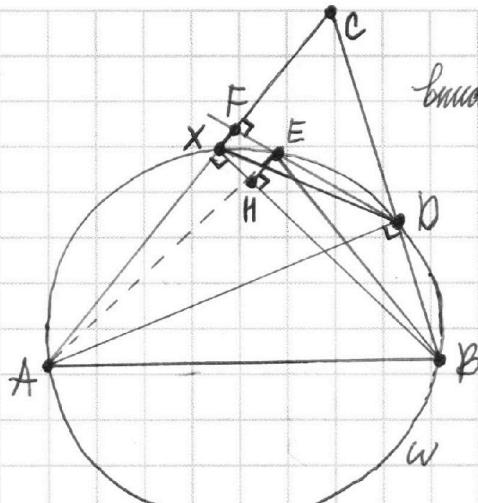


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



1) Построим $AB \perp BX$ и $AE \perp AD$. **П.к.**

Вписанные $\angle AXB$, $\angle AEB$ и $\angle ADB$ осязаемые суть в ω на диаметр AB , то $\angle AXB = \angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$.

2) Покажем $BX \perp AC$ и $AD \perp BC$.

~~П.к.~~ Из $BX \perp AC$ и $AD \perp BC$ получаем, что $DF \parallel BX$.

3) Отсюда из E на BX опущена EH . В $XFEH$

$\angle FXB = \angle XFP = \angle XHE = 90^\circ \Rightarrow XFEH$ - квадрат - икк. Покажем $XF = EH$.

$\angle FDX = \angle XAE = \angle XBE$, как вписанные.

4) Рассмотрим $\triangle XFP$ и $\triangle EHB$. В ней $XF = HE$, $\angle XPF = \angle EBH$, $\angle XFP = \angle EHB = 90^\circ \Rightarrow \triangle XFP \sim \triangle EHB$ по косинусу к осязаемому углу. Покажем $BE = PX = 6$ и $FB = BH$.

5) **П.к.** AXB - вписанный, т.к. $\angle XAB = 180^\circ - \angle XDB = \angle CPX$ и $\angle ABD = 180^\circ - \angle AXP = \angle CXD$.

Покажем $\triangle CXD \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{PX}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow$
 $CP = \frac{PX \cdot AC}{AB} = \frac{6 \cdot 10}{8} = 7,5$.

6) Из $\triangle ADC$ с $\angle ADC = 90^\circ$, где ~~П.к.~~ DF - высота к гипотензусу, получаем, что $DF = \frac{AP \cdot CD}{AC}$.
 $AP^2 = AC^2 - CD^2 = 100 - \left(\frac{3}{4} \cdot 10\right)^2 = 100 \cdot \left(1 - \frac{9}{16}\right) =$

$$= \frac{100}{16} \cdot 7 ; AP = \sqrt{\frac{100-7}{16}} = \frac{10}{4} \sqrt{7} = 2,5 \sqrt{7}.$$

$$\text{Покажем } DF = \frac{2,5 \sqrt{7} \cdot 7,5}{10} = \frac{5 \cdot 15 \cdot \sqrt{7}}{40} = \frac{15 \sqrt{7}}{8}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

7) Задано, что из $\triangle ABE$ $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} =$
 $= \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.
 $(\because \angle AEB = 90^\circ)$

8) Задано, что в $\triangle AFE$ и $\triangle PDF$ $\angle AFE = 90^\circ$ — общая, $\angle FAE = \angle FPD$ (как вписанные).
Тогда $\triangle AFE \sim \triangle PDF \Rightarrow \frac{PF}{AE} = \frac{FP}{AF} ; AF = \frac{AE \cdot PD}{PF} .$
 $AF = \frac{2\sqrt{7} \cdot 15\sqrt{7}}{8 \cdot 8} = \frac{15 \cdot 7}{8 \cdot 8} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8} = 4,375.$

Ответ: 4,375.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим всего будем n городов.

1) Рассмотрим первую случай:

Всего исходов будем C_n^5 —
как во способов ~~занять и поменять~~ откроются
места городок.

Полезных исходов будем явно C_{n-3}^2 ,
то есть, когда три города ~~заняты~~ удаляются, оставшиеся две — любые
из оставшихся n-3 города.

Потом вероятность в первом случае
будем явно $P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)(n-4)}{n!} =$

$$\frac{5!(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}.$$

2) Рассмотрим второй случай:
По аналогии с первым всего будем
 C_n^7 исходов, а полезных — C_{n-3}^4 .

Потом вероятность во втором случае
будем явно $P_2 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} = \frac{4!(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)} =$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{n(n-1)(n-2)} = \frac{210}{n(n-1)(n-2)}.$$

Потом $\frac{P_2}{P_1} = \frac{210 \cdot (n-1)(n-2)}{60 \cdot (n-4)(n-5)} = \frac{210}{60} = 3,5.$

Значит вероятность увеличилась в 3,5 разах.

Ответ: в 3,5 разах.

I

I



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Предположим, что корни есть вещественные и первое уравнение имеет вид

$$(x^2 - 2x) \pm \sqrt{(x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - x - 7)}, \quad x \text{ второе}$$

$$20 - \frac{(x^3 - 2x^2) \pm \sqrt{(x^3 - 2x^2)^2 - 4 \cdot 3(6 - x^5)}}{6}.$$

Значит, что получаем 6-ое и 7-ое члены алгебраической прогрессии равны полусумме 9-ого

и 7-ого членов этой прогрессии.

$$\text{Полагаю: } (x^2 - 2x) + \sqrt{(x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - x - 7)} =$$

$$- \frac{(x^3 - 2x^2) - \sqrt{(x^3 - 2x^2)^2 - 4 \cdot 3(6 - x^5)}}{6} =$$

$$= \frac{(x^2 - 2x) - \sqrt{(x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - x - 7)}}{2} + \frac{(x^3 - 2x^2) +}{6}$$

$$+ \frac{\sqrt{(x^3 - 2x^2)^2 - 4 \cdot 3(6 - x^5)}}{6} ; \frac{x(x-2)}{2} - \frac{x^2(x-2)}{6} =$$

$$= - \frac{x^2 - 2x}{2} + \frac{x^3 - 2x^2}{6} ; 3x(x-2) - x^2(x-2) =$$

$$= - 3x(x-2) + x^2(x-2).$$

Если $x = 2$, то выражение верное.

Если $x \neq 2$, то получаем тождество:

$$6x = 2x^2 ; x = 0 \text{ или } x = 3.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получаем рассматриваем случайно возможный из пределов возможных случаев.

$$1) \alpha = 0 :$$

Получаем 4-ий член прогрессии, выражение $\frac{0 - \sqrt{0 - 4 \cdot (-7)}}{2} = \frac{-\sqrt{28}}{2} = -\sqrt{7}$; девятый — $\frac{0 + \sqrt{28}}{2} = \sqrt{7}$; шестой —

$$\frac{0 - \sqrt{0 - 4 \cdot 6}}{6} — \text{не имеет смысла.}$$

Значит такой случай невозможен.

$$2) \alpha = 2 :$$

4-ый член прогрессии равен:

$$\frac{0 - \sqrt{0 - 4(4 - 2 - 7)}}{2} = -\frac{\sqrt{20}}{2} = -\sqrt{5};$$

девятый — $\frac{0 + \sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$; шестой —

$$\frac{0 - \sqrt{0 - 4 \cdot 2(6 - 3 \cdot 2)}}{6} = -\frac{\sqrt{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 13}}{6} = -\frac{\sqrt{78}}{3}.$$

седьмой — $\frac{0 + \sqrt{78 \cdot 4}}{6} = \frac{\sqrt{78}}{3},$

Чтобы условие задачи выполнялось, нужно, чтобы разность 9-ого и 4-ого членов прогрессии была в 5 раз ~~меньше~~ больше разности шестого и седьмого. Но $-\sqrt{5} \neq \frac{\sqrt{78}}{3}$. Значит такой случай также невозможен.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

* СТРАНИЦА
3* из 34

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Если $\alpha = 3$, то 4-ый член разложения
равен $\frac{3 - \sqrt{9 - 4 \cdot (9 - 3 - 4)}}{2} = \frac{3 - \sqrt{73}}{2}$;

$$\begin{aligned} 9 - \text{стк} &= \frac{3 + \sqrt{73}}{2}; \quad 6 - \text{стк} = \frac{9 - \sqrt{81 - 4 \cdot 9}}{6} \\ \frac{x(-234)}{6} &= \frac{9 - \sqrt{81 + 4 \cdot 4 \cdot 9}}{6} = \\ &= \frac{9 - 3\sqrt{325}}{6} = \frac{9 - 15\sqrt{13}}{6} = \frac{3 - 5\sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

$$7 - \text{стк} = \frac{3 + 5\sqrt{13}}{2}.$$

~~Чтобы условие выполнимое, нужно,
чтобы разность из квадратов 9-стк и 4-стк
была равна 6 5 раза больше раз-
ности 7-стк и 6-стк. Но тогда
 $5\sqrt{13} = 5\sqrt{13}$, что верно. И так как
разности 9-стк и 4-стк одни и
также равны разности 9-стк и 7-стк
должна быть $6 \frac{5}{2} = 27,5$ раза
меньше разности 9-стк и 4-стк.~~

~~$$\text{Но } \frac{3 + \sqrt{73} - 3 - 5\sqrt{13}}{2} = -2\sqrt{13}; \quad \alpha \frac{3 + \sqrt{73} - 3 + 5\sqrt{13}}{2} =$$~~

$$= \sqrt{13}$$

I



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Н.к. Чай чека нужна

Всё время решения до этого нужно
запомнить "6-ой" и "4-ый" и
"7-ой" и "9-ый" и находить.

Можно в последнем случае
выбрать член $\frac{3-5\sqrt{13}}{2} > \frac{3-\sqrt{13}}{2} > \frac{3+\sqrt{13}}{2}$
 $\frac{3+5\sqrt{13}}{2}$, то которое подходит
условие. Значит получаем
что $ac = 3$,
значит: $ac = 3$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача $x \neq y \neq z$, то

$$xy + 1 = (x-1)^2$$

$$yz + 1 = (y-1)^2$$

$$zx + 1 = (z-1)^2$$

$$(x-z)(x+z-z) = y(x-z).$$

$$x + z - z = -y.$$

$$x + y + z = z.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - 4y - 4z + 4 = x^2 + y^2 + z^2 - 8 + 4z = \\ = x^2 + y^2 + z^2 + 4.$$

~~$xyz = -4z + 2xz^2$~~

~~$zyz = -4xz + 2xz^2$~~

~~$zxz = -4yz + 2yz^2$~~

$$(x+y+z)^2 = 4 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xyz + yz + zx).$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 4 \cdot z = 2(xyz + yz + zx) = 0.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 - (xyz + yz + zx) = 0,$$

$$xyz + yz + zx = (x^2 + y^2 + z^2) + 4 = 0.$$

$$6xz = \cancel{xz} \quad \alpha(\alpha-z) \pm \sqrt{\alpha^2(\alpha-z)^2 - 4(\alpha^2\alpha - 4)} \\ z$$

$$4xz = \frac{\alpha^2(\alpha-z) \pm \sqrt{\alpha^4(\alpha-z)^2 - 12(6-\alpha^2)}}{6} \cdot$$

$$- \frac{\alpha^2(\alpha-z) - \sqrt{-}}{6} + \frac{3\alpha(\alpha-z) - 3\sqrt{-}}{6} =$$

$$= \frac{\alpha^2(\alpha-z) + \sqrt{-}}{6} - \frac{3\alpha(\alpha-z) + 3\sqrt{-}}{6}$$

$$- \frac{\alpha^2(\alpha-z)}{6} + \frac{3\alpha(\alpha-z)}{6} = \frac{\alpha^2(\alpha-z)}{6} - \frac{3\alpha(\alpha-z)}{6}$$

$$\cancel{(\alpha-z)\sqrt{-}} - \alpha^2 + 3\alpha = \alpha^2 - 3\alpha \quad \frac{243}{3} = 81,$$

~~$\alpha^2 + 3\alpha - 3\alpha = \alpha^2$~~

$$g^2 + 49 \cdot g \cdot 4 \quad \cancel{+ 49 \cdot 4 = 316} \quad \frac{234}{3} = 78$$

~~$325 = 13 \cdot 25$~~

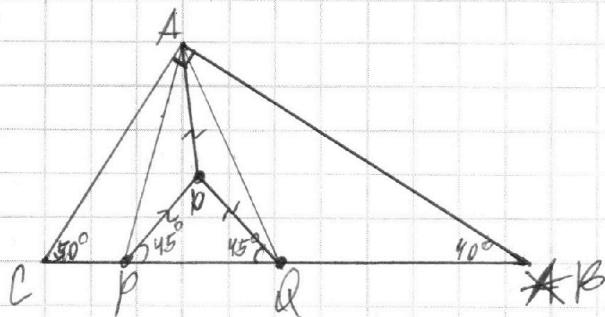
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Если в $\triangle PPQ$ $PP = PQ$
и $\angle PPQ = 90^\circ$, то
в кейс $\angle PPQ = \angle PQP =$
 $= \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

2) Если $\angle BCA = 50^\circ$,
то $\angle CBA = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.
Положи в
 $\triangle AAC$ $CAC = CQ$ $\angle CAQ = \angle CQA = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} =$
 $= 65^\circ$; в $\triangle ABP$ $CAB = BP$ $\angle BAP = \angle BPA =$
 $= \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Положи $\angle PAQ = \angle CAQ + \angle BAP - \angle BAC = 40^\circ +$
 $+ 65^\circ - 90^\circ = 45^\circ$.

Заменимши, что $\angle PAQ = 2\angle CAP$,
и она же определяется как $PQ \Rightarrow m, n$,
 $PP = PQ$, то $A \in W$, где W — окружность
с центром P , проходящая через P и
 Q . Положи $PP = AP = QP$ как получается.
Положи в $\triangle PPA$ $\angle PAP = \angle APP = \angle APB - \angle PPB =$

$= 40^\circ - 45^\circ = 25^\circ$, то в $\triangle QPA$ $\angle QAP =$
 $= \angle AQP = \angle AQC - \angle PQC = 65^\circ - 45^\circ = 20^\circ$; Положи
 $\angle BAP = \angle PAQ - \angle PAB - \angle PAP = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$ и
 $\angle CAP = \angle CAQ - \angle PAQ = 65^\circ - 20^\circ = 45^\circ$.

Положи заменимши, что $APPQ$ и $APQB$ — квадраты



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

согласно теореме $\angle CAP = 180^\circ - \angle CDP = 45^\circ$ и $\angle BAP = 180^\circ - \angle BQP = \angle PQC = 45^\circ$. Тогда $\angle PBC = \angle PAQ = 30^\circ$.
Ответ: 30° .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Если $x = y$, то

$$x = -xy + x^2,$$

$$-xy = 0$$

$$xy = 0 \quad x$$

$$x(x-y) = (y-x) \times \\ \times (y+xy-x).$$

$$x = x - xy - y.$$

$$xy = x - y.$$

$$x = x = 1 - \frac{y}{x}$$

$$xy = -xy + x^2$$

$$y x = -xy + x^2$$

$$x^2 = -xy + y^2$$

$$xy + y = (x-1)^2.$$

$$xy + y = (y-1)^2.$$

$$y - \frac{y^2}{x} = -x + y + 1 - y + \frac{y^2}{4}.$$

$$\frac{3y^2}{4} = y + 1.$$

$$3y^2 = 4y + 4; 3y^2 - 4y - 4 = 0.$$

$$x = y = 0 \quad x \cdot D = 16 + 48 = 64.$$

~~хорошо~~ $y_1 = \frac{4+8}{8} = 2.$

~~хорошо~~ $y_2 = \frac{4-8}{8} = -\frac{2}{3}.$

$$(x-x)^2 + (y-y)^2 + (z-z)^2 = \\ = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 \quad \checkmark \\ = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{64}{9} = \frac{72}{9} = 8.$$

Если $x \neq z \neq y$, то условие задачи, $(x+z)^2 +$
 $+(y+z)^2 + (x+y)^2$

~~хорошо~~ $xy = (x-y)^2 - 1 = (x-y)z.$

$$x = \frac{z(x-y)}{y},$$

$$\frac{x^2(x-y)}{y} = -xy + y^2; x^2(x-y) = y^3 - zy^2 =$$

$$(x+z)^2 - (x-z)^2 + (y+z)^2 - (y-z)^2 + (x+y)^2 - (x-y)^2 = y^2(y-z).$$

$$= xz(x-z - z^2 + 2yz - z^2 + xz - zy) = S - 8.$$

$$4(xy z + y z + x y) = S - 8.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xxy + xyx + xzx = -4(x + y + z) + xz^2 + xz^2 + xy^2,$$

$$(x^2 - xxy + y^2) + (x^2 - xzx + z^2) + (y^2 - xyz + z^2) = 4(x + y + z),$$

$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 4(x+y+z).$$

||

$$x + y + z > 0.$$

||
8.

$$z^2 - zx + 1 = xy + 1 ; (z-1)^2 = xy + 1.$$

$$(x-1)^2 = yz + 1 ; (y-1)^2 = zx + 1,$$

$$(x-1-z+1)(x+z-z) = y(z-x),$$

$$(x-z)(x+z-z) = y(z-x). \quad \cancel{x \neq z}$$

$$y = z - x - z. \quad \left. \begin{array}{l} \text{однако} \\ \text{же} \end{array} \right\}$$

$$x = z - x - y$$

$$z = z - y - z.$$

$$z = y - x - z - y.$$

$$\underline{x + y + z = z.}$$

$$(y-x)^2 = (-z-x)^2 ; (y-x)^2 = (x+z)^2.$$

$$(z-x)^2 = (x+y)^2 ; (x-z)^2 = (y+z)^2.$$

$$(x+z)^2 + (y+z)^2 + (x+y)^2$$

$$\underbrace{1000\dots00}_{30001}$$

$$\underbrace{\dots}_{30001}$$

$$\begin{array}{r} 99\dots9 \\ 729 \\ \hline 801 \end{array}$$

~~D. D. 9979~~

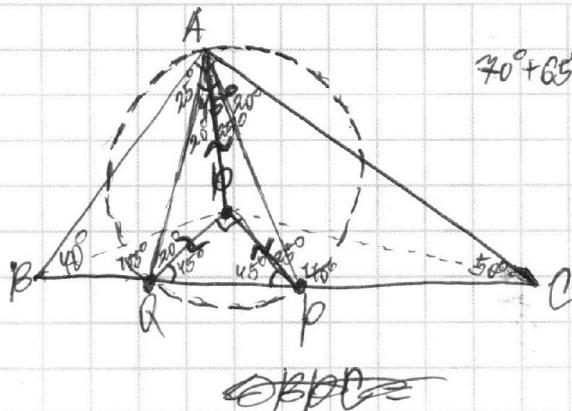


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$70^\circ + 65^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

$$AP = AB \cos 40^\circ \cdot r_n = r_n AB \cos 40^\circ.$$

$$AQ = AC \cos 65^\circ \cdot r_n = r_n AC \cos 65^\circ,$$

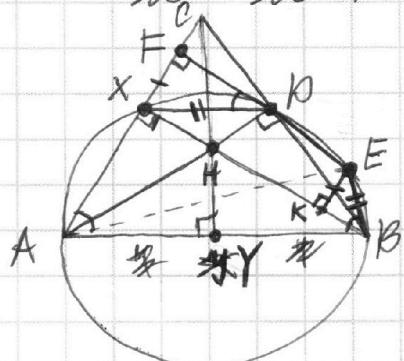
$\triangle APQ$ и $\triangle APC$ - вспомогательные.

$\angle BPD = \angle BAP$; $\angle CPD = \angle CAP$.

||

$$\angle BPD = 25^\circ \Rightarrow \angle BDC = 180^\circ - 125^\circ$$

$$-25^\circ = 20^\circ. \text{ Ответ: } 20^\circ.$$



№3

$$\triangle BKE \sim \triangle AFE \sim \triangle PDF \Rightarrow m_{KE} = m_{EF} =$$

$$= EK, m_{\triangle FXD} = m_{\triangle KEB} \Rightarrow$$

$$BE = XD = 6.$$

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 2\sqrt{7}.$$

$$AP \cdot PC = BX \cdot AC; \quad \cancel{FX = FD}$$

$$= \frac{XD}{AE} = \frac{3}{2\sqrt{7}} \Rightarrow FX \cdot FA = FD - FE.$$

$$CD = \frac{3}{4} AC = 7,5.$$

из $\triangle CXD \sim \triangle CRA$.

$$\frac{FX}{FE} = \frac{FD}{FA} = \frac{3}{2\sqrt{7}}$$

$$BE = BX = 6.$$

$$CD = 7,5.$$

$$AP = \sqrt{100 - \frac{9}{16} \cdot 100} =$$

$$= 10\sqrt{\frac{4}{10}} =$$

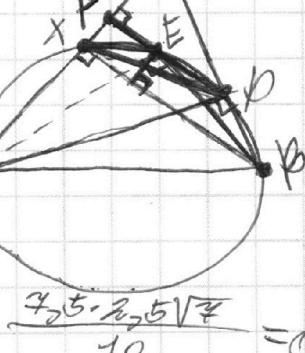
$$= 2,5\sqrt{7},$$

$$AE = 2\sqrt{7}$$

$$= \frac{35}{40} \sqrt{7}.$$

$$\begin{aligned} &\triangle FXD \sim \triangle AFE \\ &\frac{FD}{AF} = \frac{3}{\sqrt{7}}; \quad AF = \frac{FD \cdot \sqrt{7}}{3} = \\ &= \frac{35}{40} \cdot \sqrt{7} = \frac{5 \cdot 7}{8} = \\ &= 4,375. \end{aligned}$$

$$b = \frac{CD \cdot AP}{AC} =$$



$$= \frac{7,5 \cdot 2,5\sqrt{7}}{10}$$

$$= \frac{35}{40} \sqrt{7}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!